2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

doi 10.26089/NumMet.v27r443 УДК 519.6

Подавление численной дисперсии в трехмерных сейсмических данных с использованием нейронной сети

Е. А. Гондюл
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0009-0009-0619-1198, e-mail: e.gondyul@yandex.ru

Д. М. Вишневский
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-1439-4552, e-mail: vishnevskydm@gmail.com

К. Г. Гадыльшин
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-7247-6911, e-mail: gadylshinkg@ipgg.sbras.ru

В. В. Лисица
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: lisitsavvbiz@gmail.com

Аннотация: Сейсмическое моделирование является одной из наиболее трудоемких и ресурсоемких частей современных процедур обработки сейсмических данных. Для получения точного решения необходимо использовать мелкую расчетную сетку. Естественным способом сокращения вычислительных затрат является применение более грубой сетки, однако это приводит к существенному росту численных ошибок, в основном численной дисперсии. В настоящей работе представлен подход к ускорению сейсмического моделирования и подавлению численной дисперсии в результатах моделирования с использованием методов машинного обучения. На первом этапе весь набор данных, состоящих из тысяч сейсмограмм, рассчитывается на грубой расчетной сетке. Затем для небольшого числа источников рассчитываются сейсмограммы на мелкой расчетной сетке для формирования обучающего набора данных. Далее нейронная сеть обучается восстанавливать решение без численной дисперсии по результатам моделирования, полученным на грубой сетке. Показано, что использование лишь 2–4% источников от общего их количества для формирования обучающей выборки обеспечивает снижение погрешности в два раза при ускорении моделирования волновых сейсмических полей в трехмерной области более чем в шесть раз.

Ключевые слова: сейсмическое моделирование, нейронные сети, численная дисперсия.

Благодарности: В. В. Лисица и Е. А. Гондюл разрабатывали нейросетевой подход и проводили численные эксперименты при финансовой поддержке Российским научным фондом по договору № 22–11–00004-П, Д. М. Вишневский разрабатывал и реализовывал конечно-разностный алгоритм в рамках государственного задания ИМ СО РАН № FWNF-2022-0015.

Для цитирования: Гондюл Е.А., Вишневский Д.М., Гадыльшин К.Г., Лисица В.В. Подавление чисиленной дисперсии в трехмерных сейсмических данных с использованием нейронной сети // Вычислительные методы и программирование. 2026. **27**, № 4. 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443.

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

Numerical dispersion mitigation in 3D seismic data using neural network

Elena A. Gondyul
Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0009-0009-0619-1198, e-mail: e.gondyul@yandex.ru

Dmitry M. Vishnevsky
Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0002-1439-4552, e-mail: vishnevskydm@gmail.com

Kirill G. Gadylshin
Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0001-7247-6911, e-mail: gadylshinkg@ipgg.sbras.ru

Vadim V. Lisitsa
Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0003-3544-4878, e-mail: lisitsavvbiz@gmail.com

Abstract: Seismic modelling is one of the most time-consuming and resource-intensive parts of modern seismic data processing procedures. To obtain an accurate solution, a fine computational grid must be used. A natural way to reduce computational costs is to use a coarser grid; however, this leads to a significant increase in numerical errors, primarily numerical dispersion. This paper presents an approach to accelerating seismic modelling and suppressing numerical dispersion in the modelling results using machine learning methods. In the first stage, the entire dataset, consisting of thousands of seismograms, is computed on a coarse computational grid. Then, for a small number of sources, seismograms are computed on a fine computational grid to form a training dataset. Subsequently, a neural network is trained to reconstruct a solution free of numerical dispersion based on the simulation results obtained on the coarse grid. It is shown that using only 2–4% of the total number of sources to form the training sample halves the error whilst accelerating the simulation of seismic wavefields in a three-dimensional domain by more than a factor of six.

Keywords: seismic modeling, neural network, numerical dispersion.

Acknowledgements: V. V. Lisitsa and E. A. Gondyul developed the neural network and performed numerical experiments under the support of the Russian Science Foundation under the agreement No. 22–11–00004-П, D. M. Vishnevsky developed the finite difference algorithm under the support of the Russain State argeement FWNF-2022-0015 at IM SB RAS.

For citation: E. A. Gondyul, D. M. Vishnevsky, K. G. Gadylshin, V. V. Lisitsa, "Numerical dispersion mitigation in 3D seismic data using neural network," Numerical Methods and Programming. **27** (4), 705–722 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r443.

1. Введение. При моделировании волновых сейсмических полей могут потребоваться миллионы узло-часов работы высокопроизводительных вычислительных ресурсов. Так, стоимость моделирования при плотной системе наблюдений (тысячи источников на км^2) превышает стоимость полевого эксперимента [1]. Моделирование сейсмических полей зачастую используется как этап алгоритмов обработки сейсмических данных, например полноволновой инверсии [2, 3]. Распространенными методами моделирования сейсмических полей являются сеточные методы, такие как конечно-разностная схема на сдвинутых сетках [4, 5], сочетание конечно-разностной схемы на частично сдвинутых сетках [6–8] и имитационного метода для сохранения точности вблизи свободной поверхности [9–11], сочетание конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках и метода суммирования по частям [12–14]. Также могут быть применены методы,

© Е. А. Гондюл, Д. М. Вишневский, К. Г. Гадыльшин, В. В. Лисица

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

основанные на методе Галеркина [15–19], и бессеточные методы, такие как модель решетчатой пружины с прямоугольной сеткой [20], метод дискретных элементов [21], методы, основанные на перидинамике [22], метол гидродинамики сглаженных частиц [23], метод решетчатых уравнений Больцмана [24].

Хотя конечные разности широко используются для крупномасштабного моделирования, поскольку они сочетают относительно высокую эффективность с приемлемой точностью, такое моделирование по-прежнему требует огромных вычислительных ресурсов. Стандартный способ ускорить моделирование – увеличить шаг сетки (размер элемента, расстояние между частицами). Это приводит к значительному уменьшению размера задачи и одновременно к значительному увеличению численной ошибки [25–29]. Формальное увеличение порядка конечно-разностных схем позволяет уменьшить численную погрешность, в основном численную дисперсию, связанную с пространственной дискретизацией, но для разрешения волнового поля по-прежнему приходится сталкиваться с пределом Найквиста в 2 точки на длину волны. Формальное увеличение порядка метода конечных элементов, метода Галеркина или метода спектральных элементов позволяет уменьшить размер элемента, но это не гарантирует уменьшения размера задачи с точки зрения степеней свободы на длину волны [28, 30]. Более того, оба описанных подхода увеличивают количество операций с плавающей запятой на узел сетки (на каждую степень свободы), а также увеличивают объем передаваемых данных, если метод декомпозиции расчетной области используется для параллельного крупномасштабного моделирования, что может серьезно снизить общую эффективность моделирования.

В последнее время начали развиваться совершенно другие подходы, основанные на постобработке данных [31–34]. Идея заключается в том, чтобы с высокой точностью аппроксимировать пространственные производные и сосредоточиться на устранении временно́й дисперсии. Численное решение принимается за точное при неистинной частоте, которое можно сравнивать с решением с истинной частотой [32]. Основным недостатком предлагаемого подхода является необходимость корректировки как исходного вейвлет-импульса, так и результирующих сейсмограмм. Таким образом, он не может быть применен к уже смоделированным грубым данным. Кроме того, необходимо использовать аппроксимации пространственных производных высокого порядка, что, как уже упоминалось, приводит к общему снижению эффективности алгоритма, особенно если речь идет о крупномасштабном моделировании.

Другой способ уменьшить численную дисперсию за счет последующей обработки — это использовать методы машинного обучения. Машинное обучение, в частности нейронные сети, широко применяется в геофизике. Нейронные сети также использовались для подавления различных численных ошибок [35, 36]. Однако нейронные сети “изображение-к-изображению” были сосредоточены на подавлении белого шума и наземного шума, но не на численной дисперсии, присущей только численному моделированию. Нейронные сети также использовались для решения таких задач, как полноволновая инверсия [37], сейсмическое моделирование [38, 39] и др. В настоящем исследовании представлено продолжение разработки подхода под названием NDM-net (Numerical Dispersion Mitigation network), который направлен на уменьшение численной дисперсии в результатах сейсмического моделирования. Этот подход был впервые предложен в [40] в применении к наборам 2D данных во временно́й области. Позже он был изменен, чтобы уменьшить размер обработанных сейсмограмм за счет учета низкочастотной части спектра быстрого преобразования Фурье (БПФ) [41]. Однако этот подход ранее не применялся при трехмерном моделировании волновых сейсмических полей. В нашем исследовании архитектура нейронной сети NDM-net модифицируется с учетом размеров трехмерных данных, что позволило существенно снизить требования к объему оперативной памяти. Так же, как и в [41], нейронная сеть применяется к сейсмическим данным в спектральной области с низкочастотной частью спектра БПФ. Кроме того, чтобы сократить время и ресурсы на вычисления, мы ограничили моделирование уравнением акустической волны; однако полученные результаты о применимости NDM-net для уменьшения численной дисперсии являются общими и могут быть непосредственно распространены на модель линейно упругого тела [40].

2. Численная дисперсия. Решается волновое уравнение акустической волны в трехмерном полупространстве $x_3 > 0$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{u} = f, \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nabla p = \boldsymbol{g}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u} = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})^T$ — вектор скоростей смещений, p — давление, c — скорость звука, f и $\boldsymbol{g}$ — правые части. Рассматривается система уравнений первого порядка вместо одного скалярного волнового уравнения второго порядка, чтобы использовать те же конечно-разностные аппроксимации пространственных производных, что и в случае аппроксимации волнового уравнения упругой среды в терминах скорости

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

смещения и тензора напряжения.

