2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

doi 10.26089/NumMet.v27r442

УДК 517.968;
519.642.3

Параллельная программная реализация алгоритма выделения тоннелей методом TRM с использованием технологии Coarray Fortran

А. А. Галактионова
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-5450-4293, e-mail: galakt95@mail.ru

Г. В. Решетова
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-2653-3166, e-mail: kgv@nmsf.sscc.ru

Аннотация: Метод зеркального обращения времени (Time Reversal Mirror, TRM) показал свою эффективность при восстановлении различных объектов, включая источники землетрясений и мелкомасштабные неоднородности. Однако лежащий в основе физический принцип указывает на возможность его применения к более широкому кругу практических задач. Целью данного исследования является разработка алгоритма на основе TRM для восстановления положения антропогенных объектов, таких, например, как тоннели. Алгоритм разработан с использованием метода TRM, конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках и идеально согласованных поглощающих слоев (PML) для ограничения расчетной области. Для параллельной программной реализации алгоритма используется метод декомпозиции расчетной области и технология Coarray Fortran для обмена данными между процессами. Численные эксперименты демонстрируют успешное восстановление положения тоннеля с помощью предложенного TRM-алгоритма в трехмерном случае.

Ключевые слова: сейсмические волны, численное моделирование, положение тоннеля, метод зеркального обращения времени, Coarray Fortran, параллелизация.

Благодарности: Исследования выполнены в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН FWNM-2025-0004 с использованием оборудования Сибирского суперкомпьютерного центра [1].

Для цитирования: Галактионова А.А., Решетова Г.В. Параллельная программная реализация алгоритма выделения тоннелей методом TRM с использованием технологии Coarray Fortran // Вычислительные методы и программирование. 2026. **27**, № 4. 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442.

© А. А. Галактионова, Г. В. Решетова

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

Parallel implementation of the TRM tunnel-detection algorithm using Coarray Fortran

Anastasia A. Galaktionova
Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0002-5450-4293, e-mail: galakt95@mail.ru

Galina V. Reshetova
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0003-2653-3166, e-mail: kgv@nmsf.sscc.ru

Abstract: The Time Reversal Mirror (TRM) method has demonstrated its effectiveness in reconstructing various objects, including earthquake sources and small-scale inhomogeneities. However, the underlying physical principle suggests its applicability to a wider range of practical problems. The aim of this study is to develop a TRM-based algorithm for reconstructing the position of anthropogenic objects, such as tunnels. The algorithm was developed using the TRM method, a finite-difference scheme on staggered grids, and perfectly matched absorbing layers (PML) to truncate the computational domain. For the parallel software implementation, the computational-domain decomposition method and Coarray Fortran technology are used for data exchange between processes. Numerical experiments demonstrate the successful reconstruction of tunnel position using the proposed 3D TRM algorithm.

Keywords: seismic waves, numerical modeling, tunnel position, time reversal mirror, Coarray Fortran, parallelization.

Acknowledgements: The research was conducted within the framework of the state assignment of the Institute of Computer Science and Technology of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences FWNM-2025-0004 using equipment from the Siberian Supercomputing Center [1].

For citation: A. A. Galaktionova, G. V. Reshetova, "Parallel implementation of the TRM tunnel-detection algorithm using Coarray Fortran," Numerical Methods and Programming. **27** (4), 690–704 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r442.

---

1. Введение. Обнаружение тоннелей и других подземных пустот, в том числе заброшенных горных выработок, представляет собой сложную и важную задачу [2–4]. Выявление таких пустот имеет ключевое значение для безопасного геотехнического проектирования в горнодобывающей промышленности [5]. Поскольку эти образования невидимы с поверхности, традиционные подходы чаще всего сводятся к дорогостоящему и трудоемкому бурению скважин [4]. В связи с этим неразрушающие методы обнаружения тоннелей на основе обработки информации поверхностных сейсмических волн становятся все более востребованными.

Существующие неразрушающие методы можно разбить на несколько категорий. Методы обнаружения тоннелей на основе затухания поверхностных волн [4] эффективны благодаря использованию поверхностных волн большой амплитуды, нечувствительны к неоднородностям поверхностного слоя из-за работы на низких частотах, однако они характеризуются низкой разрешающей способностью и сложностями в определении глубины залегания объектов. Метод георадарного обнаружения тоннелей с поверхности [6] обладает высокой точностью за счет выявления сильных диэлектрических контрастов между пустотой тоннеля и окружающим грунтом. Однако он имеет существенные ограничения: чувствительность к неоднородностям грунта и помехам, необходимость больших объемов данных для обработки, а также сложность интерпретации результатов при наличии посторонних объектов в зоне исследования.

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

Метод анализа обратного рассеяния поверхностных волн (BASW) [7] позволяет эффективно обнаруживать подземные тоннели благодаря повышенной чувствительности к аномалиям и возможности точного определения их местоположения за счет корреляции фундаментальных и высших мод дисперсии, однако метод труднореализуем в условиях сложного геологического строения реальных сред.

Такие методы заметно дешевле, однако их внедрение требует полноразмерного численного моделирования реалистичных трехмерных моделей и учета больших объемов данных, поступающих от современных систем наблюдения. Все это приводит к росту вычислительных требований. Разработка новых эффективных алгоритмов, ориентированных на параллельные вычисления, с учетом этих условий приобретает особую актуальность.

Метод зеркального обращения времени (Time Reversal Mirror, TRM) находит широкое применение в геофизике: для контроля целостности материалов в промышленности, моделирования виртуальных источников и в ряде других задач [8, 9]. Метод основан на физическом принципе взаимности [10], который не нарушается ни дисперсией скоростей, ни множественным рассеянием, ни анизотропией. Благодаря этому TRM считается надежным инструментом для обнаружения и характеристики подземных объектов [11].

Использование TRM для обнаружения мелкомасштабных неоднородностей уже рассмотрено в ряде работ [12, 13]. Однако вопрос о применимости этого метода для выявления крупномасштабных объектов остается актуальным.

В нашем исследовании метод TRM был использован для разработки алгоритма восстановления положения тоннеля. Численная версия алгоритма разработана как в двумерной, так и в трехмерной постановке, поскольку метод TRM легко обобщается на трехмерный случай. Параллельная реализация алгоритма выполнена с использованием технологии Coarray Fortran.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлена математическая постановка задачи динамической теории упругости, лежащая в основе алгоритма. Раздел 3 описывает численный метод решения — конечно-разностную схему на сдвинутых сетках. В разделе 4 излагается двухэтапный алгоритм восстановления положения тоннеля на основе метода TRM. Раздел 5 содержит результаты численных экспериментов на двумерных и трехмерных моделях. В разделе 6 рассматривается параллельная реализация алгоритма с использованием технологии Coarray Fortran, включая декомпозицию расчетной области и обмен данными между процессами, а также приводятся результаты оценки масштабируемости. В заключении суммируются основные результаты работы и обсуждаются перспективы дальнейших исследований.

2. Математическая постановка задачи. Алгоритм определения положения тоннеля на основе метода TRM выполняется в два этапа.

