

Об обратной задаче оптического секционирования в модели конфокальной системы для офтальмологических приложений

С. Д. Бажитов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Москва, Российская Федерация

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-8549-8260, e-mail: cbajitov@gmail.com

А. В. Разгулин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Москва, Российская Федерация

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0003-3257-0318, e-mail: razgulin@cs.msu.ru

А. В. Ларичев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет,
Москва, Российская Федерация

ORCID: 0000-0002-7615-3199, e-mail: larichev@optics.ru

Аннотация: Поставлена задача восстановления трехмерных полупрозрачных объектов для нелинейной модели конфокальной оптической системы на основе минимизации функционала Тихонова с фурье-фильтром в стабилизаторе. Установлена дифференцируемость по Фреше функционала Тихонова в пространстве Соболева и получены оценки константы Липшица для его градиента. Предложен метод минимизации функционала Тихонова, допускающий экономичную реализацию. Приведенные результаты численных экспериментов на изображениях глазного дна и симулированных изображениях показывают эффективность использования вариационного подхода на основе градиентного метода минимизации функционала Тихонова с фурье-фильтром в стабилизаторе.

Ключевые слова: секционирование, конфокальная система, свертка, обратная задача, функционал Тихонова, фурье-фильтрация.

Благодарности: Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по Соглашению № 075–15–2025–345.

Для цитирования: Бажитов С.Д., Разгулин А.В., Ларичев А.В. Об обратной задаче оптического секционирования в модели конфокальной системы для офтальмологических приложений // Вычислительные методы и программирование. 2026. 27, № 3. 540–558. doi 10.26089/NumMet.v27r334.



On the inverse problem of optical sectioning in a confocal system model for ophthalmological applications

Sergey D. Bazhitov

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russia
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-8549-8260, e-mail: cbajitov@gmail.com

Alexander V. Razgulin

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russia
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0003-3257-0318, e-mail: razgulin@cs.msu.ru

Andrey V. Larichev

Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Physics, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002-7615-3199, e-mail: larichev@optics.ru

Abstract: The problem of reconstructing 3-D translucent objects for a nonlinear confocal optical system model is posed based on minimizing the Tikhonov functional with a Fourier filter in the stabilizer. Fréchet differentiability of the Tikhonov functional in Sobolev space is established, and estimates for the Lipschitz constant for its gradient are obtained. A method for minimizing the Tikhonov functional is proposed that allows for an efficient implementation. The presented results of numerical experiments on fundus images and simulated images demonstrate the effectiveness of using a variational approach based on the gradient method for minimizing the Tikhonov functional with a Fourier filter in the stabilizer.

Keywords: sectioning, confocal system, convolution, inverse problem, Tikhonov functional, Fourier filtering.

Acknowledgements: The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the Agreement No. 075–15–2025–345.

For citation: S. D. Bazhitov, A. V. Razgulin, A. V. Larichev, “On the inverse problem of optical sectioning in a confocal system model for ophthalmological applications,” *Numerical Methods and Programming*, 27 (3), 540–558 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r334.

1. Введение. Конфокальные оптические системы, получившие широкое распространение в микроскопии при изучении объектов различной природы [1–3], все активнее внедряются в офтальмологическую практику [4, 5]. Высокое разрешение лазерной сканирующей офтальмоскопии обусловлено фокусировкой излучения в единичную точку объекта. Отраженный сигнал отделяется от падающего луча светоделителем и проецируется на детектор, причем лучи, исходящие из внефокусных плоскостей, эффективно отсекаются, и только слой объекта в фокальной плоскости вносит основной вклад в изображение. Способность к оптическому секционированию делает конфокальные методы перспективными при изучении трехмерных структур глаза *in vivo* в естественном состоянии, без использования экзогенных красителей. Развитие конфокальной микроскопии актуально при ранней диагностике многих социально значимых глазных заболеваний, например, диабетической ретинопатии и др.

Классические схемы конфокальной микроскопии и их модели, описанные в литературе [6, 7], обычно недостаточны для адекватного количественного анализа конкретных конфокальных систем, например, офтальмологических комплексов с адаптивной оптикой [8, 9]. В нашей работе [10] представлена новая ма-

тематическая модель конфокальной оптической системы, адаптированная для задач офтальмологии. Для адекватного описания распространения световой волны использован математический аппарат скалярной теории дифракции в приближении Френеля, что обосновано характерным пространственным масштабом офтальмологических приложений. Итогом проведенного в [10] исследования прямой задачи, описываемой нелинейным многомерным интегральным оператором, в частности, является выявление диапазона разрешения сканирования конфокальной системы по глубине, при котором имеет место эффективное оптическое секционирование слоев объекта. При недостаточном разрешении конфокальной системы по глубине появляются паразитные изображения с соседних слоев по глубине, для компенсации которых необходима постобработка, связанная с решением многомерного нелинейного интегрального уравнения, содержащего трехмерную свертку.

Методы устойчивого нахождения решения интегрального уравнения типа свертки в линейном случае хорошо известны (см., например, [11–13] и др.). Нелинейные интегральные уравнения с линейным вхождением ядра свертки рассмотрены в [14], общие нелинейные некорректные задачи изучались в [15]. В отличие от этих и других работ по интегральным уравнениям типа свертки, в нашем случае оператор свертки расположен внутри нелинейного оператора, описывающего распространение световой волны в конфокальной системе, что не позволяет напрямую использовать результаты упомянутых и других работ.