Для $x_3 = 0$ используется граничное условие свободной поверхности:

$$p|_{x_3=0} = 0.$$

Как правило, свободная поверхность может иметь сложную топографию, определяемую функцией $x_3 = \xi(x_1, x_2)$. Однако это требует особого подхода, а стандартные конечно-разностные схемы [10, 11] в этом случае не используются. Поэтому в рамках данного исследования свободная поверхность имеет простую топографию. На остальные границы вычислительной области накладываются слабоотражающие граничные условия, в частности идеально согласованные слои [42–44].

Краткая форма уравнений (1) представляется в виде линейного дифференциального оператора:

$$L[\boldsymbol{v}] = F, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор всех неизвестных, включающий три составляющие вектора скоростей смещений и давление. Правая часть F содержит внешние силы и сейсмические моменты.

Для аппроксимации оператора (2) широко используются конечно-разностные схемы на сдвинутых сетках [4, 45]. В этом исследовании используется схема четвертого порядка точности по пространству и второго порядка точности по времени [45]. Так, конечно-разностный оператор представляется в виде

$$L_h[\boldsymbol{v}_h] = F_h,$$

где h — параметр, характеризующий сетку (пространственный шаг).

После построения конечно-разностной схемы можно оценить численную ошибку, вызванную аппроксимацией. Используя дисперсионный анализ, можно найти решение конечно-разностной задачи для плоской волны:

$$\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{v}^{\,0} e^{i\omega(\boldsymbol{k},h)t + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}},$$

где ω — временна́я частота, $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор. Оценивая фазовую скорость полученного решения и сравнивая ее с фазовой скоростью решения дифференциальной задачи, можно оценить численную дисперсию и рассеяние энергии [28, 45–47]. В частности, для рассматриваемой схемы численная ошибка в фазовой скорости может быть получена, если воспользоваться следующими формулами:

$$c^{fd} = \frac{\omega(\boldsymbol{k}, h)}{|\boldsymbol{k}|} = \pm\frac{\sqrt{3}Nc}{\psi\pi}\arcsin\left(\frac{\psi}{\sqrt{3}}\sqrt{\hat{k}_1^2 + \hat{k}_2^2 + \hat{k}_3^2}\right),$$

$$\hat{k}_1 = \frac{9}{8}\sin\left(\frac{\pi\cos\alpha\cos\beta}{N}\right) - \frac{1}{24}\sin\left(\frac{3\pi\cos\alpha\cos\beta}{N}\right),$$

$$\hat{k}_2 = \frac{9}{8}\sin\left(\frac{\pi\cos\alpha\sin\beta}{N}\right) - \frac{1}{24}\sin\left(\frac{3\pi\cos\alpha\sin\beta}{N}\right),$$

$$\hat{k}_3 = \frac{9}{8}\sin\left(\frac{\pi\sin\alpha}{N}\right) - \frac{1}{24}\sin\left(\frac{3\pi\sin\alpha}{N}\right),$$

где c^{fd} — фазовая скорость численного решения, c — фазовая скорость истинного решения, N — количество точек на длину волны, ψ — коэффициент Куранта, α и β — два угла, определяющие направление распространения волны. Фазовая скорость численного решения — функция, зависящая от количества точек сетки на длину волны. Таким образом, численное решение имеет численную дисперсию, но не имеет диссипацию. Скорость c^{fd} стремится к скорости c, когда шаг сетки стремится к нулю, или $N \to \infty$. В частности, если рассматривать две сетки G_1 и G_2 с шагами h_1 и h_2 соответственно, где $h_1 > h_2$, то численная дисперсия первого решения v_{h_1} больше, чем численная дисперсия второго решения v_{h_2}. Однако менее точное решение v_{h_1} может быть вычислено намного быстрее, чем более точное v_{h_2}.

В этом исследовании предлагается использовать нейронную сеть $\mathcal{N}$, которая сопоставляет искаженное численное решение $\boldsymbol{v}_{h_1}$ с достаточно точным решением $\boldsymbol{v}_{h_2}$, где $h_1 > h_2$ ($N_1 < N_2$). Если справедливы неравенства

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{h_i}\| \leqslant Ch_i^2, \quad \|\mathcal{N}[\boldsymbol{v}_{h_1}] - \boldsymbol{v}_{h_2}\| \leqslant \varepsilon \ll Ch_1^2,$$

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

где $i = 1, 2$, то можно получить оценку

$$\|\boldsymbol{v} - \mathcal{N}[\boldsymbol{v}_{h_1}]\| \leqslant Ch_2^2 + \varepsilon \ll Ch_1^2.$$

В предыдущих исследованиях было показано, что в 2D эта проблема эффективно решается с использованием NDM-net, основанной на архитектуре U-net [40, 41]. Кроме того, NDM-net была применена как к данным во временно́й, так и к данным в частотной области. Последний вариант предпочтительнее из-за возможности сжатия данных. В частности, записанные сейсмограммы подвергаются избыточной дискретизации, что означает, что при применении БПФ почти 60% высокочастотных данных не содержат полезной информации и ими можно пренебречь. Этот эффект широко используется при сейсмическом моделировании, когда применяются фильтры нижних частот [18, 41, 48]. Что касается обработки сигналов, то NDM-net может быть применена только к 40% спектров полезного сигнала, что значительно сокращает время обучения.

3. Нейронная сеть NDM-net. Типичная система наблюдения сейсмических данных состоит из нескольких тысяч источников с положениями $\boldsymbol{x}_s^j$, $j = 1, ..., N_s$, где N_s — количество источников в системе наблюдения. Таким образом, численное моделирование полного сейсмического поля требует решения системы уравнений (1) с множеством правых частей. При использовании грубой расчетной сетки такое моделирование может быть выполнено относительно быстро. Однако полученное решение $v_c(\boldsymbol{x}_s^j)$ имеет большую численную дисперсию. В случае же использования достаточно мелкой расчетной сетки для получения сейсмограмм $v_f(\boldsymbol{x}_s^j)$ численное моделирование может занять неприемлемо много расчетного времени. Нейронная сеть NDM-net же сопоставляет данные с численной дисперсией с более точными данными для ускорения численного моделирования:

$$\mathcal{N} : v_c(\boldsymbol{x}_s^j) \to v_f(\boldsymbol{x}_s^j)$$

для всех $j = 1, ..., N_s$.

Обучающий набор сейсмограмм получен из решений на мелкой расчетной сетке для малого количества источников (для 2D случая до 20%, для 3D случая до 5% от общего количества источников).

Для аппроксимации оператора перехода $\mathcal{N}$ используется архитектура U-net с кодер и декодер частями (рис. 1). Входными и выходными данными являются трехмерные сейсмические данные в частотной области с двумя каналами — действительной и мнимой частями БПФ сигнала.

Кодер часть состоит из четырех блоков, каждый из которых выполняет две операции трехмерной свертки с ядром размером $3 \times 3 \times 3$. После каждой такой свертки выполняется нормализация и применяется функция активации ReLU. Так данные переводятся в пространство признаков, после чего применяется операция MaxPool3D с ядром размером $2 \times 2 \times 2$ для уменьшения пространственной размерности и повышения вычислительной эффективности при сохранении важной пространственной информации.

Декодер часть обратно переводит данные из пространства меньшей размерности в пространство размерности исходных данных с использованием слоев повышающей дискретизации с ядром размером $2 \times 2 \times 2$ и последующей операции трехмерной свертки с ядром размером $3 \times 3 \times 3$. Также применяется нормализация и нелинейная функция активации ReLU. Эффективное и надежное восстановление данных обеспечивают пропускные соединения, которые объединяют результаты операций из кодер части с результатами операций из декодер части. Последний слой декодера — свертка с ядром размером $1 \times 1 \times 1$, в результате которой получаются данные с двумя каналами (действительная и мнимая части спектра сигнала).

После построения архитектуры нейронной сети реализуется алгоритм обучения. Для обновления весов линейных операций минимизируется функция потерь с использованием метода адаптивной оценки момента (Adam):

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \left\| v_f(\boldsymbol{x}_s^j) - \mathcal{N}(v_c(\boldsymbol{x}_s^j), \boldsymbol{\theta}) \right\|_1,$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — вектор весов нейронной сети. Для реализации программы используется библиотека PyTorch.

3.1. Вычислительная сложность. В двумерном случае численными экспериментами было показано, что для создания подходящего обучающего набора данных требуется всего 5–20% источников [40, 49]. При этом моделирование обучающего набора данных — самая трудоемкая часть алгоритма.