На первом этапе моделируется распространение волн в упругих 2D и 3D средах для получения синтетических сейсмограмм от сейсмического точечного источника, необходимых для проверки алгоритма на известной модели. На втором этапе полученные синтетические сейсмограммы используются непосредственно как входные данные для алгоритма на основе метода TRM. Сейсмограммы, записанные в серии приемников на первом этапе, обращаются по времени и используются в качестве новых функций источников на этапе обращения метода TRM для определения положения тоннеля. Математически в обоих случаях решается задача динамической теории упругости в неограниченном полупространстве, но с разными правыми частями. Модель, описывающая распространение волнового поля в неоднородной среде, записывается в виде системы уравнений динамической теории упругости в скоростях-напряжениях [14]:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + R^* \boldsymbol{\tau} = 0, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = K \cdot (R\boldsymbol{v}) + \mathcal{F}, \end{cases} \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{\tau}|_{t=0} = 0, \qquad \tau_{zz}|_{z=0} = \tau_{xz}|_{z=0} = \tau_{yz}|_{z=0} = 0. \tag{2}$$

Распространение волн в двумерных и трехмерных средах описывается системой уравнений (1), (2), при этом операторы и переменные задаются по-разному в зависимости от размерности. Вектор-столбец $\boldsymbol{v}$ представляет собой вектор скоростей смещения и определяется как $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ в трехмерном случае или как $\boldsymbol{v} = (v_x, v_z)^T$ в двумерном случае. Тензор напряжений задается как $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})^T$

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

или как $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})^T$ соответственно. Дифференциальный оператор R в трехмерном случае определяется как

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_x & 0 & 0 & \nabla_y & \nabla_z & 0 \\ 0 & \nabla_y & 0 & \nabla_x & 0 & \nabla_z \\ 0 & 0 & \nabla_z & 0 & \nabla_x & \nabla_y \end{pmatrix}^T,$$

где ∇_p — операция дифференцирования по переменной $p = x, y, z$, а оператор $R^* = -R^T$ — сопряженный к оператору R. В двумерном случае

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_x & 0 & \nabla_z \\ 0 & \nabla_z & \nabla_x \end{pmatrix}^T.$$

В рассматриваемой системе K — симметричная матрица констант, определяемая модулями упругости Ламе λ, μ, которые вместе с плотностью ρ задают среду. Среда может быть также представлена в терминах скоростей продольных v_p и поперечных v_s волн ($\lambda = \rho(v_\text{p}^2 - 2v_\text{s}^2)$, $\mu = \rho v_\text{s}^2$). Если среда однородная, то их значения в каждой точке пространства одинаковы, неоднородности и включения задаются конкретными значениями параметров. Матрица K выражается следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}^T \quad \text{или} \quad K = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}^T.$$

В правой части системы (1) — вектор-функция источника $\mathcal{F} = (\mathcal{F}xx, \mathcal{F}yy, \mathcal{F}zz, \mathcal{F}xy, \mathcal{F}xz, \mathcal{F}yz)^T$. На этапе моделирования синтетических сейсмограмм задается источник типа центра расширения, т.е. $\mathcal{F}xx = \mathcal{F}yy = \mathcal{F}zz = f(t) \cdot \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\mathcal{F}xy = \mathcal{F}xz = \mathcal{F}yz = 0$, где $\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ — дельта-функция Дирака в точке источника (x_0, y_0, z_0), а $f(t)$ — форма импульса в источнике. Для моделирования синтетических сейсмотрасс в серии приемников в каждый момент времени записываются компоненты тензора напряжений. На этапе обращения записанные и обращенные во времени синтетические сейсмотрассы используются в качестве функций источников.

3. Численное моделирование. Численное решение системы дифференциальных уравнений находится с помощью явной конечно-разностной схемы второго порядка точности как по пространству, так и по времени. В этой схеме некоторые переменные смещены на полшага относительно других, поэтому все уравнения системы аппроксимируются центральными разностями второго порядка, что обеспечивает бóльшую точность при меньших вычислительных затратах. Кроме того, для данной конечно-разностной схемы уже разработаны эффективные поглощающие граничные условия, необходимые для численных экспериментов.

Так, вводятся целые узлы $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$, $z_k = k\Delta z$, $t^n = n\Delta t$, где $i = \overline{0, n_x}$, $j = \overline{0, n_y}$, $k = \overline{0, n_z}$, $n = \overline{0, n_t}$, и полуцелые узлы $x_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta x$, $y_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta y$, $z_{k+1/2} = (k + 1/2)\Delta z$, $t^{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$, где Δx, Δy, Δz и Δt обозначают шаги сетки по пространственным и временны́м переменным.

Параметры среды и компоненты волнового поля заданы в разных пространственных и временны́х узлах сетки. В каждой ячейке сетки $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}]$ параметры среды считаются постоянными, при этом возможны разрывы на границах ячеек. Компоненты скорости смещения $(v_x)^{n-1/2}_{i+1/2,j,k}$, $(v_y)^{n-1/2}_{i,j+1/2,k}$, $(v_z)^{n-1/2}_{i,j,k+1/2}$ определены в полуцелых узлах. Некоторые компоненты тензора напряжений заданы в целых узлах $(\tau_{xx/yy/zz})^n_{i,j,k}$, а другие — в полуцелых узлах $(\tau_{yz})^n_{i,j+1/2,k+1/2}$, $(\tau_{xz})^n_{i+1/2,j,k+1/2}$ и $(\tau_{xy})^n_{i+1/2,j+1/2,k}$.

Пространственное расположение компонент на сдвинутой сетке схематически показано на рис. 1. Для компактности для дискретной функции $f^n_{i,j,k} = f(x_i, y_j, z_k, t^n)$ вводятся операторы центральных разностей:

$$D_t[f]^n_{i,j,k} = \frac{f^{n+1/2}_{i,j,k} - f^{n-1/2}_{i,j,k}}{\Delta t}, \qquad D_p[f]^n_{i_x,i_y,i_z} = \frac{f^n_{i_p+1/2} - f^n_{i_p-1/2}}{\Delta p}, \qquad p = x, y, z.$$

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

В этих обозначениях конечно-разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений (1), записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
D_t[v_x]^n_{i+1/2,j,k} &= \left[\frac{1}{\rho_0}\big(D_x[\tau_{xx}] + D_y[\tau_{xy}] + D_z[\tau_{xz}]\big)\right]^n_{i+1/2,j,k},\\
D_t[v_y]^n_{i,j+1/2,k} &= \left[\frac{1}{\rho_0}\big(D_x[\tau_{xy}] + D_y[\tau_{yy}] + D_z[\tau_{yz}]\big)\right]^n_{i,j+1/2,k},\\
D_t[v_z]^n_{i,j,k+1/2} &= \left[\frac{1}{\rho_0}\big(D_x[\tau_{xz}] + D_y[\tau_{yz}] + D_z[\tau_{zz}]\big)\right]^n_{i,j,k+1/2},\\
D_t[\tau_{xx}]^{n+1/2}_{i,j,k} &= \Big[(\lambda+2\mu)D_x[v_x] + \lambda\big(D_y[v_y] + D_z[v_z]\big) + \mathcal{F}_{xx}\Big]^{n+1/2}_{i,j,k},\\
D_t[\tau_{yy}]^{n+1/2}_{i,j,k} &= \Big[(\lambda+2\mu)D_y[v_y] + \lambda\big(D_x[v_x] + D_z[v_z]\big) + \mathcal{F}_{yy}\Big]^{n+1/2}_{i,j,k},\\
D_t[\tau_{zz}]^{n+1/2}_{i,j,k} &= \Big[(\lambda+2\mu)D_z[v_z] + \lambda\big(D_x[v_x] + D_y[v_y]\big) + \mathcal{F}_{zz}\Big]^{n+1/2}_{i,j,k},\\
D_t[\tau_{xy}]^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k} &= \Big[\mu\big(D_y[v_x] + D_x[v_y]\big) + \mathcal{F}_{xy}\Big]^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k},\\
D_t[\tau_{xz}]^{n+1/2}_{i+1/2,j,k+1/2} &= \Big[\mu\big(D_z[v_x] + D_x[v_z]\big) + \mathcal{F}_{xz}\Big]^{n+1/2}_{i+1/2,j,k+1/2},\\
D_t[\tau_{yz}]^{n+1/2}_{i,j+1/2,k+1/2} &= \Big[\mu\big(D_z[v_y] + D_y[v_z]\big) + \mathcal{F}_{yz}\Big]^{n+1/2}_{i,j+1/2,k+1/2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Граничные и начальные условия (2) аппроксимируются стандартным образом для конечно-разностных схем на сдвинутых сетках [15] и вместе с (3) формируют корректную численную постановку задачи.