В настоящей работе предлагается использовать вариационный подход, основанный на минимизации функционала Тихонова со среднеквадратичной невязкой и стабилизатором первого порядка с локализованным по частотам параметром стабилизатора. Фактически в конструкции стабилизатора предлагается использовать оператор Фурье-фильтрации, зарекомендовавший себя в оптических приложениях как эффективный инструмент управления светом [16–20]. В работе дается строгая математическая постановка задачи, устанавливается дифференцируемость по Фреше нелинейного интегрального оператора и функционала Тихонова, выводятся градиент функционала Тихонова и оценка константы Липшица для его градиента. На основе полученных формул градиента предложен градиентный метод минимизации с частотной локализацией параметра стабилизатора на итерациях, что дает гибкость в подборе параметров. Проведенное численное моделирование решения обратной задачи оптического секционирования многослойного полупрозрачного объекта в конфокальной системе на изображениях сетчатки глаза человека и на симулированных изображениях показало эффективность использования Фурье-фильтрации в конструкции стабилизатора.

2. Модель формирования изображения в конфокальной системе. Подробное описание модели формирования изображения в конфокальной оптической системе для офтальмологических приложений приводится в работе [10]. Напомним основные этапы распространения световой волны в такой системе. Узкий гауссов пучок с плоской фазой

$$G(x_0, y_0) = Ae^{-\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2\omega^2}}, \quad A > 0, \quad \omega > 0,$$

проходит через глазную линзу с индикаторной функцией зрачка

$$P_1(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq r_1^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > r_1^2, \end{cases}$$

и фокусируется в точку на объекте. Отраженный от объекта сигнал, задаваемый вещественной функцией $o(r_s), r_s \in R^3$, проходит обратно через совмещенную со зрачком глазную линзу с фокусным расстоянием f_1 , отражается от наклонного светоделительного кольцеобразного зеркала с индикаторной функцией

$$P_2(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 + y^2 < r_0^2, \\ 1, & r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > r_2^2, \end{cases}$$

проходит через линзу детектора с фокусным расстоянием f_2 и фокусируется в плоскости детектора с индикаторной функцией

$$D(x_3, y_3) = \begin{cases} 1, & x_3^2 + y_3^2 < r_D^2, \\ 0, & x_3^2 + y_3^2 > r_D^2, \end{cases}$$



(r_D — радиус детектора), который регистрирует среднюю по своей апертуре интенсивность. Заметим, что изменение радиуса детектора позволяет имитировать работу конфокальной диафрагмы. В предположении когерентного распространения сигнала вплоть до детектора на нем регистрируется интенсивность $F_D(o)$ как функция трехмерной координаты $r_s \in R^3$, которая получена в приближении Френеля скалярной теории дифракции:

$$F_D(o) = \iint_{R^2} \left| \iiint_{R^3} h_1(r_1) o(r_s - r_1) h_2(r'_3 - Mr_1) dr_1 \right|^2 D(x_3, y_3) dx_3 dy_3 = I_D(r_s), \quad (1)$$

где $r_1 = (x_1, y_1, z_1) \in R^3$, $r'_3 = (x_3, y_3, 0)$, диагональная матрица $M = \text{diag}(M, M, -M^2)$, увеличение системы $M = f_2/f_1$,

$$h_1(x_1, y_1, z_1) = \iint_{R^2} G(x_0, y_0) P_1(x_0, y_0) e^{\frac{ikz_1}{2f_1^2}(x_0^2 + y_0^2)} e^{\frac{ik}{f_1}(x_0x_1 + y_0y_1)} dx_0 dy_0$$

— функция рассеяния точки глазной линзы в когерентном случае, k — волновое число,

$$h_2(x, y, z) = \iint_{R^2} P_1(-x_2, -y_2) P_2(x_2, y_2) e^{\frac{ikz}{2f_2^2}(x_2^2 + y_2^2)} e^{\frac{ik}{f_2}(x_2x + y_2y)} dx_2 dy_2$$

— функция рассеяния точки детекторной линзы в когерентном случае.

Запишем формулу (1) в сокращенном виде:

$$F_D(o) = \iint_{R^2} \left| \iiint_{R^3} h_{r'_3}(r_1) o(r_s - r_1) dr_1 \right|^2 D(r'_3) dr'_3 = I_D, \quad (2)$$

где

$$h_{r'_3}(r_1) = h_1(r_1) h_2(r'_3 - Mr_1). \quad (3)$$

В случае точечного детектора выражение для интенсивности принимает вид:

$$F(o) = \left| \iiint_{R^3} h(r_1) o(r_s - r_1) dr_1 \right|^2 = I, \quad (4)$$

где $h(r_1) = h_1(r_1) h_2(Mr_1)$. С использованием традиционного обозначения $*$ для оператора свертки (см. подробнее раздел 3) операторы $F_D(o)$ и $F(o)$ можно записать в следующем виде:

$$F(o) = |h * o|^2, \quad F_D(o) = \iint_{R^2} |h_{r'_3} * o|^2 D(r'_3) dr'_3.$$

Прямая задача заключается в получении стека изображений $I_D = F_D(o)$, сфокусированных на разные слои, по имеющемуся трехмерному объекту $o(r_s)$. Исследование прямой задачи проведено в [10]. Обратная задача состоит в решении операторного уравнения с операторами $F(o)$ или $F_D(o)$.

3. Обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть Ω — ограниченное множество в вещественном пространстве R^3 (например, $\Omega = [-a, a] \times [-a, a] \times [-b, b]$, где $2a$ — сторона сканируемой области, $2b$ — глубина сканирования).

Здесь и ниже используются обозначения: $L_p(R^3)$ — пространство измеримых функций переменной $r = (x, y, z)$, p -я степень модуля которых интегрируема по Лебегу в R^3 ($1 \leq p \leq +\infty$), $\langle f, g \rangle_{L_2(R^3)} = \int_{R^3} f(r)g(r)dr$. Аналогично определяется $\langle f, g \rangle_{L_2(\Omega)}$. $H_0^1(\Omega)$ — гильбертово пространство функций, заданных на области Ω , которые вместе со своими обобщенными производными первого порядка квадратично интегрируемы, причем сами функции обращаются в нуль на границе области $\partial\Omega$. Норму в $H_0^1(\Omega)$ берем в виде $\|g\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)}$, где $\nabla g = (|g_x|^2 + |g_y|^2 + |g_z|^2)^{1/2}$ — модуль градиента. В трехмерном случае имеет место вложение $H_0^1(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ с оценкой норм $\|g\|_{L_p(\Omega)} \leq c_p \|g\|_{H_0^1(\Omega)}$ для $1 \leq p \leq 6$ [21, п. 4.12].

Обозначим через $H^{-1}(\Omega)$ сопряженное к $H_0^1(\Omega)$ пространство. По теореме Рисса для любого $f \in H^{-1}(\Omega)$ существует единственный элемент $\eta \in H_0^1(\Omega)$ такой, что

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (5)$$

причем $\|\eta\|_{H_0^1(\Omega)} = \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} |\langle f, \varphi \rangle|$.

Для прямого и обратного преобразования Фурье используются формулы $\mathcal{F}(o) = \int_{R^3} o(r) e^{-ir\omega} dr$, $\mathcal{F}^{-1}(O) = (2\pi)^{-3} \int_{R^3} O(\omega) e^{ir\omega} d\omega$, равенство Парсеваля $\|\mathcal{F}(f)\|_{L_2(R^3)}^2 = (2\pi)^3 \|f\|_{L_2(R^3)}^2$ и равенство $\langle \mathcal{F}a, b \rangle_{L_2(R^3)} = \langle a, \mathcal{F}b \rangle_{L_2(R^3)}$. С помощью преобразования Фурье эквивалентная норма в пространстве $H_0^1(\Omega)$ записывается в виде $\|g\|_{H_0^1(\Omega)} \sim \|(1 + |\omega|^2)^{1/2} \mathcal{F}(g)\|_{L_2(R^3)}$, где функции из $H_0^1(\Omega)$ считаются продолженными нулем вне Ω .

При $p \geq 1$ свертка $(h * f)(s) = (f * h)(s) = \int_{R^3} h(s-r)f(r)dr$ функции $f \in L_p(R^3)$ с ядром $h \in L_1(R^3)$ принадлежит $L_p(R^3)$ и справедливо неравенство Янга [21, п. 2.24]:

$$\|h * f\|_{L_p(R^3)} \leq \|h\|_{L_1(R^3)} \|f\|_{L_p(R^3)}. \quad (6)$$

Используя определение прямого и обратного преобразований Фурье, (3) и равенства $h_j^*(-r) = h_j(r)$, $j = 1, 2$, нетрудно проверить справедливость следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. Для $h_{r'_3}$ из (3) справедливо равенство

$$\mathcal{F}(h_{r'_3}^*) = (2\pi)^3 \mathcal{F}^{-1}(h_{-r'_3}).$$

4. Дифференцируемость операторов прямой задачи. Будем рассматривать определенные в (2) и (4) операторы как операторы из пространства Соболева $H_0^1(\Omega)$ в $L_2(R^3)$.

Теорема 1. Определенный в (4) оператор $F(o) : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3)$ дифференцируем по Фреше в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Производная Фреше $F'(o) \in L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))$ на элементе $o \in H_0^1(\Omega)$ и приращении $g \in H_0^1(\Omega)$ определяется из равенства

$$F'(o)g = 2\operatorname{Re}[(h * o)(h^* * g)], \quad (7)$$

удовлетворяет оценке

$$\|F'(o)\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq 2c_4^2 \|h\|_{L_1(R^3)}^2 \|o\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (8)$$

и условию Литшица

$$\|F'(o) - F'(\tilde{o})\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq L_1 \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (9)$$

где $L_1 = 2c_4^2 \|h\|_{L_1(R^3)}^2$.

Сопряженный оператор

$$(F'(o))^* \in L(L_2(R^3) \rightarrow H^{-1}(\Omega))$$

определяется из равенства

$$(F'(o))^* s = 2\operatorname{Re}[h * ((h * o)s)] \quad (10)$$

и удовлетворяет оценке

$$\|(F'(o))^*\|_{L(L_2(R^3) \rightarrow H^{-1}(\Omega))} \leq 2c_4^2 \|h\|_{L_1(R^3)}^2 \|o\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим приращение оператора $F(o)$ на элементе $o \in H_0^1(\Omega)$, вызванное его приращением $g \in H_0^1(\Omega)$:

$$F(o + g) - F(o) = 2\operatorname{Re}[(h * o)(h^* * g)] + |h * g|^2,$$

где главная линейная часть приращения совпадает с (7).