Здесь оценивается вычислительная сложность моделирования обучающего набора данных и генерации решений нейронной сетью для трехмерного случая. Шаги грубой сетки обозначаются как h_c (пространство) и τ_c (время) с фиксированным отношением $\tau_c/h_c = \psi$. Шаги мелкой сетки — h_f и τ_f с таким

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

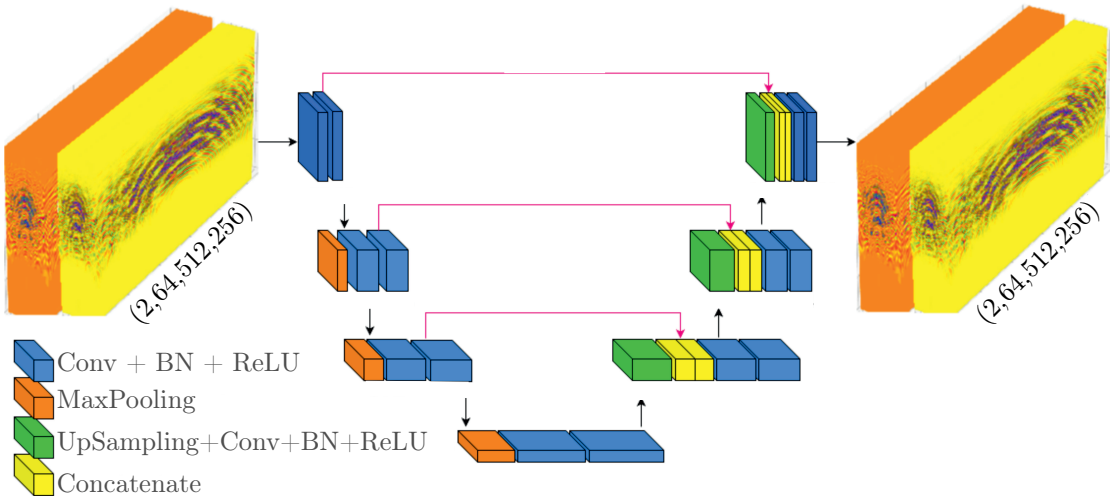


Рис. 1. Схематичное представление нейронной сети NDM-net. Входные и выходные данные — мнимая и действительная части спектра сейсмограммы. Красными стрелками обозначены пропускные соединения. Цветными блоками обозначены Conv (свертка), BN (пакетная нормализация), ReLU (нелинейная функция активации) и MaxPooling (максимальное объединение)

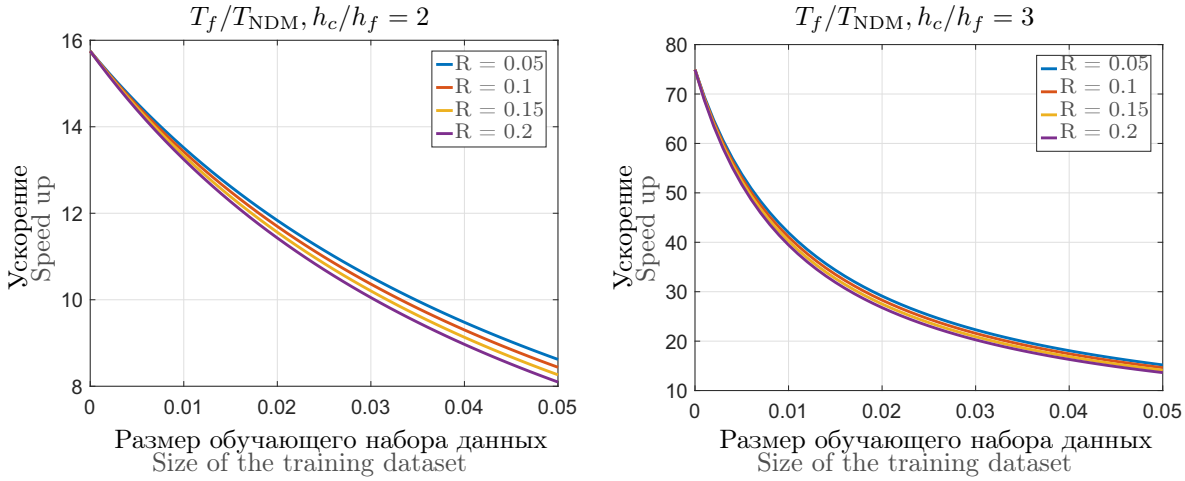
Fig. 1. Schematic representation of the NDM-net neural network. The input and output data are the imaginary and real parts of the spectrum of the seismogram. The red arrows indicate access points. The colored blocks are Conv (convolution), BN (batch normalization), ReLU (nonlinear activation function), and MaxPooling (maximum pooling)

же отношением $\tau_f/h_f = \psi$. Коэффициентом уточнения расчетной сетки будем называть отношение шагов сетки $r = h_c/h_f = \tau_c/\tau_f$; будем предполагать, что $r \geqslant 2$. Как правило, r — целое число, и обычно используются значения $r = 2, 3, 4$. Предположим, что отношение количества источников в обучающем наборе данных ко всему количеству источников равно $q \ll 1$. В численных экспериментах исследования $q \in [0.01, 0.05]$. Пусть параллельная реализация численного алгоритма обладает идеальным слабым масштабированием, т.е. при увеличении размера задачи количество процессов MPI пропорционально увеличивается, но время, затрачиваемое на выполнение одноразового шага конечно-разностного решения, остается неизменным. Это означает, что время вычислений, измеряемое в ядро-часах, линейно зависит от размера задачи. Такое предположение, как правило, справедливо, когда явные конечные разности сочетаются с трехмерной декомпозицией области. Для моделирования решения с мелкой и грубой сеткой используется одна и та же конечно-разностная схема. Таким образом, выполняется одинаковое количество операций с плавающей запятой для каждого узла сетки, и требуется одинаковое время для получения решения в одной точке для обеих сеток. При соблюдении всех этих условий можно оценить ускорение алгоритма моделирования сейсмических полей, если применить NDM-net.

Время, необходимое для моделирования более точного решения $v_f(\boldsymbol{x}_s^j)$ для j-й позиции источника, обозначается как t_f. Время же, необходимое для моделирования решения $v_c(\boldsymbol{x}_s^j)$ на грубой расчетной сетке, обозначается как $t_c = r^{-4}t_f$, где r — коэффициент уточнения. Таким образом, общее время моделирования всего набора данных на мелкой сетке равно $T_f = N_s t_f$, а время моделирования обучающего набора данных равно $T_t = qN_s t_f$. Время же моделирования всего набора данных на грубой сетке равно $T_c = N_s t_c = r^{-4}N_s t_f$.

Время обучения пропорционально количеству сейсмограмм в наборе обучающих данных. Таким образом, его можно оценить как $T_{\text{tr}} = RqN_s t_f$, где $R < 1$ — отношение времени обучения ко времени моделирования на мелкой сетке, которое в этом исследовании при численных экспериментах оценивается как $R \in [0.05, 0.2]$. Кроме того, учитывается время коррекции, т.е. применения нейронной сети NDM-net. Коррекция применяется к каждой сейсмограмме. Таким образом, его можно оценить как $T_{\text{corr}} = PN_s t_f$, где $P \ll 1$ — отношение времени коррекции ко времени моделирования на мелкой сетке. По оценкам из численных экспериментов $P \approx 10^{-3}$. Принимая все это во внимание, можно оценить ускорение

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443



a) b)

Рис. 2. Оценка ускорения моделирования сейсмических полей с использованием NDM-net по сравнению с использованием мелкой расчетной сетки в зависимости от относительного количества сейсмограмм в обучающем наборе при различных коэффициентах уточнения расчетной сетки: a) $r = 2$; b) $r = 3$

Fig. 2. Estimation of acceleration of seismic field modeling using NDM-net compared to using a fine computational grid, depending on the relative number of seismograms in the training set at different coefficients of refinement of the calculated grid: a) $r = 2$; b) $r = 3$

сейсмического моделирования при применении NDM-net:

$$\frac{T_f}{T_{\text{NDM}}} = \frac{T_f}{T_c + T_t + T_{\text{tr}} + T_{\text{corr}}} = \frac{1}{r^{-4} + q(R+1) + P}.$$

Если шаг расчетной сетки увеличить в два раза, т.е. $r = 2$, то моделирование сейсмических полей с использованием разработанного алгоритма ускоряется от 8 до 13 раз в зависимости от относительного количества сейсмограмм в обучающем наборе (рис. 2). Если $r = 3$, то ускорение варьируется от 15 до 40 раз.

Также можно оценить, во сколько раз больше требуется расчетного времени алгоритма при использовании NDM-net по сравнению с численным моделированием на грубой расчетной сетке:

$$\frac{T_{\text{NDM}}}{T_c} = \frac{T_c + T_t + T_{\text{tr}} + T_{\text{corr}}}{T_c} = \frac{r^{-4} + q(R+1) + P}{r^{-4}}.$$

Если $r = 2$, алгоритм при применении NDM-net работает всего в 1.2–2 раза медленнее, чем при моделировании на грубой сетке (рис. 3), что является относительно небольшой переплатой за более качественное решение.

В представленном исследовании рассматривается простейший случай, когда обучающий набор данных содержит равноудаленные источники. Используется регулярная система наблюдений с позициями источников $((x_s^j)_1, (x_s^k)_2) = (H_1 j, H_2 k)$, где H_1 и H_2 — расстояния между соседними источниками в направлениях x_1 и x_2 соответственно. Обучающий набор данных формируется из сейсмограмм, соответствующих источникам с удалением друг от друга $\alpha_1 H_1$ и $\alpha_2 H_2$. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$, то относительное количество сейсмограмм в обучающем наборе данных равно $q = 0.01$.

4. Численные эксперименты.

4.1. Численное моделирование и скоростная модель. Исследуется численная эффективность разработанного алгоритма с использованием трехмерной акустической скоростной модели 3D SEG/EAGE Overthrust (рис. 4 a). Эта скоростная модель обеспечивает детальное представление геологических структур и связанных с ними изменений сейсмической скорости. Объединяя данные сейсморазведки, модель выявляет сложные особенности областей надвигов, предоставляя ценную информацию о сложных геологических образованиях и структурах разломов.