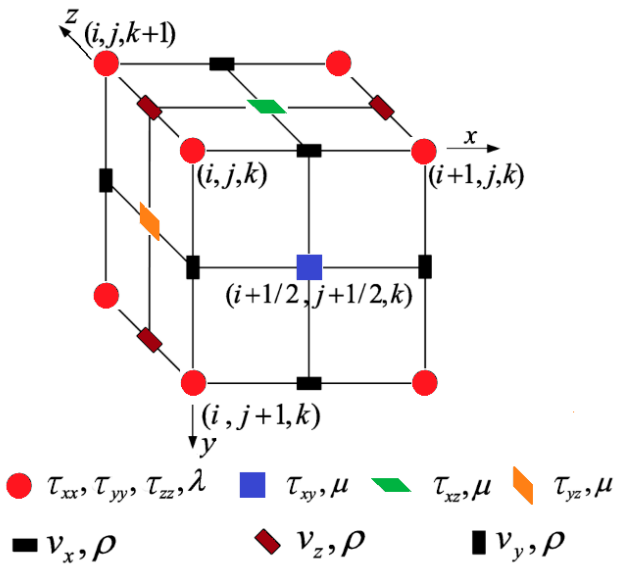


Рис. 1. Шаблон конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках для численного решения системы (1)

Fig. 1. Template of a finite difference scheme on staggered grids for the numerical solution of the system (1)

При численном моделировании предполагается, что синтетические сейсмограммы записываются в бесконечном полупространстве. Однако в реальности такой численный эксперимент провести невозможно, поэтому вычислительная область принудительно ограничивается. Это ограничение в численной модели выражается искусственными боковыми границами, которые вызывают нефизичные отражения и тем самым искажают решение. Для подавления этих искусственных отражений используется классическая методика добавления идеально согласованного поглощающего слоя на основе свертки (CPML) [16]. В этом слое исходные уравнения заменяются модифицированными уравнениями так, чтобы волны, проходящие через слой, затухали и не отражались от искусственных границ.

4. Описание алгоритма. Разработанный алгоритм определения положения тоннеля в упругой среде состоит из двух этапов. На первом этапе моделируются синтетические сейсмограммы, регистрируемые на свободной поверхности, с помощью решения системы (1), (2) для модели однородной среды, внутри которой располагается тоннель. При прохождении волны через границы тоннеля на них возникает поле рассеянных или преломленных

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

волн, которое считается запуском "вторичного" источника. Важно отметить, что это явление возникает при нарушении однородности среды. Время запуска этих источников определяется временем прихода волны, прошедшей в однородной среде от источника до границы тоннеля. Для формирования синтетических сейсмограмм нормальные компоненты тензора напряжений записываются в точках, соответствующих системе наблюдения.

На втором этапе считается, что местоположение тоннеля неизвестно, а среда полагается однородной. Входными данными служат сейсмотрассы, зарегистрированные в приемниках с заданными координатами. В соответствии с принципом обратимости эти сейсмотрассы переворачиваются по времени и помещаются в качестве функций источника в те же точки, где они были записаны. В результате, в соответствии с физическим принципом обратимости, в момент, соответствующий запуску источника, волновое поле концентрируется в нем, что приводит к увеличению амплитуды в этот момент в точке вторичного источника. Хотя границы тоннеля выступают в роли таких источников, момент их запуска неизвестен. Чтобы не отслеживать время этого фокусирования, применяется альтернативный подход — вычисляется сумма полной энергии E_{sum} по всем ранее рассчитанным моментам времени t^m:

$$E_{\text{sum}}(x_i, y_j, z_k, t^m) = \sum_{t^l \leqslant t^m} E\big(x_i, y_j, z_k, t^l\big). \tag{4}$$

В (4) значение энергии в каждый момент времени t^l вычисляется по формуле

$$E(x_i, y_j, z_k, t^l) = \frac{1}{2} \cdot \rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \tau_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{yy}\varepsilon_{yy} + \\ + \tau_{zz}\varepsilon_{zz} + +2\tau_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz}\varepsilon_{xz} + +2\tau_{yz}\varepsilon_{yz}, \tag{5}$$

где компоненты деформации в узлах (x_i, y_j, z_k, t^l) обозначены через ε, а компоненты напряжений — через τ. Они определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}(x_i, y_j, z_k, t^l) &= (\tau_{xx} - \nu(\tau_{zz} + \tau_{yy}))/\nu_1, \\
\varepsilon_{yy}(x_i, y_j, z_k, t^l) &= (\tau_{yy} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{zz}))/\nu_1, \\
\varepsilon_{zz}(x_i, y_j, z_k, t^l) &= (\tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}))/\nu_1, \\
\varepsilon_{xy}(x_i, y_j, z_k, t^l) &= 2(1+\nu)\tau_{xy}/\nu_1, \\
\varepsilon_{xz}(x_i, y_j, z_k, t^l) &= 2(1+\nu)\tau_{xz}/\nu_1, \\
\varepsilon_{yz}(x_i, y_j, z_k, t^l) &= 2(1+\nu)\tau_{yz}/\nu_1,
\end{aligned}$$

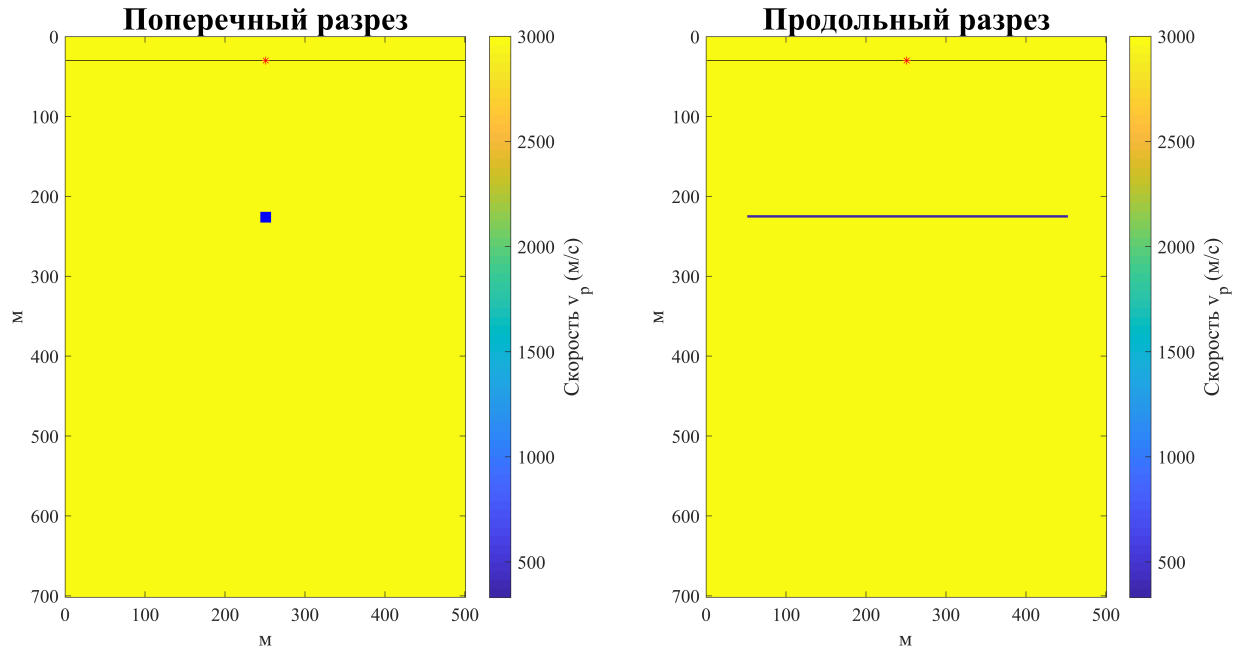
где $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ и $\nu_1 = 2\mu(1+\nu)$.