Воспользовавшись неравенством Янга (6) и вложением $H_0^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ с неравенством норм $\|g\|_{L_4(R^3)} = \|g\|_{L_4(\Omega)} \leq c_4 \|g\|_{H_0^1(\Omega)}$, получим оценку для главной линейной части:

$$\begin{aligned} \|F'(o)g\|_{L_2(R^3)} &\leq 2\|(h * o)(h^* * g)\|_{L_2(R^3)} \leq 2\|h * o\|_{L_4(R^3)} \|h^* * g\|_{L_4(R^3)} \leq \\ &\leq 2\|h\|_{L_1(R^3)}^2 \|o\|_{L_4(R^3)} \|g\|_{L_4(R^3)} \leq 2c_4^2 \|h\|_{L_1(R^3)}^2 \|o\|_{H_0^1(\Omega)} \|g\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает (8). Аналогичные рассуждения используются для оценки остаточного члена $R_1 = |h * g|^2$:

$$\|R_1\|_{L_2(R^3)} \leq \|h * g\|_{L_4(R^3)} \|h^* * g\|_{L_4(R^3)} \leq c_4^2 \|h\|_{L_1(R^3)}^2 \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (12)$$

Таким образом, оператор $F(o)$ дифференцируем по Фреше в пространстве $H_0^1(\Omega)$, его дифференциал определяется по формуле (7), где $F'(o)$ является линейным непрерывным оператором из $H_0^1(\Omega)$ в $L_2(R^3)$. Для проверки условия Липшица (9) достаточно учесть вытекающее из (7) равенство $F'(o) - F'(\tilde{o}) = F'(o - \tilde{o})$ и применить оценку (8).

По определению сопряженного оператора $(F'(o))^* \in L(L_2(R^3) \rightarrow H^{-1}(\Omega))$ имеет место равенство $\langle (F'(o))^* s, g \rangle = \langle s, F'(o)g \rangle_{L_2(R^3)}$ для всех $s \in L_2(R^3), g \in H_0^1(\Omega)$, где в общем случае скобки слева обозначают соотношение двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$. Отсюда получаем

$$|\langle (F'(o))^* s, g \rangle| \leq \|s\|_{L_2(R^3)} \|F'(o)\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \|g\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Применяя затем (8), приходим к (11).

Получим теперь явное выражение для сопряженного оператора. Для этого с учетом формулы (7) запишем скалярное произведение $\langle s, F'(o)g \rangle_{L_2(\Omega)}$ в виде суммы $I + I^*$, где $I = \langle (h^* * g), (h * o)s \rangle_{L_2(\Omega)}$. С помощью преобразования Фурье и теоремы о свертке уединяем на первом месте скалярного произведения I множитель g :

$$I = \langle \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(h^* * g)), (h * o)s \rangle_{L_2(R^3)} = \langle \mathcal{F}(h^*)\mathcal{F}(g), \mathcal{F}^{-1}((h * o)s) \rangle_{L_2(R^3)} = \langle g, \mathcal{F}(\mathcal{F}(h^*)\mathcal{F}^{-1}((h * o)s)) \rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Используя равенство из леммы 1 и теорему о свертке для обратного преобразования Фурье, получим:

$$I = \langle g, \mathcal{F}(\mathcal{F}(h^*)\mathcal{F}^{-1}((h * o)s)) \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle g, h * ((h * o)s) \rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда вытекает (10). Теорема 1 доказана.

Следствие. Оператор $F(o)$ на любом шаре B_R радиуса $R > 0$ с центром в нуле в пространстве $H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(o) - F(\tilde{o})\|_{L_2(R^3)} \leq L_0 \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad L_0 = 4c_4^2 R \|h\|_{L_1(R^3)}^2. \quad (13)$$

Теорема 2. Определенный в (2) оператор $F_D(o) : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3)$ дифференцируем по Фреше в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Производная Фреше $F'_D(o) \in L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))$ на элементе $o \in H_0^1(\Omega)$ и приращении $g \in H_0^1(\Omega)$ определяется из равенства

$$F'_D(o)g = \iint_{R^2} 2\text{Re}[(h_{r'_3} * o)(h_{r'_3}^* * g)]D(r'_3)dr'_3, \quad (14)$$

удовлетворяет оценке

$$\|F'_D(o)\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq 2c_4^2 C_D(h) \|o\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (15)$$

и условию Липшица

$$\|F'_D(o) - F'_D(\tilde{o})\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq 2c_4^2 C_D(h) \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (16)$$

где $C_D(h) = \iint_{R^2} \|h_{r'_3}\|_{L_1(R^3)}^2 D(r'_3)dr'_3$.