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

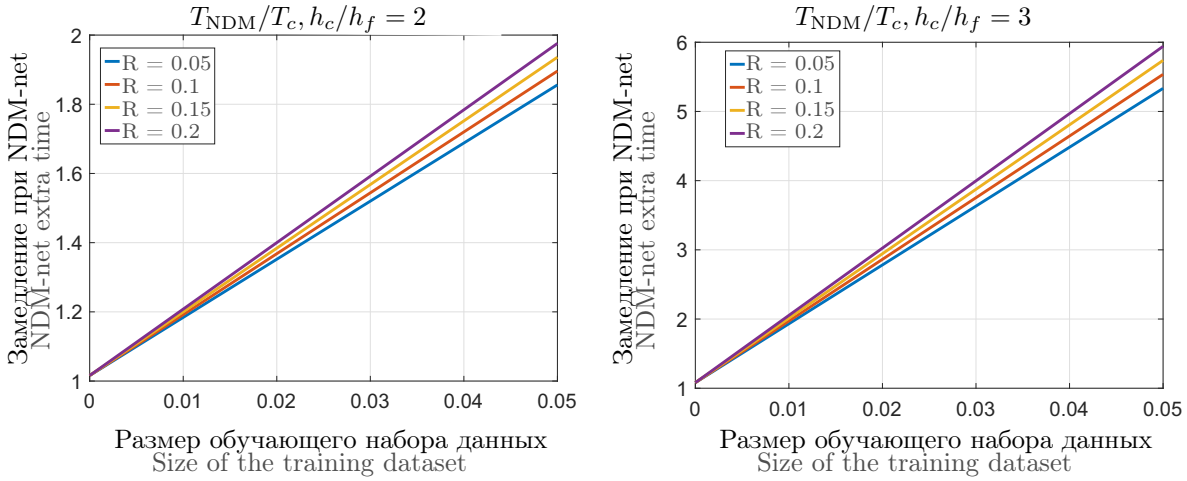


Рис. 3. Оценка замедления моделирования сейсмических полей с использованием NDM-net по сравнению с использованием грубой расчетной сетки в зависимости от относительного количества сейсмограмм в обучающем наборе при различных коэффициентах уточнения расчетной сетки: a) $r = 2$; b) $r = 3$

Fig. 3. Estimation of the slowdown in seismic field modeling using NDM-net compared to using a coarse computational grid, depending on the relative number of seismograms in the training set at different coefficients of refinement of the calculated grid: a) $r = 2$; b) $r = 3$

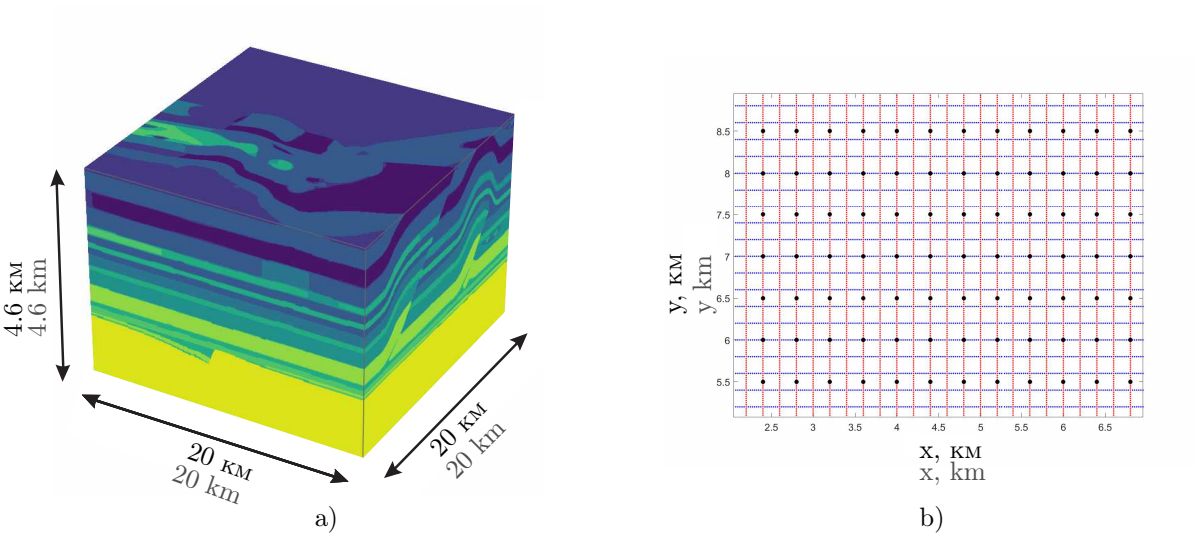


Рис. 4. Трехмерная модель: a) акустическая скоростная модель 3D SEG/EAGE Overthrust без PML слоев; b) часть системы наблюдения с источниками (красные точки) и приемниками (синие точки). Черными точками обозначены позиции, которые используются для формирования обучающего набора

Fig. 4. 3D model: a) acoustic 3D SEG/EAGE Overthrust velocity model without PML layers; b) part of a surveillance system with sources (red dots) and receivers (blue dots). The black dots indicate the positions that are used to form the training set

Размер скоростной модели 3D SEG/EAGE Overthrust составляет $20 \times 20 \times 4.6$ км^3 с равномерным шагом сетки 25 м. Система наблюдения включает 101 линию источников, расположенных на расстоянии 200 м друг от друга. При этом расстояние между источниками равно 25 м. Линии источников ориентированы вдоль оси y. Линии приемников расположены на расстоянии 200 м друг от друга. Количество линий приемников — 101, а расстояние между приемниками равно 25 м. Линии приемников ориентированы вдоль оси x. На рис. 4 б схематично показана часть системы наблюдений. Максимальный выброс источник-приемник вдоль линий источников и вдоль линий приемников составляет 6.4 км. Общее время

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

записи сейсмических волн — 3.2 с при шаге 2 мс.

Синтетические сейсмограммы рассчитываются с использованием вейвлета Рикера в качестве источника с центральной частотой 25 Гц. Численные расчеты выполнялись на сетках с двумя различными шагами пространственной дискретизации: 25 м для грубой сетки и 12.5 м для мелкой сетки. Численное моделирование и обучение NDM-net выполнялось на локальном сервере, оснащенном 8 графическими процессорами Nvidia A100 с 80 Гб видеопамяти. При обучении NDM-net лимит памяти одного такого графического процессора превышается. Поэтому уменьшается размер сейсмических данных отсечением высокочастотных данных, которые не содержат важной информации [41]. Для этого используется БПФ и сохраняется лишь положительная низкочастотная часть спектра. В результате сейсмограммы имеют размер $32 \times 512 \times 256 \times 2$, где 32×512 — количество приемников, 256 — количество частотных отсчетов, 2 — действительная и мнимая части сигнала.

4.2. Параметры обучения NDM-net и ускорение моделирования. Для численных экспериментов используются обучающие наборы данных размером 2% и 4% от общего количества сейсмограмм в системе наблюдения данных. Обучающий набор данных равнораспределенный, т.е. источники расположены на равном расстоянии друг от друга. В качестве функции потерь для оптимизации параметров нейронной сети используется среднеквадратичная ошибка. Для нахождения параметров нейронной сети применяется алгоритм оптимизации Adam со скоростью обучения 10^{-4}. Чтобы избежать переобучения, используются методы ранней остановки и регуляризации отсева. Первый метод останавливает процесс обучения, когда потери при обучении достигают минимума. Второй метод предотвращает переобучение путем случайного удаления нейронов из нейронной сети. После обучения NDM-net применяется ко всему набору сейсмограмм.

Для одного источника с учетом времени считывания скоростной модели и записи синтетической сейсмограммы время расчета составляет $t_f = 16$ мин и $t_c = 2$ мин при использовании мелкой и грубой расчетных сеток соответственно. Таким образом, для моделирования всего набора более точных решений требуется $T_f = 2720.3$ GPU-часов, а для грубых решений $T_c = 340$ GPU-часов. Формирование обучающего набора данных размером 2% от общего количества источников требует $T_t^{2\%} = 54.4$ GPU-часов, а размером 4% от общего количества источников — $T_t^{4\%} = 108.8$ GPU-часов. Время обучения нейронной сети NDM-net при использовании 2%-го обучающего набора составляет $T_{\text{tr}} = 10$ часов, и 4%-го набора — $T_{\text{tr}} = 20$ часов. Для подавления численной дисперсии в одной сейсмограмме, т.е. применения нейронной сети, требуется $t_{\text{corr}} = 0.4$ с, тогда $T_{\text{corr}} = 68$ мин. Таким образом, время работы алгоритма составляет $T_{\text{NDM}}^{2\%} = T_c + T_t + T_{\text{tr}} + T_{\text{corr}} = 472.4$ GPU-часа при использовании 2%-го обучающего набора данных и $T_{\text{NDM}}^{4\%} = 536.8$ GPU-часов при использовании 4%-го обучающего набора данных, что дает коэффициент ускорения около 6 и 5 соответственно.

4.3. Результаты численных экспериментов. В этой работе используется относительная ошибка в L_2-норме для оценки качества результатов, полученных с использованием нейронной сети, т.е. расхождение между общим набором сейсмограмм, вычисленным на мелкой сетке, и результатом постобработки нейронной сетью NDM-net:

$$\varepsilon^j = \varepsilon(u_f, \mathcal{N}[u_c^j]) = \frac{\|u_f(x_s^j) - \mathcal{N}[u_c(x_s^j)]\|_2}{\|u_f(x_s^j)\|_2} \times 100\%, \quad \|u(x_s^j)\|_2^2 = \int_0^T \int_{-X}^{X} \int_{-Y}^{Y} u^2(x_s^j, t, x, y) dy dx dt,$$

где x и y — смещения вдоль соответствующих направлений, X и Y — максимальные смещения, t — время. Изначальная погрешность между сейсмограммами, рассчитанными на грубой и мелкой сетках, вычисляется аналогичным образом.

После обучения нейронной сети NDM-net, была выбрана сейсмограмма из тестового набора данных случайным образом (положение источника $(2600, 200)$ м). Двумерные срезы при $y = 0$ м и $x = 0$ м этой сейсмограммы представлены на рис. 5 и рис. 6 соответственно. Рис. 5 a, 6 a соответствуют решениям, полученным на мелкой сетке, и рассматриваются в качестве эталонных. Решения на грубой сетке, содержащие численную дисперсию, представлены на рис. 5 c, 6 c. Расхождения между двумя сейсмограммами показаны на рис. 5 d, 6 d. Решения отображены в единой шкале, поэтому заметно, что расхождение между грубым и эталонным решениями достигает 100%. Основной причиной данного расхождения является фазовый сдвиг, обусловленный численной дисперсией.