Стоит отметить, что при вычислении полной энергии E_{sum} по формуле (4) каждый раз, когда сейсмическая волна проходит через данную точку пространства, в этой точке происходит накопление энергии. Максимальные значения энергии будут указывать на наличие неоднородностей, в нашем случае — на положение тоннеля.

5. Численный эксперимент. Для первого численного эксперимента рассматриваются две двумерные модели, вычислительная область которых представляет собой два перпендикулярных среза (продольный и поперечный) трехмерной области размером $500 \times 500 \times 700$ м^3. Вмещающая среда предполагается однородной со следующими значениями: $\rho = 2000$ кг/м^3, $v_{\text{p}} = 3000$ м/с, $v_{\text{s}} = v_{\text{p}}/\sqrt{3}$. В однородной среде расположен заполненный воздухом тоннель, в котором плотность воздуха 1.2 кг/м^3, скорость P-волны 330 м/с и скорость S-волны 0 м/с. В поперечном сечении (рис. 2 a) (плоскость Oxz) тоннель имеет размеры 2×2 м, координаты центра тоннеля — $(250, 225)$ м. В продольном сечении (рис. 2 b) (плоскость Oyz) тоннель имеет размеры 400×2 м^2, его центр также находится в точке $(250, 225)$ м.

В конечно-разностной схеме шаг сетки по пространству принят равным 1 м. Вычислительная область окружена 20-метровым поглощающим слоем CPML. Источник сейсмических волн с доминирующей частотой $f_0 = 100$ Гц расположен в точке с координатами $(250, 250, 30)$ м. Расчет распространения волн в среде ведется до времени 1.6 с с временны́м шагом $1.6 \cdot 10^{-4}$ с. Для получения сейсмограммы, необходимой для использования на втором этапе алгоритма, компоненты нормальных напряжений τ_{xx}, τ_{zz} фиксиру-

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442



a) b)

Рис. 2. Две модели для численных экспериментов: a) поперечное сечение; b) продольное сечение. Синим цветом обозначено положение тоннеля, красной звездочкой обозначено положение источника, на черной сплошной линии расположены приемники

Fig. 2. Two models for the numerical experiments: a) cross section; b) longitudinal section. The blue colour indicates the tunnel position, the red star is the source position and the black solid line is the receiver line

ются на каждом шаге времени в серии приемников, расположенных через 1 м на небольшом заглублении под свободной поверхностью.

Компоненты записанного тензора напряжений очищаются от прямых волн от источника с помощью преобразования Гильберта–Хуанга [17], обращаются по времени (рис. 3) и используются в качестве функции источника в правой части той же системы (1), численно решаемой той же конечно-разностной схемой (3). Однако теперь модель среды однородна (без тоннеля), и задача сводится к определению местоположения тоннеля.

Для волнового поля с такими функциями источника полная энергия вычисляется по формуле (4). Моментальные снимки энергии для поперечного сечения (рис. 4 a) показывают, что наибольшее значение амплитуды энергии совпадает с положением тоннеля. Снимки энергии для продольного сечения (рис. 4 b) показывают, что максимальная амплитуда энергии симметрична относительно тоннеля источнику сейсмических волн. Это объясняется тем, что граница тоннеля является сильным отражателем и волны от источника после отражения регистрируются приемниками в практически неискаженном виде, как будто реальный источник находится не над тоннелем, а в однородной среде на соответствующей глубине. Поскольку реальное положение источника известно, появление такого виртуального источника на снимках энергии сигнализирует о наличии протяженной неоднородности среды, расположенной приблизительно посередине между реальным и виртуальным источниками. Вопрос же определения длины такого тоннеля остается открытым.

Численные эксперименты, выполненные в двумерной постановке, показали, что положение тоннеля можно определить лишь в том случае, если мы находимся в плоскости, перпендикулярной положению тоннеля, т.е. в поперечном сечении. На практике же положение тоннеля заранее неизвестно, поэтому 2D-моделирование не дает положительных результатов для его локализации. Это объясняется тем, что трехмерный случай распространения волн отличается от двумерного. Поэтому для решения задачи необходимо рассматривать полноразмерную трехмерную модель.

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

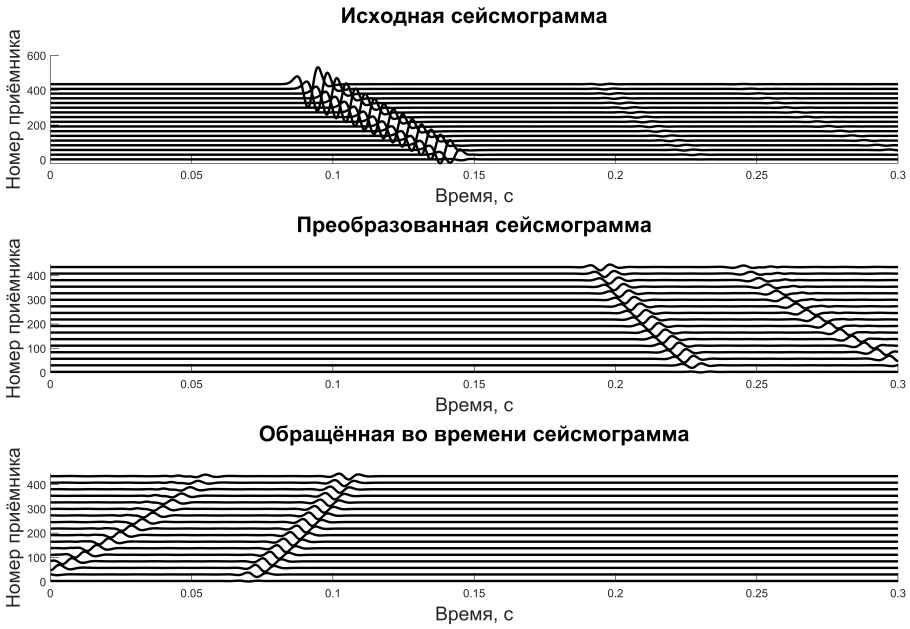
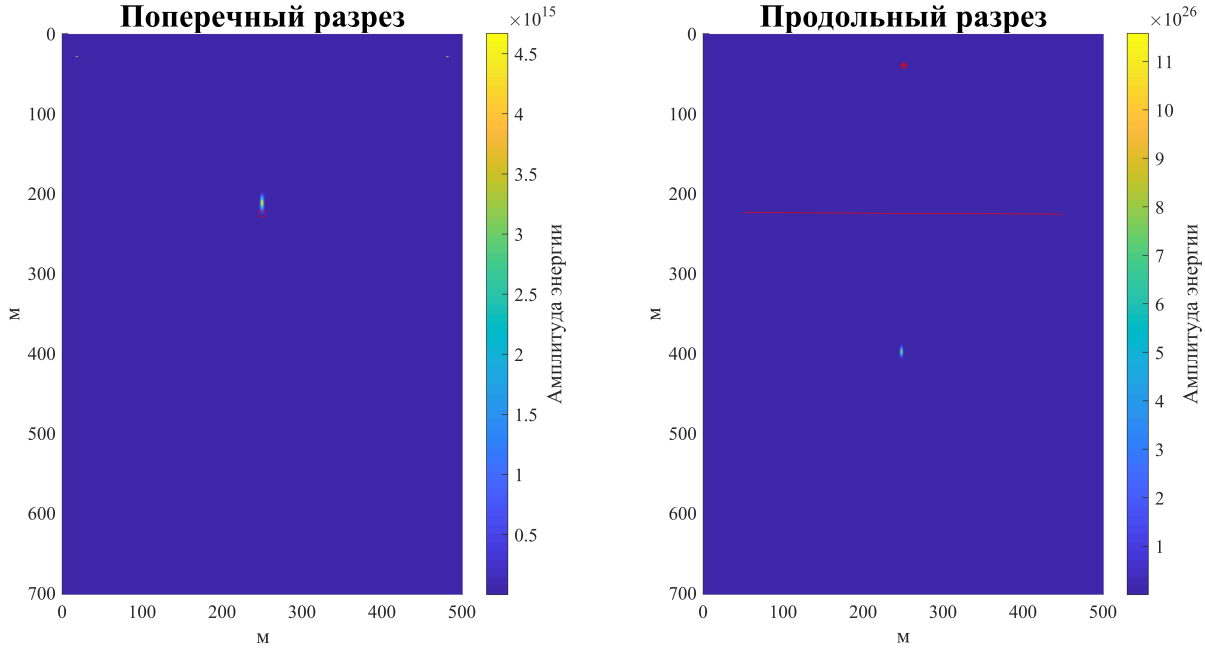