Сопряженный оператор $(F'_D(o))^* \in L(L_2(R^3) \rightarrow H^{-1}(\Omega))$ определяется из равенства

$$(F'_D(o))^* s = \iint_{R^2} 2\text{Re}[h_{-r'_3} * ((h_{r'_3} * o)s)]D(r'_3)dr'_3 \quad (17)$$

и удовлетворяет оценке

$$\|(F'_D(o))^*\|_{L(L_2(R^3) \rightarrow H^{-1}(\Omega))} \leq 2c_4^2 C_D(h) \|o\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (18)$$

Доказательство. Преобразуя приращение оператора $F_D(o)$ аналогично доказательству теоремы 1 и обозначая $R_2(g) = \iint_{R^2} |h_{r'_3} * g|^2 D(r'_3)dr'_3 = F_D(g)$, получим:

$$F_D(o + g) - F_D(o) = \iint_{R^2} 2\text{Re}[(h_{r'_3} * o)(h_{r'_3}^* * g)]D(r'_3)dr'_3 + R_2(g).$$

В полученном равенстве линейно зависящее от приращения g первое интегральное слагаемое совпадает с (14) и, как нетрудно видеть, удовлетворяет оценке

$$\|F'_D(o)g\|_{L_2(R^3)} \leq 2c_4^2 C_D(h) \cdot \|o\|_{H_0^1(\Omega)} \|g\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (19)$$

откуда вытекает (15).

Для оценки остаточного члена $R_2(g)$ сначала, используя обобщенное неравенство Минковского [22, п. 1.3.2], внесем внешнюю норму внутрь интеграла по детектору, а затем проведем оценки подынтегральной функции аналогично доказательству теоремы 1:

$$\|R_2(g)\|_{L_2(R^3)} \leq \iint_{R^2} \| |h_{r'_3} * g|^2 \|_{L_2(R^3)} D(r'_3) dr'_3 \leq c_4^2 C_D(h) \cdot \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (20)$$

Следовательно, оператор $F_D(o)$ дифференцируем по Фреше в пространстве $H_0^1(\Omega)$, производная определяется из равенства (14). Для проверки условия Липшица (16) достаточно учесть вытекающее из (14) равенство $F'_D(o) - F'_D(\tilde{o}) = F'_D(o - \tilde{o})$ и применить оценку (15).

Из определяющего сопряженный оператор $(F'_D(o))^* \in L(L_2(R^3) \rightarrow H^{-1}(\Omega))$ равенства $\langle (F'_D(o))^* s, g \rangle = \langle s, F'_D(o)g \rangle_{L_2(R^3)}$ для всех $s \in L_2(R^3)$, $g \in H_0^1(\Omega)$ имеем

$$|\langle (F'_D(o))^* s, g \rangle| \leq \|s\|_{L_2(R^3)} \|F'_D(o)\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \|g\|_{H_0^1(\Omega)}$$

и с учетом (15) получаем (18).

Для получения явного выражения для $(F'_D(o))^*$ рассмотрим

$$\langle F'_D(o)g, s \rangle_{L_2(\Omega)} = \iint_{R^2} (I(r'_3) + I^*(r'_3)) D(r'_3) dr'_3, \quad (21)$$

где $I(r'_3) = \langle (h_{r'_3}^* * g), (h_{r'_3} * o)s \rangle_{L_2(\Omega)}$. С помощью преобразования Фурье и теоремы о свертке аналогично выводу (10) уединяем на первом месте скалярного произведения $I(r'_3)$ множитель $g \in H_0^1(\Omega)$:

$$I(r'_3) = \langle g, \mathcal{F}(\mathcal{F}(h_{r'_3}^*) \mathcal{F}^{-1}((h_{r'_3} * o)s)) \rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Используя равенство из леммы 1 и теорему о свертке для обратного преобразования Фурье, получим:

$$I(r'_3) = \langle g, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(h_{-r'_3}) \mathcal{F}^{-1}((h_{r'_3} * o)s)) \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle g, h_{-r'_3} * ((h_{r'_3} * o)s) \rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Подставляя полученное выражение в (21) и меняя порядок интегрирования, приходим к (17). Теорема 2 доказана.

Следствие. Оператор $F_D(o)$ на любом шаре B_R радиуса $R > 0$ с центром в нуле в пространстве $H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F_D(o) - F_D(\tilde{o})\|_{L_2(R^3)} \leq L_{D,0} \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad L_{D,0} = 4c_4^2 C_D(h) R. \quad (22)$$

5. Функционалы невязки и их свойства. Рассмотрим функционалы невязки для операторных уравнений (2), (4)

$$J(o) = \|F(o) - I\|_{L_2(R^3)}^2, \quad J_D(o) = \|F_D(o) - I_D\|_{L_2(R^3)}^2,$$

$I, I_D \in L_2(R^3)$, и исследуем свойства этих функционалов.

Теорема 3. Функционал $J(o)$ дифференцируем по Фреше на всем пространстве $H_0^1(\Omega)$. Градиент $J'(o) \in H_0^1(\Omega)$ является решением вариационной задачи

$$\langle J'(o), \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle 2(F'(o))^*(F(o) - I), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (23)$$

подчиняется оценке

$$\|J'(o)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 4c_4^2 \|h\|_{L_1(R^3)}^2 \|o\|_{H_0^1(\Omega)} \|F(o) - I\|_{L_2(R^3)} \quad (24)$$

и удовлетворяет условию Липшица на любом шаре B_R радиуса $R > 0$ с центром в нуле в пространстве $H_0^1(\Omega)$:

$$\|J'(o) - J'(\tilde{o})\|_{H_0^1(\Omega)} \leq L_J(R) \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (25)$$

где

$$L_J(R) = 16c_4^4 R \|h\|_{L_1(R^3)}^4 + 4c_4^2 S(R) \|h\|_{L_1(R^3)}^2, \quad S(R) = \sup_{o \in B_R} \|F(o) - I\|_{L_2(R^3)}.$$