Результат применения NDM-net представлен на рис. 5 b, 6 b. Полученное решение заметно ближе к эталонному. Расхождение между скорректированным решением и решением на мелкой сетке показано

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

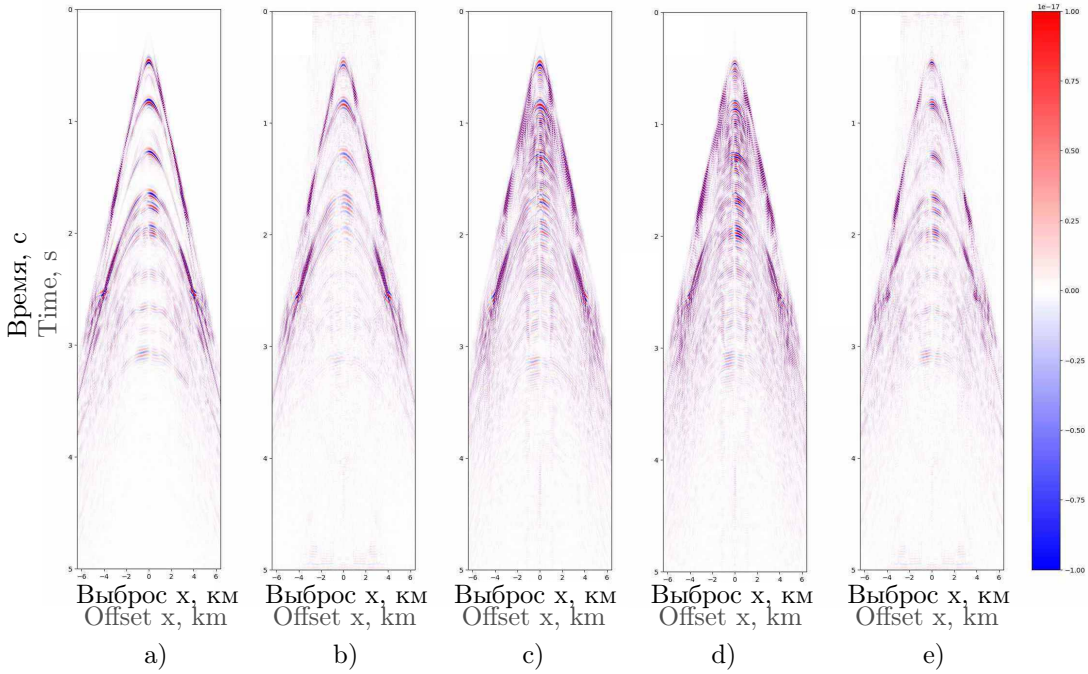


Рис. 5. Срезы трехмерных синтетических сейсмограмм для источника с координатами $X = 2600$ м, $Y = 200$ м при y $= 0$ м: a) решение на мелкой сетке; b) результат постобработки NDM-net; c) решение на грубой сетке; d) расхождение между решениями на грубой и мелкой сетках; e) расхождение между решением на мелкой сетке и результатом постобработки NDM-net

Fig. 5. Slices of 3D synthetic seismograms for a source with coordinates $X = 2600$ m, $Y = 200$m at y $= 0$ m: a) solution on a fine grid; b) NDM-net postprocessing result; c) solution on a coarse grid; d) difference between solutions on a coarse and fine grids; e) difference between solution on a fine grid and NDM-net postprocessing result

на рис. 5 e, 6 e. Ошибка в норме L_2 для скорректированных данных уменьшается приблизительно до 50%. Анализ отдельных трасс позволяет заключить, что такая относительно большая результирующая ошибка обусловлена различием амплитуд, что является менее критичным для сейсмической обработки по сравнению с фазовым сдвигом. Поэтому такой уровень ошибки приемлем для дальнейшей обработки и применения в таких алгоритмах, как метод миграции в обратном времени, что подтверждается экспериментами для двумерного случая [50].

Исходная ошибка и ошибка после постобработки представлены на рис. 7. Каждый пиксель соответствует относительной ошибке ε^j для всех положений источников в системе наблюдений. Для исходной ошибки и ошибки скорректированных данных использовалась одна и та же шкала. Следует отметить, что исходная ошибка, обусловленная численной дисперсией, превышает 100%, за исключением некоторых областей. Предполагается, что это связано с более высокой скоростью распространения волн. Применение NDM-net позволило снизить ошибку в среднем до уровня 70%.

Вместе с тем ошибка в норме L_2 практически нечувствительна к размеру обучающего набора данных. Для NDM-net, обученной на 2%-м и 4%-м обучающих наборах, наблюдаются близкие значения ошибки. Дополнительно рассматривался коэффициент подавления ошибки, определяемый как отношение исходной ошибки к ошибке после коррекции. Усредненный по всем положениям источников коэффициент подавления ошибки составил 1.5 для обучающего набора размером 2% и 1.63 для обучающего набора размером 4%.

В областях с резкими изменениями сейсмических атрибутов, обусловленными сложной структурой геологической среды, численная дисперсия также изменяется существенно. Это оказывает влияние на качество результатов постобработки с использованием NDM-net. Подобные эффекты могут быть устранены путем увеличения репрезентативности обучающего набора данных за счет его оптимизации [49].

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

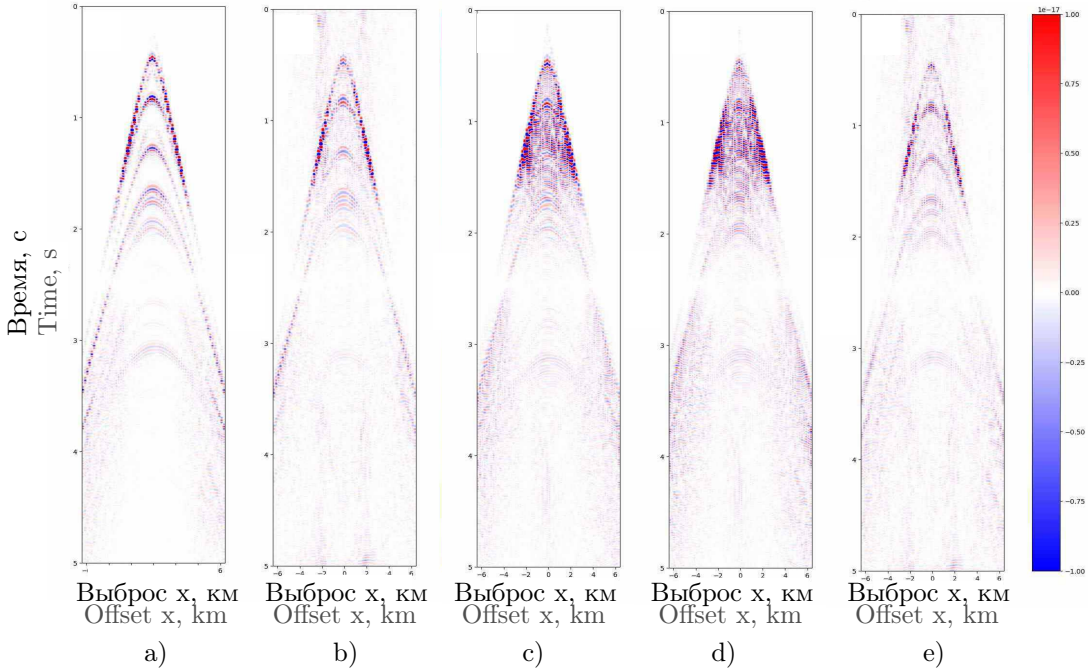


Рис. 6. Срезы трехмерных синтетических сейсмограмм для источника с координатами $X = 2600$ м, $Y = 200$ м при x = 0 м: a) решение на мелкой сетке; b) результат постобработки NDM-net; c) решение на грубой сетке; d) расхождение между решениями на грубой и мелкой сетках; e) расхождение между решением на мелкой сетке и результатом постобработки NDM-net

Fig. 6. Slices of 3D synthetic seismograms for a source with coordinates $X = 2600$ m, $Y = 200$m at x = 0 m: a) solution on a fine grid; b) NDM-net postprocessing result; c) solution on a coarse grid; d) difference between solutions on a coarse and fine grids; e) difference between solution on a fine grid and NDM-net postprocessing result

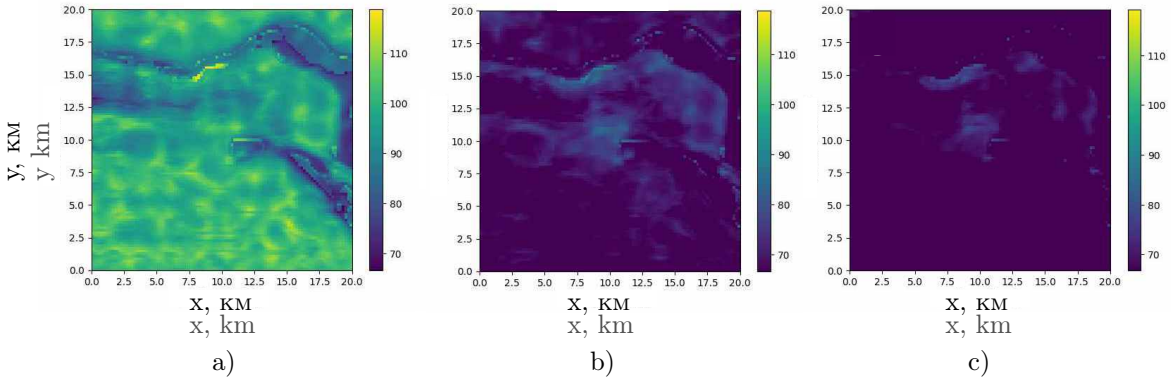


Рис. 7. Относительная ошибка (в %): a) между решениями на грубой и мелкой сетках; b) между решением на мелкой сетке и результатом постобработки NDM-net при обучающем наборе размером 2%; c) между решением на мелкой сетке и результатом постобработки NDM-net при обучающем наборе размером 4%

Fig. 7. Relative error (in %): a) between solutions on a coarse and fine grids; b) between solution on a fine grid and NDM-net postprocessing result when using training sets of 2%; c) between solution on a fine grid and NDM-net postprocessing result when using training sets of 4%

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

5. Обсуждение. В статье представлен подход с использованием нейронной сети NDM-net применительно к трехмерным сейсмическим данным. Подход получил развитие в серии предыдущих работ [40, 41, 49, 51], в которых рассматривалось применение NDM-net в двумерном случае. Численное моделирование двумерных сейсмических данных характеризуется высокой скоростью вычислений, что позволяет исследовать множество различных сценариев. В частности, были изучены способы построения оптимального обучающего набора данных с целью минимизации числа сейсмограмм при сохранении приемлемой точности результатов применения NDM-net. Кроме того, исследовалась способность NDM-net корректно обрабатывать недостаточно разрешенные скоростные модели. Снижение общего объема данных было достигнуто за счет применения низкочастотной фильтрации и коррекции спектров сейсмограмм. Полученные предварительные результаты позволили перейти к практическим приложениям и использовать NDM-net для ускорения трехмерного моделирования, а также для глубинной миграции.