Рис. 3. Входные данные для TRM: записанная сейсмограмма зануляется в части, соответствующей волне от источника, и разворачивается во времени

Fig. 3. Input signal for the TRM: the recorded seismogram is truncated in the part corresponding to the direct wave and is inverted in time



a) b)

Рис. 4. Распределение полной энергии волнового поля E_{sum} по результатам моделирования: a) для поперечного сечения; b) для продольного сечения. Фактическое положение тоннеля отмечено красным

Fig. 4. Distribution of the total wave field energy E_{sum} according to the simulation results: a) for cross section; b) for longitudinal section. The actual position of the tunnel is marked in red

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

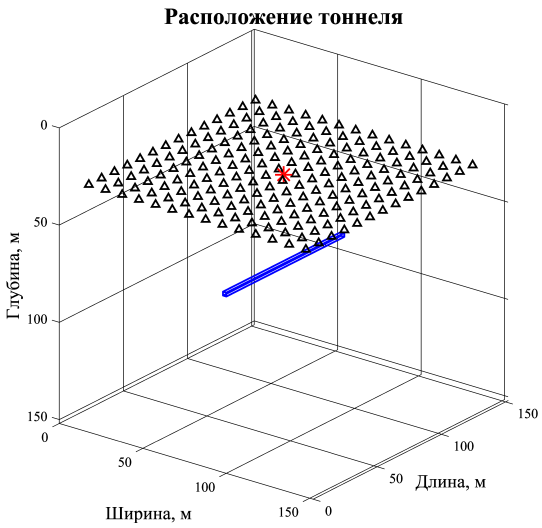


Рис. 5. Положение тоннеля (синим), источника (красная звездочка) и приемников (черные треугольники) для 3D эксперимента

Fig. 5. The location of tunnel (blue), source (red star) and receivers (black triangles) for 3D experiment

Для 3D эксперимента выбрана трехмерная область размером $152 \times 152 \times 152$ м^3 с шагом конечно-разностной сетки 1 м в каждом направлении. Внутри области расположен тоннель с координатами $(75 \ldots 77,\ \ 30 \ldots 122,\ \ 75 \ldots 77)$ м. На этапе моделирования тоннель размещается внутри среды в плоскости, параллельной свободной поверхности, а приемники равномерно располагаются вблизи свободной поверхности с шагом 1 м. На рис. 5 красная звездочка с координатами $(76, 76, 30)$ м обозначает положение точечного источника с доминирующей частотой $f_0 = 100$ Гц. Параметры среды такие же, как в 2D-эксперименте. Моментальный снимок распределения полной энергии на рис. 6 показывает, что концентрация наибольших значений амплитуды соответствует реальному положению тоннеля. Для более детального анализа на рис. 7 также представлены срезы вычислительной области вдоль плоскостей, содержащих тоннель, где наблюдается устойчивое соответствие между реальным и восстановленным положениями тоннеля.

6. Параллельная реализация с использованием технологии Coarray Fortran. Coarray — это современная технология параллельных вычислений, которая проще в реализации, чем известные альтернативы, такие как MPI и OpenMP, но при этом остается столь же эффективной [18]. При параллелизации алгоритма с помощью Coarray создается несколько копий исполняемого файла (образов), которые выполняются асинхронно в рамках модели SPMD (один код–множество данных).

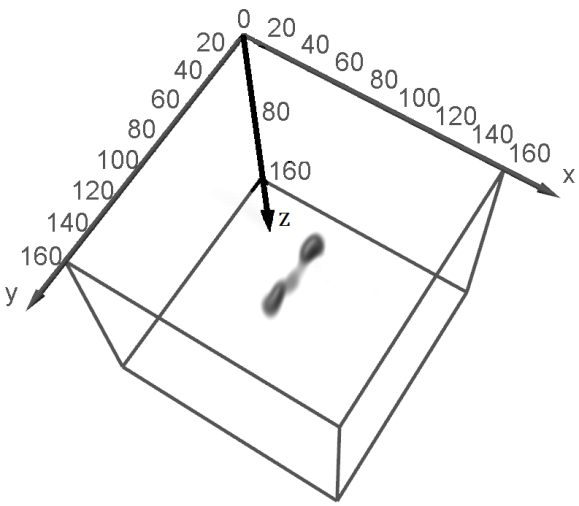


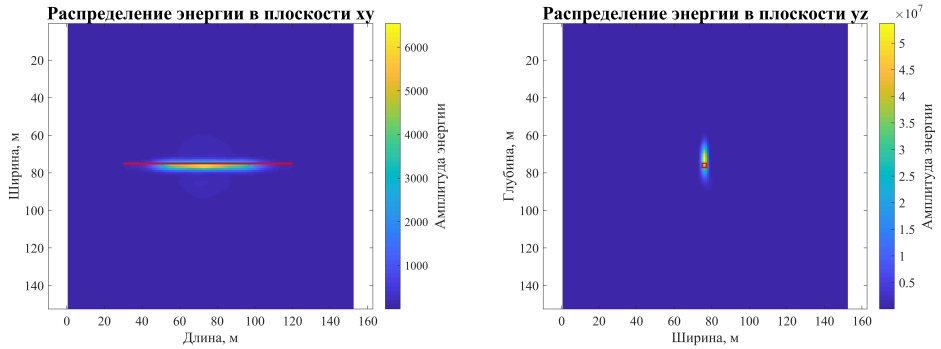
Рис. 6. Полная энергия волнового поля E_{sum} по результатам численного эксперимента

Fig. 6. The total wavefield energy E_{sum} obtained from the simulation

Специальные сопряженные массивы (coarrays) позволяют образам обращаться к данным друг друга — в синтаксисе это выражается дополнительным индексом в квадратных скобках, соответствующим номеру образа. По сравнению с другими технологиями Coarray предлагает более высокоуровневый, синтаксически естественный способ для задач, где логично представить данные как распределенные по образам. Coarray Fortran отличается встроенной в язык поддержкой параллелизма и моделью PGAS, что упрощает работу с распределенными данными за счет лаконичного синтаксиса, обеспечивает единообразие кода при масштабировании между разными вычислительными средами, включает стандартизированные средства синхронизации и позволяет комбинировать параллельные конструкции с остальными возможностями Fortran, снижая трудоемкость разработки и риск ошибок по сравнению с ручным управлением коммуникациями в MPI. Поскольку решение системы (1), (2) является наиболее вычислительно затратной частью алгоритма и выполняется дважды (один раз для моделирования синтетических сейсмических трасс и один раз с применением метода TRM), параллелизация необходима.