Доказательство. Преобразуем приращение функционала $J(o)$ к виду

$$J(o + g) - J(o) = \|F(o + g) - F(o)\|_{L_2(R^3)}^2 + 2\langle F(o + g) - F(o), F(o) - I \rangle_{L_2(R^3)}.$$

Воспользуемся дифференцируемостью $F(o)$ по Фреше и подставим выражение для его приращения из доказательства теоремы 1. Имеем

$$J(o + g) - J(o) = \langle 2(F(o) - I), F'(o)g \rangle_{L_2(\Omega)} + R_3(g), \quad (26)$$

где $R_3(g) = R_{3,1}(g) + R_{3,2}(g)$, $R_{3,1}(g) = 2\langle F(g), F(o) - I \rangle_{L_2(R^3)}$, $R_{3,2}(g) = \|F'(o)g + R_1(g)\|_{L_2(R^3)}^2$. Для оценки $R_{3,1}(g)$ воспользуемся (8):

$$|R_{3,1}(g)| \leq 2\|F(g)\|_{L_2(R^3)}\|F(o) - I\|_{L_2(R^3)} \leq 4c_4^2\|h\|_{L_1(R^3)}^2 \cdot \|F(o) - I\|_{L_2(R^3)} \cdot \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Оценим слагаемое $R_{3,2}$ с помощью (8) и (12):

$$R_{3,2}(g) \leq 2\|F'(o)g\|_{L_2(R^3)}^2 + 2\|R_1(g)\|_{L_2(R^3)}^2 \leq 8c_4^4\|h\|_{L_1(R^3)}^4\|o\|_{H_0^1(\Omega)}^2\|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2c_4^4\|h\|_{L_1(R^3)}^4\|g\|_{H_0^1(\Omega)}^4.$$

Тогда $R_3(g)$ имеет второй порядок малости относительно $\|g\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Преобразуя линейную часть приращения функционала в (26) с помощью сопряженного оператора $(F'(o))^*$, получаем $\langle 2(F'(o))^*(F(o) - I), g \rangle_{L_2(\Omega)}$. Заметим, что такое представление не дает пока выражение для градиента функционала в пространстве $H_0^1(\Omega)$, поскольку его нужно еще представить в виде скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$. Таким образом, приходим к вариационной задаче (23), определяющей истинный градиент $J'(o) \in H_0^1(\Omega)$. Фактически (26) описывает реализацию теоремы Рисса (оператора Рисса) о представлении стоящего в правой части линейного непрерывного функционала в виде скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$ (см. (5)). В операторном виде градиент можно записать следующим образом:

$$J'(o) = (E - \Delta)^{-1}2(F'(o))^*(F(o) - I),$$

где E — единичный оператор, Δ — лапласиан в случае нулевых граничных условий.

Для оценки нормы градиента проводим оценки на основе (8)

$$\begin{aligned} \|J'(o)\|_{H_0^1(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} |\langle 2(F'(o))^*(F(o) - I), \varphi \rangle| = \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} |\langle 2(F(o) - I), F'(o)\varphi \rangle_{L_2(R^3)}| \leq \\ &\leq 2\|F(o) - I\|_{L_2(R^3)}\|F'(o)\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq 4c_4^2\|h\|_{L_1(R^3)}^2\|o\|_{H_0^1(\Omega)}\|F(o) - I\|_{L_2(R^3)} \end{aligned}$$

и получаем (24).

Проверим условие Липшица для градиента. Для любых $o, \tilde{o} \in B_R$ и $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$, в силу (23) имеем

$$\langle J'(o) - J'(\tilde{o}), \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle 2(F(o) - I), F'(o)\varphi \rangle_{L_2(R^3)} - \langle 2(F(\tilde{o}) - I), F'(\tilde{o})\varphi \rangle_{L_2(R^3)} = r_1 + r_2,$$

где $r_1 = \langle 2(F(o) - F(\tilde{o})), F'(o)\varphi \rangle_{L_2(R^3)}$, $r_2 = \langle 2(F(\tilde{o}) - I), F'(o - \tilde{o})\varphi \rangle_{L_2(R^3)}$.

Для оценки r_1 воспользуемся (8) и (13):

$$|r_1| \leq 2\|F(o) - F(\tilde{o})\|_{L_2(\Omega)}\|F'(o)\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq 16c_4^4R\|h\|_{L_1(R^3)}^4\|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Для оценки r_2 воспользуемся (8):

$$|r_2| \leq 2\|F(\tilde{o}) - I\|_{L_2(\Omega)}\|F'(o - \tilde{o})\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq 4c_4^2\|h\|_{L_1(R^3)}^2S(R)\|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Объединяя полученные оценки для $r_{1,2}$ и действуя аналогично выводу (24), получаем (25). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Функционал $J_D(o)$ дифференцируем по Фреше на всем пространстве $H_0^1(\Omega)$. Градиент $J'_D(o) \in H_0^1(\Omega)$ является решением вариационной задачи

$$\langle J'_D(o), \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle 2(F'_D(o))^*(F_D(o) - I), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (27)$$

подчиняется оценке

$$\|J'_D(o)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 4c_4^2 C_D(h) \|o\|_{H_0^1(\Omega)} \|F_D(o) - I\|_{L_2(R^3)} \quad (28)$$