Следует отметить, что представленное исследование ограничено единственным примером трехмерной скоростной модели 3D SEG/EAGE Overthrust и основано на решении акустического, а не упругого волнового уравнения. С одной стороны, в открытом доступе имеется ограниченное количество высококачественных трехмерных упругих скоростных моделей. С другой стороны, детальное исследование производительности и точности при применении 3D NDM-net требует моделирования по меньшей мере двух наборов сейсмограмм для всех источников с использованием грубой и мелкой вычислительных сеток, что связано со значительными вычислительными затратами. По этой причине использовалась акустическая постановка задачи, позволяющая сократить вычислительное время.

Следует ожидать существования моделей, для которых точность при применении NDM-net может снижаться вследствие сложности модели, наличия низкоскоростных областей, экстремально высоких контрастов или мелкомасштабных неоднородностей, а также изменяться при учете упругости среды. Однако аналогичные эксперименты уже проводились для двумерного случая и продемонстрировали высокую эффективность NDM-net. При этом результаты применения NDM-net для повышения точности конечно-разностного моделирования в двумерной и трехмерной постановках оказываются сходными. Это позволяет предположить аналогичное поведение 3D NDM-net в условиях локальных сложностей модели и при решении упругого волнового уравнения. Кроме того, в случае упругой постановки задачи ожидается существенное ускорение вычислений, что подтверждается оценками вычислительной сложности метода.

Наличие достаточно большой ошибки в результатах работы алгоритма может свидетельствовать уже не о численной дисперсии, а об ограничениях самой нейронной сети. Тем не менее возникающая численная ошибка преимущественно связана с несоответствием амплитуд, вследствие чего полученные данные могут использоваться в процедурах, подобных полноволновой инверсии. Таким образом, предложен новый подход к ускорению сейсмического моделирования и продемонстрирована его применимость к практическим задачам. Дальнейшее развитие и совершенствование данного подхода представляют собой предмет последующих исследований.

6. Выводы. Представлен метод ускорения трехмерного моделирования волновых сейсмических полей. Подход основан на сочетании классических конечно-разностных схем и методов машинного обучения. В частности, предлагается использовать нейронную сеть, а именно NDM-net, для уменьшения численной дисперсии в результатах моделирования. Методика основана на быстром, но недостаточно точном моделировании полного объема сейсмических данных, включающего десятки тысяч наборов сейсмограмм, с использованием достаточно грубой вычислительной сетки. Затем для небольшого числа источников (1–5% от полного набора) вычисляется более точное решение, формирующее обучающий набор данных. После этого NDM-net обучается отображению решения, содержащего численную дисперсию, в более точное решение. Затем NDM-net применяется для коррекции всего набора данных.

Продемонстрирована применимость предложенного подхода для моделирования реального набора данных, состоящего из 10201 источника, для акустической скоростной модели SEG Overthrust. Выполнено сравнение времени моделирования при использовании конечно-разностной схемы на мелкой сетке (0.27 GPU-часа на один источник или 2720 GPU-часов для всего набора данных), на грубой сетке (0.03 GPU-часа на источник или 340 GPU-часов для всего набора данных), а также предложенного подхода (0.046 GPU-часа на источник или 472.4 GPU-часа для всего набора данных). Использование NDM-net требует лишь немногим больше GPU-часов по сравнению с моделированием на грубой сетке и позволяет сократить вычислительное время приблизительно в 6 раз по сравнению с моделированием на мелкой сетке. При этом точность данных, полученных с использованием NDM-net, значительно выше точности решения на грубой

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

сетке. Следует отметить, что данное исследование проводилось для акустической скоростной модели; в случае упругой постановки задачи предложенный подход потенциально способен обеспечить ускорение сейсмического моделирования до 12 раз при обучающей выборке размером 2% от общего количества источников.

Список литературы

1. *Manning T., Ablyazina D., Quigley J.* The nimble node — million-channel land recording systems have arrived // The Leading Edge. 2019. **38**, N 9. 706–714. doi 10.1190/tle38090706.1.
2. *Virieux J., Operto S., Ben-Hadj-Ali H., et al.* Seismic wave modeling for seismic imaging // The Leading Edge. 2009. **28**, N 5. 538–544. doi 10.1190/1.3124928.
3. *Virieux J., Calandra H., Plessix R.-E.* A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging // Geophysical Prospecting. 2011. **59**, N 5. 794–813. doi 10.1111/j.1365-2478.2011.00967.x.
4. *Virieux J.* $P-SV$ wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method // Geophysics. 1986. **51**, N 4. 889–901. doi 10.1190/1.1442147.
5. *Moczo P., Kristek J., Galis M.* The finite-difference modelling of earthquake motions: waves and ruptures. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. doi 10.1017/S0016756814000600.
6. *Saenger E.H., Gold N., Shapiro S.A.* Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid // Wave Motion. 2000. **31**, N 1. 77–92. doi 10.1016/S0165-2125(99)00023-2.
7. *Lisitsa V., Vishnevskiy D.* Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3D anisotropic elasticity // Geophysical Prospecting. 2010. **58**, N 4. 619–635. doi 10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x.
8. *Castillo J.E., Grone R.D.* A matrix analysis approach to higher-order approximations for divergence and gradients satisfying a global conservation law // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2003. **25**, N 1. 128–142. doi 10.1137/S0895479801398025.
9. *De la Puente J., Ferrer M., Hanzich M., et al.* Mimetic seismic wave modeling including topography on deformed staggered grids // Geophysics. 2014. **79**, N 3. T125–T141. doi 10.1190/geo2013-0371.1.
10. *Shragge J., Tapley B.* Solving the tensorial 3D acoustic wave equation: a mimetic finite-difference time-domain approach // Geophysics. 2017. **82**, N 4. T183–T196. doi 10.1190/geo2016-0691.1.
11. *Belousov D., Lisitsa V.* Mimetic finite differences for boundaries misaligned with grid nodes // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2023. **428**. Article Number 115185. doi 10.1016/j.cam.2023.115185.
12. *Dovgilovich L., Sofronov I.* High-accuracy finite-difference schemes for solving elastodynamic problems in curvilinear coordinates within multiblock approach // Applied Numerical Mathematics. 2015. **93**. 176–194. doi 10.1016/j.apnum.2014.06.005.
13. *O'Reilly O., Lundquist T., Dunham E.M., Nordström J.* Energy stable and high-order-accurate finite difference methods on staggered grids // Journal of Computational Physics. 2017. **346**. 572–589. doi 10.1016/j.jcp.2017.06.030.
14. *O'Reilly O., Petersson N.A.* Energy conservative SBP discretizations of the acoustic wave equation in covariant form on staggered curvilinear grids // Journal of Computational Physics. 2020. **411**. Article Number 109386. doi 10.1016/j.jcp.2020.109386.
15. *Dumbser M., Käser M.* An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes — II. The three-dimensional isotropic case // Geophysical Journal International. 2006. **167**, N 1. 319–336. doi 10.1111/j.1365-246X.2006.03120.x.
16. *Käser M., Dumbser M., de la Puente J., Igel H.* An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes —III. Viscoelastic attenuation // Geophysical Journal International. 2007. **168**, N 1. 224–242. doi 10.1111/j.1365-246X.2006.03193.x.
17. *Lisitsa V., Tcheverda V., Botter C.* Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation // Journal of Computational Physics. 2016. **311**. 142–157. doi 10.1016/j.jcp.2016.02.005.
18. *Galis M., Moczo P., Kristek J.* A 3-D hybrid finite-difference—finite-element viscoelastic modelling of seismic wave motion // Geophysical Journal International. 2008. **175**, N 1. 153–184. doi 10.1111/j.1365-246X.2008.03866.x.
19. *Komatitsch D., Vilotte J.-P.* The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures // Bulletin of the Seismological Society of America. 1998. **88**, N 2. 368–392. doi 10.1785/BSSA0880020368.
20. *Xia M., Zhou H., Chen H., et al.* A rectangular-grid lattice spring model for modeling elastic waves in Poisson's solids // Geophysics. 2018. **83**, N 2. T69–T86. doi 10.1190/geo2016-0414.1.
21. *Soysal B.F., Arici Y.* The use of discrete element models for the seismic assessment of concrete gravity dams // Structures. 2024. **70**. Article Number 107831. doi 10.1016/j.istruc.2024.107831.