С этой целью используется метод декомпозиции расчетной области, при котором вычислительная область разделяется на части, каждая из которых связана с определенным вычислительным процессом. Такой метод решения уравнений в частных производных является довольно распространенным и эффективным вычислительным приемом. Его идея основана на классическом аддитивном методе Швар-

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442



a) b)

Рис. 7. Срезы полной энергии волнового поля E_{sum}: a) в горизонтальной плоскости; b) в вертикальной плоскости. Фактическое положение тоннеля отмечено красным

Fig. 7. Slices of the total wavefield energy E_{sum}: a) in the horizontal plane; b) in the vertical plane. The actual position of the tunnel is marked in red

ца [19, 20], который позволяет разбить исходную задачу на серию вычислительно более мелких подзадач, связанных между собой граничными условиями (рис. 8). Именно это делает метод декомпозиции области удобным и эффективным инструментом для параллельных вычислений.

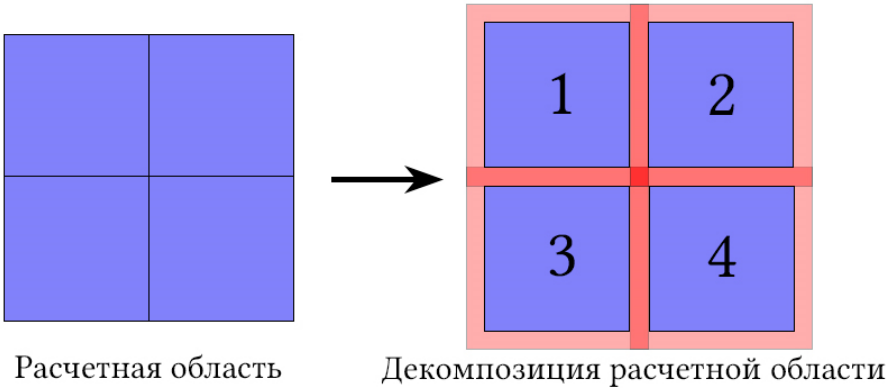


Рис. 8. Декомпозиция двумерной вычислительной области на 4 вычислительных процесса. Обмен данными происходит между пересекающимися граничными слоями (красным)

Fig. 8. Decomposition of a two-dimensional computational domain into 4 computational processes. Data is exchanged between the intersecting boundary layers (in red)

При параллелизации рассматриваемой задачи метод декомпозиции области применяется по всем трем направлениям для разделения вычислительной области на части, соответствующие процессам. Каждый процесс выполняет расчеты только на своей области, тогда как распространение волн происходит во всей расчетной области. Поэтому на каждом шаге по времени необходим обмен данными между процессами. Как известно [21, 22], обмен данными является самой медленной операцией в параллельном программировании. Это создает проблему оптимизации обмена данными между процессами с целью минимизации потерь времени, связанных с медленным обменом. Технология Coarray Fortran позволяет оптимизировать обмен данными, что подтверждается исследованиями [18, 23].

В технологии Coarray Fortran разделение вычислительной области осуществляется с помощью сопряженных массивов coarrays. Для декомпозиции рассматриваемой задачи выбрана сопряженная размерность 1, т.е. номер образа определяется одним числом. Сопряженные переменные задаются добавлением дополнительных квадратных скобок с указанием размерности сопряжения. Каждая переменная, обменивающаяся данными (в программе значения скоростей смещения (v_x, v_y, v_z) записываются в переменные `ux`, `uy`, `uz`, а компоненты тензора напряжений $(\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ — в переменные `sxx`, `syy`, `szz`,

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

sxy, sxz и syz соответственно), задается сопряженным массивом с помощью добавления квадратных скобок (листинг 1).

Листинг 1. Пример разделения вычислительной области с помощью сопряженных массивов Coarray Fortran

Listing 1. Example of computational domain partitioning using Coarray Fortran

```
1 double precision, dimension(:,:,:), codimension[:],
2                       allocatable:: ux[:], uy[:], uz[:]
```

Обращение к необходимому образу (image) происходит указанием его номера в квадратных скобках. Например, u(i)[image_j] обращается к i-му элементу массива u образа с номером image_j, а u(i) обращается к локальной переменной (той, что хранится на выполняемом образе).

Для удобства обращения заранее вычисляются координаты (mranki, mrankj, mrankk) для каждого образа на основе общего числа процессов (iprocs × jprocs × kprocs), а также номера соседних образов в каждом направлении. Эти номера сохраняются в переменных iprev, inext, jprev, jnext, kprev и knext.

Вычисление значений компонент волнового поля на новом временно́м шаге выполняется в два этапа. Сначала рассчитываются скорости смещения (u_x, u_y, u_z), а затем пересчитываются компоненты тензора напряжений $(\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ с использованием новых значений компонент скорости смещения. Поэтому на каждом временно́м шаге обмен данными между соседними образами также осуществляется в два этапа: сначала вычисляются соответствующие компоненты, а затем выполняется обмен.

При декомпозиции области каждая подобласть, приписанная определенному образу, со всех сторон окружается дополнительным граничным слоем, в котором пересекаются области соседних образов. При обмене данные из крайнего реального слоя области соседнего образа (либо первый, либо последний слой в зависимости от направления обмена) передаются в граничный слой (листинг 2). Размер вычислительной области, представленной в листинге 2, составляет $(1, nx_l)$, но при добавлении двух дополнительных слоев в начало и в конец массива фактический размер массива становится $(1, nx_l + 2)$.

Листинг 2. Пример обмена данными в направлении x для трех переменных скоростей смещения

Listing 2. Example of data exchange in the x-direction for three displacement velocity variables

```
1 if (mranki<iprocs) then
2     uy(nx_l+2,:,:)=uy(2,:,:)[inext]
3     uz(nx_l+2,:,:)=uz(2,:,:)[inext]
4 endif
5 if (mranki>1) ux(1,:,:)=ux(nx_l+1,:,:)[iprev]
6 ...
7 sync all
```

В строках кода 1, 4 описывается следующее: если номер образа в направлении i (x) непоследний (*iprocs* — общее количество образов в направлении i), то в локальные переменные uy и uz, в последний (дополнительный) слой, записываются значения переменной со следующего (*inext*) образа в направлении i, с первого реального слоя. Так как нумерация в языке Fortran начинается с 1, первый дополнительный граничный слой имеет номер 1, а первый реальный слой имеет номер 2; при общей размерности реальной области nx_l последний дополнительный граничный слой имеет номер $nx_l + 2$.

В пятой строке данные с последнего реального слоя $nx_l + 1$ переменной ux записываются в первый дополнительный слой соседней слева области. В связи с особенностями схемы на сдвинутых сетках передача данных для одной переменной в зависимости от направления обмена требуется либо только на первый, либо только на последний слой, но никогда на оба. Поэтому фрагмент кода исчерпывает обмен данными по направлению x для трех переменных скоростей смещения.

Итак, граничные значения, переданные с соседних подобластей, попадают в слои 1 и $nx_l + 2$, а фактические данные подобласти хранятся в диапазоне $(2, nx_l + 1)$.

Такой обмен выполняется для компонент вектора скорости смещения во всех направлениях, после чего компоненты тензора напряжений вычисляются с использованием уже рассчитанных значений компонент скорости смещения. После вычисления переменных их значения обмениваются таким же образом, как описано выше.

При этом корректный обмен возможен только при явной синхронизации образов. Для этого после

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

выполнения первого этапа обмена необходимо выполнить команду `sync all`.

Следующий временно́й шаг начинается с вычисления вектора скорости смещения, и затем процедура повторяется.

Программа для двумерного случая написана таким же образом, с тем изменением, что исключается одно из измерений и все переменные с индексом y.

Для тестирования параллельного кода использовались ресурсы суперкомпьютера NKS-1P Сибирского центра суперкомпьютерных вычислений СО РАН на базе процессоров Intel Xeon E5-2697A v4, 2.6 ГГц (AVX2) [1]. При запуске 32 процессов использовалась гибридная конфигурация: запускалось по 16 процессов/образов на одном процессоре без задействования второго процессора во избежание NUMA-эффектов и неравномерности доступа к памяти. Сравнение производительности параллельной программы, написанной на Coarray Fortran, и программы на MPI для решения системы уравнений динамической теории упругости показывает, что разница в производительности несущественна (рис. 9). Однако параллелизация с помощью Coarray Fortran является более понятной и простой для исполнителя.