и удовлетворяет условию Липшица на любом шаре B_R радиуса $R > 0$ с центром в нуле в пространстве $H_0^1(\Omega)$:

$$\|J'_D(o) - J'_D(\tilde{o})\|_{H_0^1(\Omega)} \leq L_{J_D}(R) \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (29)$$

где

$$L_{J_D}(R) = 16c_4^4 C_D^2(h) R + 4c_4^2 C_D(h) S_D(R), \quad S_D(R) = \sup_{o \in B_R} \|F_D(o) - I\|_{L_2(R^3)}.$$

Доказательство. Проводим рассуждения аналогично доказательству теоремы 3 на основе результатов теоремы 2. Преобразуем приращение функционала $J_D(o)$ на основе выражения для приращения $F_D(o)$ из доказательства теоремы 2:

$$J_D(o + g) - J_D(o) = \langle 2(F_D(o) - I_D), F'_D(o)g \rangle_{L_2(\Omega)} + R_4(g), \quad (30)$$

где $R_4(g) = R_{4,1}(g) + R_{4,2}(g)$, $R_{4,1}(g) = 2\langle F_D(g), F_D(o) - I_D \rangle_{L_2(R^3)}$, $R_{4,2}(g) = \|F'_D(o)g + R_2(g)\|_{L_2(R^3)}^2$. Для оценки $R_{4,1}(g)$ воспользуемся (20):

$$|R_{4,1}(g)| \leq c_4^2 C_D(h) \cdot \|F_D(o) - I_D\|_{L_2(R^3)} \cdot \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Оценим слагаемое $R_{4,2}$ с помощью (20) и (19):

$$R_{4,2}(g) \leq 2c_4^4 C_D^2(h) \cdot (4\|o\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Тогда $R_4(g)$ имеет второй порядок малости относительно $\|g\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Преобразуя линейную часть приращения функционала в (30) с помощью сопряженного оператора $(F'_D(o))^*$ и представляя результат в виде скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$, приходим к представлению градиента $J'_D(o) \in H_0^1(\Omega)$ в вариационной форме (27). В операторном виде градиент можно записать следующим образом:

$$J'_D(o) = (E - \Delta)^{-1} 2(F'_D(o))^* (F_D(o) - I),$$

где E — единичный оператор, Δ — лапласиан в случае нулевых граничных условий.

Оценку нормы градиента проводим аналогично доказательству теоремы 3 на основе (27) и (15):

$$\|J'_D(o)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\|F_D(o) - I\|_{L_2(R^3)} \|F'_D(o)\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq 4c_4^2 C_D(h) \|o\|_{H_0^1(\Omega)} \|F_D(o) - I\|_{L_2(R^3)}.$$

Отсюда получаем (28).

Проверим условие Липшица для градиента. Для любых $o, \tilde{o} \in B_R$ и $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$ в силу (23) имеем $\langle J'_D(o) - J'_D(\tilde{o}), \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = r_3 + r_4$, где

$$r_3 = \langle 2(F_D(o) - F_D(\tilde{o})), F'_D(o)\varphi \rangle_{L_2(R^3)}, \quad r_4 = \langle 2(F_D(\tilde{o}) - I), F'_D(o - \tilde{o})\varphi \rangle_{L_2(R^3)}.$$

Для оценки r_1 воспользуемся (15) и (22):

$$|r_3| \leq 2\|F_D(o) - F_D(\tilde{o})\|_{L_2(R^3)} \|F'_D(o)\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq 16c_4^4 C_D^2(h) R \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Для оценки r_4 воспользуемся (15):

$$|r_4| \leq 2\|F_D(\tilde{o}) - I_D\|_{L_2(\Omega)} \|F'_D(o - \tilde{o})\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq 4c_4^2 C_D(h) S_D(R) \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Объединяя полученные оценки для $r_{3,4}$, получаем (29). Теорема 4 доказана.

6. Оператор фурье-фильтрации и его свойства. Для построения стабилизатора рассмотрим оператор фурье-фильтрации

$$\Phi(\alpha, o) = \mathcal{F}^{-1}(\alpha(\omega) \mathcal{F}(P(o))),$$

где $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ — операторы прямого и обратного трехмерного преобразования Фурье, P — оператор продолжения нулем вне области Ω . Оператор фурье-фильтрации мы определяем на пространстве $H_0^1(\Omega)$. Его действие состоит в продолжении функции $o \in H_0^1(\Omega)$ нулем на $R^3 \setminus \bar{\Omega}$ с помощью оператора P с сохранением гладкости (т.е. $P(o) \in H^1(R^3)$), вычислении прямого преобразования Фурье, поточечного умножения



каждой фурье-гармоники на мультипликатор $\alpha(\omega)$ и взятии обратного преобразования Фурье. Зависящий от частотной переменной $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ вещественный мультипликатор $\alpha(\omega) \in L_\infty(R^3)$, $|\alpha(\omega)| \leq \alpha_0$, удовлетворяет условию $\alpha(\omega) = \alpha(-\omega)$, что обеспечивает вещественность результата.