22. *Wang R., Li S., Liu Y., et al.* Peridynamics-based large-deformation simulations for near-fault landslides considering soil uncertainty // Computers and Geotechnics. 2024. **168**. Article Number 106128. doi 10.1016/j.compgeo.2024.106128.
23. *Hoang T.N., Nguyen T.T., Nguyen T.V., et al.* SPH simulation of earthquake-induced liquefaction and large deformation behaviour of granular materials using SANISAND constitutive model // Computers and Geotechnics. 2024. **174**. Article Number 106617. doi 10.1016/j.compgeo.2024.106617.
24. *Jiang C., Zhou H., Xia M., et al.* Stability conditions of multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for seismic wavefield modeling // Journal of Applied Geophysics. 2022. **204**. Article Number 104742. doi 10.1016/j.jappgeo.2022.104742.
25. *Ainsworth M.* Discrete dispersion relation for *hp*-version finite element approximation at high wave number // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2004. **42**, N 2. 553–575. doi 10.1137/S0036142903423460.
26. *Ainsworth M., Monk P., Muniz W.* Dispersive and dissipative properties of discontinuous Galerkin finite element methods for the second-order wave equation // Journal of Scientific Computing. 2006. **27**, N 1. 5–40. doi 10.1007/s10915-005-9044-x.
27. *Ainsworth M.* Dispersive and dissipative behaviour of high order discontinuous Galerkin finite element methods // Journal of Computational Physics. 2004. **198**, N 1. 106–130. doi 10.1016/j.jcp.2004.01.004.
28. *Lisitsa V.* Dispersion analysis of discontinuous Galerkin method on triangular mesh for elastic wave equation // Applied Mathematical Modelling. 2016. **40**, N 7–8. 5077–5095. doi 10.1016/j.apm.2015.12.039.
29. *Stoyanovskaya O.P., Lisitsa V.V., Anoshin S.A., et al.* Dispersion analysis of SPH as a way to understand its order of approximation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. **438**. Article Number 115495. doi 10.1016/j.cam.2023.115495.
30. *Ainsworth M., Wajid H.A.* Dispersive and dissipative behavior of the spectral element method // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2009. **47**, N 5. 3910–3937. doi 10.1137/080724976.
31. *Anderson J.E., Brytik V., Ayeni G.* Numerical temporal dispersion corrections for broadband temporal simulation, RTM and FWI // SEG International Exposition and Annual Meeting, New Orleans, Louisiana, October 18–23, 2015. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2015. pp. 1096–1100. doi 10.1190/segam2015-5817144.1.
32. *Mittet R.* Second-order time integration of the wave equation with dispersion correction procedures // Geophysics. 2019. **84**, N 4. T221–T235. doi 10.1190/geo2018-0770.1.
33. *Koene E.F.M., Robertsson J.O.A., Broggini F., Andersson F.* Eliminating time dispersion from seismic wave modeling // Geophysical Journal International. 2018. **213**, N 1. 169–180. doi 10.1093/gji/ggx563.
34. *Mulder W.A.* Temporal dispersion correction for wave-propagation modelling with a series approach // Geophysical Prospecting. 2024. **72**, N 2. 301–314. doi 10.1111/1365-2478.13411.
35. *Kaur H., Fomel S., Pham N.* Seismic ground-roll noise attenuation using deep learning // Geophysical Prospecting. 2020. **68**, N 7. 2064–2077. doi 10.1111/1365-2478.12985.
36. *Yu S., Ma J., Wang W.* Deep learning for denoising // Geophysics. 2019. **84**, N 6. V333–V350. doi 10.1190/geo2018-0668.1.
37. *Yang F., Ma J.* Deep-learning inversion: a next-generation seismic velocity model building method // Geophysics. 2019. **84**, N 4. R583–R599. doi 10.1190/geo2018-0249.1.
38. *Zhu W., Sheng Y., Sun Y.* Wave-dynamics simulation using deep neural networks. Tech. rep. Stanford University, 2017. doi 10.13140/RG.2.2.21994.77764.
39. *Xiang Y., Wang Z., Song Z., et al.* SeismicTransformer: an attention-based deep learning method for the simulation of seismic wavefields // Computers & Geosciences. 2024. **190**. Article Number 105629. doi 10.1016/j.cageo.2024.105629.
40. *Gadylshin K., Vishnevsky D., Gadylshina K., Lisitsa V.* Numerical dispersion mitigation neural network for seismic modeling // Geophysics. 2022. **87**, N 3. T237–T249. doi 10.1190/geo2021-0242.1.
41. *Gadylshin K., Gondyul E., Lisitsa V., et al.* Mitigation of numerical dispersion in seismic data in spectral domain with neural networks // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2024. **187**. Article Number 109028. doi 10.1016/j.soildyn.2024.109028.
42. *Collino F., Tsogka C.* Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media // Geophysics. 2001. **66**, N 1. 294–307. doi 10.1190/1.1444908.
43. *Komatitsch D., Martin R.* An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation // Geophysics. 2007. **72**, N 5. SM155–SM167. doi 10.1190/1.2757586.
44. *Lisitsa V.* Optimal discretization of PML for elasticity problems // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2008. **30**. 258–277. https://ftp.gwdg.de/pub/misc/EMIS/journals/ETNA/vol.30.2008/pp258-277.dir/pp258-277.pdf. Cited October 24, 2026.
45. *Levander A.R.* Fourth-order finite-difference $P-SV$ seismograms // Geophysics. 1988. **53**, N 11. 1425–1436. doi 10.1190/1.1442422.

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

46. *Cohen G.* Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en régime transitoire. INRIA, 1994.
47. *Moczo P., Kristek J., Galis M., et al.* 3-D finite-difference, finite-element, discontinuous-Galerkin and spectral-element schemes analysed for their accuracy with respect to P-wave to S-wave speed ratio // Geophysical Journal International. 2011. **187**, N 3. 1645–1667. doi 10.1111/j.1365-246X.2011.05221.x.
48. *Kostin V., Lisitsa V., Reshetova G., Tcheverda V.* Local time-space mesh refinement for simulation of elastic wave propagation in multi-scale media // Journal of Computational Physics. 2015. **281**. 669–689. doi 10.1016/j.jcp.2014.10.047.
49. *Gadylshin K., Lisitsa V., Vishnevsky D., Gadylshina K.* Hausdorff-distance-based training dataset construction for numerical dispersion mitigation neural network // Computers & Geosciences. 2023. **180**. Article Number 105438. doi 10.1016/j.cageo.2023.105438.
50. *Гондюл Е.А., Дубровина В.А., Лисица В.В., Вишневский Д.М.* Нейросетевое сейсмическое моделирование – применимость модельных данных для глубинной миграции // Геофизика. 2026. № 2. 17–22. doi 10.34926/geo.2026.37.16.003.
51. *Gondyul E., Lisitsa V., Gadylshin K., Vishnevsky D.* Numerical dispersion mitigation neural network with velocity model correction // Computers & Geosciences. 2025. **196**. Article Number 105806. doi 10.1016/j.cageo.2024.105806.

Получена *2 июня 2026 г.*
Принята *4 сентября 2026 г.*
Опубликована *13 ноября 2026 г.*

Информация об авторах

Елена Александровна Гондюл — мл. науч. сотр.; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Дмитрий Михайлович Вишневский — к.ф.-м.н., науч. сотр.; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Кирилл Геннадьевич Гадыльшин — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Вадим Викторович Лисица — д.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр-кт Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. T. Manning, D. Ablyazina, and J. Quigley, "The nimble node — Million-channel land recording systems have arrived," The Leading Edge **38** (9), 706–714 (2019). doi 10.1190/tle38090706.1.
2. J. Virieux, S. Operto, H. Ben-Hadj-Ali, et al., "Seismic wave modeling for seismic imaging," The Leading Edge **28** (5), 538–544 (2009). doi 10.1190/1.3124928.
3. J. Virieux, H. Calandra, and R.-E. Plessix, "A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging," Geophysical Prospecting **59** (5), 794–813 (2011). doi 10.1111/j.1365-2478.2011.00967.x.
4. J. Virieux, "$P-SV$ wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method," Geophysics **51** (4), 889–901 (1986). doi 10.1190/1.1442147.
5. P. Moczo, J. Kristek, and M. Galis, *The Finite-Difference Modelling of Earthquake Motions: Waves and Ruptures (Cambridge University Press, Cambridge, 2014). doi 10.1017/S0016756814000600.*
6. E. H. Saenger, N. Gold, and S. A. Shapiro, "Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid," Wave Motion **31** (1), 77–92 (2000). doi 10.1016/S0165-2125(99)00023-2.
7. V. Lisitsa and D. Vishnevskiy, "Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3D anisotropic elasticity," Geophysical Prospecting **58** (4), 619–635 (2010). doi 10.1111/j.1365-2478.2009.00862.x.
8. J. E. Castillo and R. D. Grone, "A Matrix Analysis Approach to Higher-Order Approximations for Divergence and Gradients Satisfying a Global Conservation Law," SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **25** (1), 128–142 (2003). doi 10.1137/S0895479801398025.