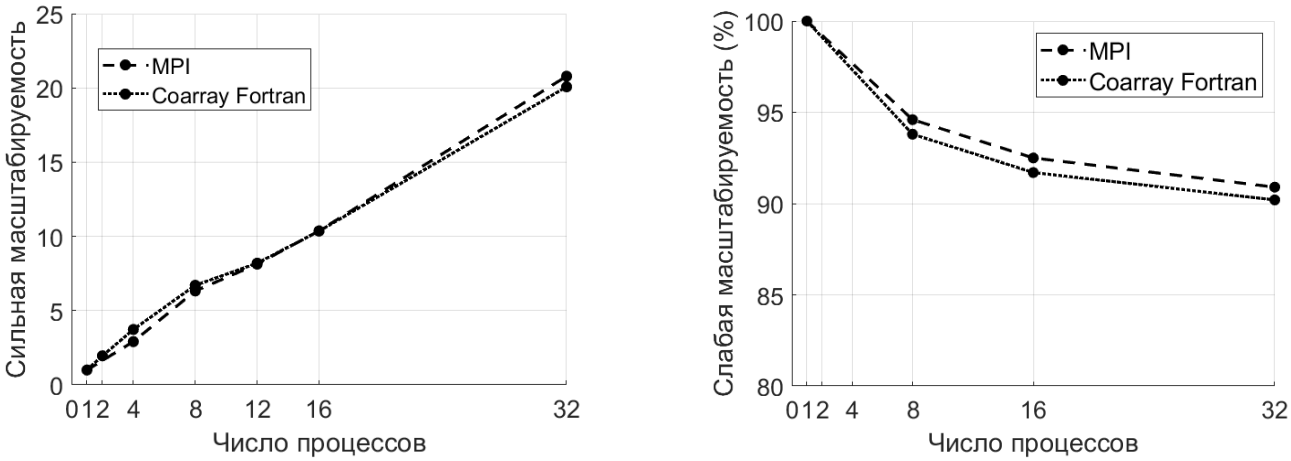


Рис. 9. Масштабируемость трехмерного алгоритма: a) ускорение при сильной масштабируемости; b) эффективность при слабой масштабируемости. Пунктирная линия — результаты измерений для MPI реализации, точечная линия — результаты измерений для Coarray Fortran реализации

Fig. 9. Scalability of the 3D algorithm: a) strong scaling speed-up; b) weak scaling efficiency. The dashed line represents the measurement results for the MPI implementation, the dotted line represents the measurement results for the Coarray Fortran implementation

7. Заключение. Предложен и численно реализован алгоритм реконструкции местоположения тоннеля в однородной среде. В его основе лежит метод зеркального обращения времени (TRM), основанный на принципе обратимости волн, распространяющихся в среде без затухания. Впервые TRM адаптирован для локализации протяженного объекта (тоннеля) с поверхности.

Для верификации алгоритма разработан численный метод решения, использующий конечно-разностный метод на сдвинутых сетках и идеально согласованный поглощающий граничный слой на основе свертки (CPML) для ограничений вычислительной области. Параллелизация алгоритма выполнена с помощью декомпозиции вычислительной области, а обмен данными между процессами организован с помощью технологии Coarray Fortran. Параллельная реализация на Coarray Fortran, в отличие от MPI, предоставляет более простой синтаксис при сопоставимой производительности, что снижает порог входа для разработчиков.

Проведены численные эксперименты на двумерных и трехмерных моделях сред. Результаты моделирования показали, что алгоритм успешно восстанавливает положение тоннеля для трехмерных моделей (область концентрации энергии повторяет форму тоннеля и локализуется в месте его расположения) и

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

имеет ограничения для применения в двумерном случае.

Список литературы

1. Сибирский суперкомпьютерный центр СО РАН.
2. *Gürbüz A.C., McClellan J.H., Scott W.R., Larson G.D.* Seismic tunnel imaging and detection // 2006 International Conference on Image Processing, Atlanta, GA, USA, October 8–11, 2006. IEEE, 2006. pp. 3229–3232. doi 10.1109/ICIP.2006.312911.
3. *Counts T., Larson G., Gürbüz A.C., et al.* Investigation of the detection of shallow tunnels using electromagnetic and seismic waves // Detection and Remediation Technologies for Mines and Minelike Targets XII, Orlando, Florida, USA, May 7, 2007. Vol. 6553. SPIE, 2007. Article Number 65531G. doi 10.1117/12.722437.
4. *Sherman C.S., Rector J., Dreger D., Glaser S.* A numerical study of surface-wave-based tunnel detection at the Black Diamond Mines Regional Preserve, California // Geophysics. 2018. **83**, N 4. EN13–EN22. doi 10.1190/geo2017-0467.1.
5. *Sloan S.D., Peterie S.L., Miller R.D., et al.* Detecting clandestine tunnels using near-surface seismic techniques // Geophysics. 2015. **80**, N 5. EN127–EN135. doi 10.1190/geo2014-0529.1.
6. *Junaid M., Khan S.A., Ahmed N.* Unsupervised detection of underground tunnels in ground-penetrating radar using depth-restricted reconstruction scoring // arXiv:2607.04882. 2026. doi 10.48550/arXiv.2607.04882.
7. *Schwenk J.T., Sloan S.D., Miller R.D., Ivanov J.* Correlation of the backscatter analysis of surface waves method (BASW) for anomaly detection // 84th SEG Annual International Meeting, Denver, Colorado, October 26–31, 2014. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2014. pp. 2029–2035. doi 10.1190/segam2014-1684.1.
8. *Larmat C., Montagner J.-P., Fink M., et al.* Time-reversal imaging of seismic sources and application to the great Sumatra earthquake // Geophys. Res. Lett. 2006. **33**, N 19. Article Number L19312. doi 10.1029/2006GL026336.
9. *Montagner J.-P., Larmat C., Capdeville Y., et al.* Time-reversal method and cross-correlation techniques by normal mode theory: a three-point problem // Geophys. J. Int. 2012. **191**, N 2. 637–652. doi 10.1111/j.1365-246X.2012.05619.x.
10. *Fink M., Prada C.* Acoustic time-reversal mirrors // Inverse Problems. 2001. **17**, N 1. R1–R38. doi 10.1088/0266-5611/17/1/201.
11. *Anderson B.E., Griffa M., Larmat C., et al.* Time reversal // Acoustics Today. 2008. **4**, N 1. 5–16. doi 10.1121/1.2961165.
12. *Shustak M., Landa E.* Time reversal for wave refocusing and scatterer detection using machine learning // Geophysics. 2018. **83**, N 5. T257–T263. doi 10.1190/geo2017-0679.1.
13. *Reshetova G., Galaktionova A.* Reconstruction of subsurface scattering objects by the time reversal mirror // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2022. **19**, N 2. 517–527. doi 10.33048/semi.2022.19.043.
14. *Коновалов А.Н.* Динамическая задача теории упругости в постановке "скорости-напряжения"// Дифференциальные уравнения. 1999. **35**, № 2. 238–248. https://www.mathnet.ru/links/8637fef4f555733344e181feaf5cb170/de9878.pdf. Дата обращения: 16 октября 2026.
15. *Virieux J.* P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // Geophysics. 1986. **51**, N 4. 889–901. doi 10.1190/1.1442147.
16. *Komatitsch D., Martin R.* An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation // Geophysics. 2007. **72**, N 5. SM155–SM167. doi 10.1190/1.2757586.
17. *Huang N.E., Attoh-Okine N.O.* The Hilbert–Huang transform in engineering. CRC Press, 2005.
18. *Reshetova G., Cheverda V., Koinov V.* Comparative efficiency analysis of MPI blocking and non-blocking communications with Coarray Fortran // Supercomputing. RuSCDays 2021. Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol. 1510. Cham: Springer, 2021. pp. 332–336. doi 10.1007/978-3-030-92864-3_25.
19. *Schwarz H.A.* Ueber einige abbildungsaufgaben // J. für die Reine und Angew. Math. 1869. **1869**, N 70. 105–120. doi 10.1515/crll.1869.70.105.
20. *Sobolev S.L.* Schwarz's algorithm in elasticity theory // Selected Works of S.L. Sobolev. Boston: Springer, 2006. pp. 399–403. doi 10.1007/978-0-387-34149-1_12.
21. *Dongarra J., Beckman P., Moore T., et al.* The international exascale software project roadmap // Int. J. High Perform. Comput. Appl. 2011. **25**, N 1. 3–60. doi 10.1177/1094342010391989.
22. *Denis A., Trahay F.* MPI overlap: benchmark and analysis // 2016 45th International Conference on Parallel Processing (ICPP), Philadelphia, PA, USA, August 16–19, 2016. IEEE, 2016. pp. 258–267. doi 10.1109/ICPP.2016.37.