9. J. de la Puente, M. Ferrer, M. Hanzich, et al., "Mimetic seismic wave modeling including topography on deformed staggered grids," Geophysics **79** (3), T125–T141 (2014). doi 10.1190/geo2013-0371.1.
10. J. Shragge and B. Tapley, "Solving the tensorial 3D acoustic wave equation: A mimetic finite-difference time-domain approach," Geophysics **82** (4), T183–T196 (2017). doi 10.1190/geo2016-0691.1.
11. D. Belousov and V. Lisitsa, "Mimetic finite differences for boundaries misaligned with grid nodes," Journal of Computational and Applied Mathematics **428**, Article Number 115185 (2023). doi 10.1016/j.cam.2023.115185.
12. L. Dovgilovich and I. Sofronov, "High-accuracy finite-difference schemes for solving elastodynamic problems in curvilinear coordinates within multiblock approach," Applied Numerical Mathematics **93**, 176–194 (2015). doi 10.1016/j.apnum.2014.06.005.
13. O. O'Reilly, T. Lundquist, E. M. Dunham, and J. Nordström, "Energy stable and high-order-accurate finite difference methods on staggered grids," Journal of Computational Physics **346**, 572–589 (2017). doi 10.1016/j.jcp.2017.06.030.
14. O. O'Reilly and N. A. Petersson, "Energy conservative SBP discretizations of the acoustic wave equation in covariant form on staggered curvilinear grids," Journal of Computational Physics **411**, Article Number 109386 (2020). doi 10.1016/j.jcp.2020.109386.
15. M. Dumbser and M. Käser, "An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes — II. The three-dimensional isotropic case," Geophysical Journal International **167** (1), 319–336 (2006). doi 10.1111/j.1365-246X.2006.03120.x.
16. M. Käser, M. Dumbser, J. de la Puente, and H. Igel, "An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes — III. Viscoelastic attenuation," Geophysical Journal International **168** (1), 224–242 (2007). doi 10.1111/j.1365-246X.2006.03193.x.
17. V. Lisitsa, V. Tcheverda, and C. Botter, "Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation," Journal of Computational Physics **311**, 142–157 (2016). doi 10.1016/j.jcp.2016.02.005.
18. M. Galis, P. Moczo, and J. Kristek, "A 3-D hybrid finite-difference—finite-element viscoelastic modelling of seismic wave motion," Geophysical Journal International **175** (1), 153–184 (2008). doi 10.1111/j.1365-246X.2008.03866.x.
19. D. Komatitsch and J.-P. Vilotte, "The Spectral Element Method: An Efficient Tool to Simulate the Seismic Response of 2D and 3D Geological Structures," Bulletin of the Seismological Society of America **88** (2), 368–392 (1998). doi 10.1785/BSSA0880020368.
20. M. Xia, H. Zhou, H. Chen, et al., "A rectangular-grid lattice spring model for modeling elastic waves in Poisson's solids," Geophysics **83** (2), T69–T86 (2018). doi 10.1190/geo2016-0414.1.
21. B. F. Soysal and Y. Arici, "The use of discrete element models for the seismic assessment of concrete gravity dams," Structures **70**, Article Number 107831 (2024). doi 10.1016/j.istruc.2024.107831.
22. R. Wang, S. Li, Y. Liu, et al., "Peridynamics-based large-deformation simulations for near-fault landslides considering soil uncertainty," Computers and Geotechnics **168**, Article Number 106128 (2024). doi 10.1016/j.compgeo.2024.106128.
23. T. N. Hoang, T. T. Nguyen, T. V. Nguyen, et al., "SPH simulation of earthquake-induced liquefaction and large deformation behaviour of granular materials using SANISAND constitutive model," Computers and Geotechnics **174**, Article Number 106617 (2024). doi 10.1016/j.compgeo.2024.106617.
24. C. Jiang, H. Zhou, M. Xia, et al., "Stability conditions of multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for seismic wavefield modeling," Journal of Applied Geophysics **204**, Article Number 104742 (2022). doi 10.1016/j.jappgeo.2022.104742.
25. M. Ainsworth, "Discrete Dispersion Relation for *hp*-Version Finite Element Approximation at High Wave Number," SIAM Journal on Numerical Analysis **42** (2), 553–575 (2004). doi 10.1137/S0036142903423460.
26. M. Ainsworth, P. Monk, and W. Muniz, "Dispersive and Dissipative Properties of Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for the Second-Order Wave Equation," Journal of Scientific Computing **27** (1), 5–40 (2006). doi 10.1007/s10915-005-9044-x.
27. M. Ainsworth, "Dispersive and dissipative behaviour of high order discontinuous Galerkin finite element methods," Journal of Computational Physics **198** (1), 106–130 (2004). doi 10.1016/j.jcp.2004.01.004.
28. V. Lisitsa, "Dispersion analysis of discontinuous Galerkin method on triangular mesh for elastic wave equation," Applied Mathematical Modelling **40** (7–8), 5077–5095 (2016). doi 10.1016/j.apm.2015.12.039.
29. O. P. Stoyanovskaya, V. V. Lisitsa, S. A. Anoshin, et al., "Dispersion analysis of SPH as a way to understand its order of approximation," Journal of Computational and Applied Mathematics **438**, Article Number 115495 (2024). doi 10.1016/j.cam.2023.115495.
30. M. Ainsworth and H. A. Wajid, "Dispersive and Dissipative Behavior of the Spectral Element Method," SIAM Journal on Numerical Analysis **47** (5), 3910–3937 (2009). doi 10.1137/080724976.

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

31. J. E. Anderson, V. Brytik, and G. Ayeni, "Numerical Temporal Dispersion Corrections for Broadband Temporal Simulation, RTM and FWI," in *SEG International Exposition and Annual Meeting, New Orleans, Louisiana, October 18–23, 2015* (SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2015), pp. 1096–1100. doi 10.1190/segam2015-5817144.1.
32. R. Mittet, "Second-order time integration of the wave equation with dispersion correction procedures," Geophysics **84** (4), T221–T235 (2019). doi 10.1190/geo2018-0770.1.
33. E. F. M. Koene, J. O. A. Robertsson, F. Broggini, and F. Andersson, "Eliminating time dispersion from seismic wave modeling," Geophysical Journal International **213** (1), 169–180 (2018). doi 10.1093/gji/ggx563.
34. W. A. Mulder, "Temporal dispersion correction for wave-propagation modelling with a series approach," Geophysical Prospecting **72** (2), 301–314 (2024). doi 10.1111/1365-2478.13411.
35. H. Kaur, S. Fomel, and N. Pham, "Seismic ground-roll noise attenuation using deep learning," Geophysical Prospecting **68** (7), 2064–2077 (2020). doi 10.1111/1365-2478.12985.
36. S. Yu, J. Ma, and W. Wang, "Deep learning for denoising," Geophysics **84** (6), V333–V350 (2019). doi 10.1190/geo2018-0668.1.
37. F. Yang and J. Ma, "Deep-learning inversion: A next-generation seismic velocity model building method," Geophysics **84** (4), R583–R599 (2019). doi 10.1190/geo2018-0249.1.
38. W. Zhu, Y. Sheng, and Y. Sun, *Wave-dynamics simulation using deep neural networks. Tech. rep.* (Stanford University, 2017). doi 10.13140/RG.2.2.21994.77764.
39. Y. Xiang, Z. Wang, Z. Song, et al., "SeismicTransformer: An attention-based deep learning method for the simulation of seismic wavefields," Computers & Geosciences **190**, Article Number 105629 (2024). doi 10.1016/j.cageo.2024.105629.
40. K. Gadylshin, D. Vishnevsky, K. Gadylshina, and V. Lisitsa, "Numerical dispersion mitigation neural network for seismic modeling," Geophysics **87** (3), T237–T249 (2022). doi 10.1190/geo2021-0242.1.
41. K. Gadylshin, E. Gondyul, V. Lisitsa, et al., "Mitigation of numerical dispersion in seismic data in spectral domain with neural networks," Soil Dynamics and Earthquake Engineering **187**, Article Number 109028 (2024). doi 10.1016/j.soildyn.2024.109028.
42. F. Collino and C. Tsogka, "Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media," Geophysics **66** (1), 294–307 (2001). doi 10.1190/1.1444908.
43. D. Komatitsch and R. Martin, "An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation," Geophysics **72** (5), SM155–SM167 (2007). doi 10.1190/1.2757586.
44. V. Lisitsa, "Optimal Discretization of PML for Elasticity Problems," Electronic Transactions on Numerical Analysis **30**, 258–277 (2008). https://ftp.gwdg.de/pub/misc/EMIS/journals/ETNA/vol.30.2008/pp258-277.dir/pp258-277.pdf. Cited October 24, 2026.
45. A. R. Levander, "Fourth-order finite-difference $P-SV$ seismograms," Geophysics **53** (11), 1425–1436 (1988). doi 10.1190/1.1442422.
46. G. Cohen, *Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en régime transitoire* (INRIA, 1994).
47. P. Moczo, J. Kristek, M. Galis, et al., "3-D finite-difference, finite-element, discontinuous-Galerkin and spectral-element schemes analysed for their accuracy with respect to P-wave to S-wave speed ratio," Geophysical Journal International **187** (3), 1645–1667 (2011). doi 10.1111/j.1365-246X.2011.05221.x.
48. V. Kostin, V. Lisitsa, G. Reshetova, and V. Tcheverda, "Local time-space mesh refinement for simulation of elastic wave propagation in multi-scale media," Journal of Computational Physics **281**, 669–689 (2015). doi 10.1016/j.jcp.2014.10.047.
49. K. Gadylshin, V. Lisitsa, D. Vishnevsky, and K. Gadylshina, "Hausdorff-distance-based training dataset construction for numerical dispersion mitigation neural network," Computers & Geosciences **180**, Article Number 105438 (2023). doi 10.1016/j.cageo.2023.105438.
50. E. A. Gondyul, V. A. Dubrovina, V. V. Lisitsa, and D. M. Vishnevsky, "Neural seismic modeling – using of modeling data for migration," Geophysics No 2, 17–22 (2026). doi 10.34926/geo.2026.37.16.003.
51. E. Gondyul, V. Lisitsa, K. Gadylshin, and D. Vishnevsky, "Numerical dispersion mitigation neural network with velocity model correction," Computers & Geosciences **196**, Article Number 105806 (2025). doi 10.1016/j.cageo.2024.105806.

Received *June 2, 2026* | *Accepted* *September 4, 2026* | *Published* *November 13, 2026*

Information about the authors

Elena A. Gondyul — Junior Researcher; Sobolev institute of mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.

2026, **27** (4), 705–722. doi 10.26089/NumMet.v27r443

Dmitry G. Vishnevsky — Ph.D., Research Scientist; Sobolev institute of mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.

Kirill G. Gadylshin — Ph.D., Senior Researcher; Sobolev institute of mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.

Vadim V. Lisitsa — Dr. Sci., Head of Laboratory; Sobolev institute of mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.