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

23. *Sharma A., Moulitsas I.* MPI to Coarray Fortran: experiences with a CFD solver for unstructured meshes // Scientific Programming. 2017. 1–12. doi 10.1155/2017/3409647.

Получена *22 июня 2026 г.* | *Принята* *28 августа 2026 г.* | *Опубликована* *12 ноября 2026 г.*

Информация об авторах

Анастасия Андреевна Галактионова — ст. преподаватель; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Галина Витальевна Решетова — д.ф.-м.н., гл. науч. сотр.; Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр-кт Академика Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

References

1. Novosibirsk Supercomputer Center of SB RAS.
2. A. C. Gürbüz, J. H. McClellan, W. R. Scott, and G. D. Larson, "Seismic Tunnel Imaging and Detection," in *2006 International Conference on Image Processing, Atlanta, GA, USA, October 8–11, 2006* (IEEE, 2006), pp. 3229–3232. doi 10.1109/ICIP.2006.312911.
3. T. Counts, G. Larson, A. C. Gürbüz, et al., "Investigation of the Detection of Shallow Tunnels Using Electromagnetic and Seismic Waves," in *Detection and Remediation Technologies for Mines and Minelike Targets XII, Orlando, Florida, USA, May 7, 2007* (SPIE, 2007), Vol. 6553, Article Number 65531G. doi 10.1117/12.722437.
4. C. S. Sherman, J. Rector, D. Dreger, and S. Glaser, "A numerical study of surface-wave-based tunnel detection at the Black Diamond Mines Regional Preserve, California," Geophysics **83** (4), EN13–EN22 (2018). doi 10.1190/geo2017-0467.1.
5. S. D. Sloan, S. L. Peterie, R. D. Miller, et al., "Detecting clandestine tunnels using near-surface seismic techniques," Geophysics **80** (5), EN127–EN135 (2015). doi 10.1190/geo2014-0529.1.
6. M. Junaid, S. A. Khan, and N. Ahmed, "Unsupervised Detection of Underground Tunnels in Ground-Penetrating Radar Using Depth-Restricted Reconstruction Scoring," arXiv:2607.04882 (2026). doi 10.48550/arXiv.2607.04882.
7. J. T. Schwenk, S. D. Sloan, R. D. Miller, and J. Ivanov, "Correlation of the backscatter analysis of surface waves method (BASW) for anomaly detection," in *84th SEG Annual International Meeting, Denver, Colorado, October 26–31, 2014* (SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2014), pp. 2029–2035. doi 10.1190/segam2014-1684.1.
8. C. Larmat, J.-P. Montagner, M. Fink, et al., "Time-reversal imaging of seismic sources and application to the great Sumatra earthquake," Geophys. Res. Lett. **33** (19), Article Number L19312 (2006). doi 10.1029/2006GL026336.
9. J.-P. Montagner, C. Larmat, Y. Capdeville, et al., "Time-reversal method and cross-correlation techniques by normal mode theory: a three-point problem," Geophys. J. Int. **191** (2), 637–652 (2012). doi 10.1111/j.1365-246X.2012.05619.x.
10. M. Fink and C. Prada, "Acoustic time-reversal mirrors," Inverse Problems **17** (1), R1–R38 (2001). doi 10.1088/0266-5611/17/1/201.
11. B. E. Anderson, M. Griffa, C. Larmat, et al., "Time Reversal," Acoustics Today **4** (1), 5–16 (2008). doi 10.1121/1.2961165.
12. M. Shustak and E. Landa, "Time reversal for wave refocusing and scatterer detection using machine learning," Geophysics **83** (5), T257–T263 (2018). doi 10.1190/geo2017-0679.1.
13. G. Reshetova and A. Galaktionova, "Reconstruction of Subsurface Scattering Objects by the Time Reversal Mirror," Siberian Electronic Mathematical Reports **19** (2), 517–527 (2022). doi 10.33048/semi.2022.19.043.
14. A. N. Konovalov, "The dynamic problem of elasticity theory in the "velocity-stress" formulation," Differ. Equations (Differencialnye Uravnenia) **35** (2), 238–245 (1999). https://www.mathnet.ru/links/8637fef4f555733344e181feaf5cb170/de9878.pdf. Cited October 16, 2026.
15. J. Virieux, "P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method," Geophysics **51** (4), 889–901 (1986). doi 10.1190/1.1442147.
16. D. Komatitsch and R. Martin, "An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation," Geophysics **72** (5), SM155–SM167 (2007). doi 10.1190/1.2757586.
17. N. E. Huang and N. O. Attoh-Okine, *The Hilbert–Huang Transform in Engineering* (CRC Press, 2005).

2026, **27** (4), 690–704. doi 10.26089/NumMet.v27r442

18. G. Reshetova, V. Cheverda, and V. Koinov, "Comparative Efficiency Analysis of MPI Blocking and Non-blocking Communications with Coarray Fortran," in *Supercomputing. RuSCDays 2021. Communications in Computer and Information Science* (Springer, Cham, 2021), Vol. 1510, pp. 332–336. doi 10.1007/978-3-030-92864-3_25.
19. H. A. Schwarz, "Ueber einige Abbildungsaufgaben," J. für die Reine und Angew. Math. **1869** (70), 105–120 (1869). doi 10.1515/crll.1869.70.105.
20. S. L. Sobolev, "Schwarz's Algorithm in Elasticity Theory," in *Selected Works of S.L. Sobolev* (Springer, Boston, 2006), pp. 399–403. doi 10.1007/978-0-387-34149-1_12.
21. J. Dongarra, P. Beckman, T. Moore, et al., "The International Exascale Software Project roadmap," Int. J. High Perform. Comput. Appl. **25** (1), 3–60 (2011). doi 10.1177/1094342010391989.
22. A. Denis and F. Trahay, "MPI Overlap: Benchmark and Analysis," in *2016 45th International Conference on Parallel Processing (ICPP), Philadelphia, PA, USA, August 16–19, 2016* (IEEE, 2016), pp. 258–267. doi 10.1109/ICPP.2016.37.
23. A. Sharma and I. Moulitsas, "MPI to Coarray Fortran: experiences with a CFD solver for unstructured meshes," Scientific Programming 1–12 (2017). doi 10.1155/2017/3409647.

Received *June 22, 2026*
Accepted *August 28, 2026*
Published *November 12, 2026*

Information about the authors

Anastasia A. Galaktionova — Senior Lecturer; Novosibirsk State University, 1, Pirogova ulitsa, 630090, Novosibirsk, Russia.

Galina V. Reshetova — Dr. Sci., Chief Scientist; Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, 6, Ac. Lavrentiev prospekt, 630090, Novosibirsk, Russia.