Укажем на используемое далее свойство введенного оператора фурье-фильтрации при заданном $\alpha(\omega)$ по переменной o

$$\Phi(\alpha, o) \in L(L_2(\Omega) \rightarrow L_2(R^3)) \cap L(H_0^1(\Omega) \rightarrow H^1(R^3)),$$

справедливость которого вытекает из свойства $P \in L(L_2(\Omega) \rightarrow L_2(R^3)) \cap L(H_0^1(\Omega) \rightarrow H^1(R^3))$ и свойств преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha, g)\|_{L_2(R^3)}^2 &= (2\pi)^{-3} \|\alpha(\omega) \mathcal{F}(P(g))\|_{L_2(R^3)}^2 \leq (2\pi)^{-3} \|\alpha\|_{L_\infty(R^3)}^2 \|\mathcal{F}(P(g))\|_{L_2(R^3)}^2 = \\ &= \alpha_0^2 \|P(g)\|_{L_2(R^3)}^2 = \alpha_0^2 \|g\|_{L_2(\Omega)}^2, \\ \|(\Phi(\alpha, g))_x\|_{L_2(R^3)}^2 &= (2\pi)^{-3} \|i\omega_1 \alpha(\omega) \mathcal{F}(P(g))\|_{L_2(R^3)}^2 = (2\pi)^{-3} \|\alpha(\omega) \mathcal{F}((P(g))_x)\|_{L_2(R^3)}^2 \leq \\ &\leq (2\pi)^{-3} \alpha_0^2 \|\mathcal{F}((P(g))_x)\|_{L_2(R^3)}^2 = \alpha_0^2 \|(P(g))_x\|_{L_2(R^3)}^2 = \alpha_0^2 \|g_x\|_{L_2(R^3)}^2. \end{aligned}$$

При этом справедливы оценки норм оператора

$$\|\Phi\|_{L(L_2(\Omega) \rightarrow L_2(R^3))} \leq \alpha_0, \quad \|\Phi\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow H^1(R^3))} \leq \alpha_0. \quad (31)$$

Далее важную роль играет сопряженный оператор

$$\Phi^*(\alpha, f) = P^* (\mathcal{F}(\alpha(\omega) \mathcal{F}^{-1}(f))),$$

для которого, как легко проверить, при $f \in L_2(R^3)$, $g \in L_2(\Omega)$ справедливо тождество

$$\langle \Phi^*(\alpha, f), g \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle f, \Phi(\alpha, g) \rangle_{L_2(R^3)} \quad (32)$$

и включение $\Phi^*(\alpha, f) \in L(L_2(R^3) \rightarrow L_2(\Omega))$. Соотношение (32) позволяет распространить действие оператора $\Phi^*(\alpha, f)$ на сопряженное пространство $H^{-1}(R^3)$ по правилу

$$\langle \Phi^*(\alpha, f), g \rangle = \langle f, \Phi(\alpha, g) \rangle, \quad (33)$$

где $f \in H^{-1}(R^3)$, $g \in H_0^1(\Omega)$, в (33) скобки слева означают соотношение двойственности между $H^{-1}(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$, справа — между $H^{-1}(R^3)$ и $H^1(R^3)$. Тогда непосредственно из определения (33) вытекает оценка

$$\|\Phi^*(\alpha, f)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\Phi\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow H^1(R^3))} \cdot \|f\|_{H^{-1}(R^3)}, \quad (34)$$

т.е. $\Phi^*(\alpha, f) \in L(H^{-1}(R^3) \rightarrow H^{-1}(\Omega))$.

7. Стабилизатор с локализованным по частотам параметром и его свойства. Рассмотрим функционал, который назовем стабилизатором

$$J_\Phi(o) = \|\nabla \Phi(\alpha, o)\|_{L_2(R^3)}^2. \quad (35)$$

В этом выражении используется градиент, поскольку в оптических задачах для сравнения волновых фронтов существенны только их неоднородности, а сдвиг на постоянное значение не учитывается. Наличие оператора фурье-фильтрации в стабилизаторе позволяет управлять неоднородностями волнового фронта в частотной области. Заметим, что используемая нами фурье-фильтрация является эффективным инструментом преобразования и управления оптическим сигналом в частотном пространстве [16–20]. Привнесение идей управляемой фурье-фильтрации в построение локализованного по частотам параметра регуляризации позволяет эффективно проводить восстановление изображений, поскольку предоставляет возможность более тонко использовать информацию об изображении и шуме в частотной области.

Теорема 5. *Определенный в (35) стабилизатор $J_\Phi(o)$ дифференцируем по Фреше на всем пространстве $H_0^1(\Omega)$. Производная Фреше $J'_\Phi(o) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J'_\Phi(o) - J'_\Phi(\tilde{o})\|_{H_0^1(\Omega)} \leq L_\Phi \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

с константой $L_\Phi = 2\alpha_0^2$.

Доказательство. Рассмотрим приращение

$$\begin{aligned} J_{\Phi}(o+g) - J_{\Phi}(o) &= 2\langle \nabla \Phi(\alpha, o), \nabla \Phi(\alpha, g) \rangle_{L_2(\Omega)} + J_{\Phi}(g) = \\ &= -2\langle \Delta \Phi(\alpha, o), \Phi(\alpha, g) \rangle + J_{\Phi}(g) = -2\langle \Phi^*(\alpha, \Delta \Phi(\alpha, o)), g \rangle + J_{\Phi}(g), \end{aligned}$$

где содержащие лапласиан скобки задают соотношение двойственности на паре пространств $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$.

Оценим остаточный член $J_{\Phi}(g)$ с помощью (31):

$$J_{\Phi}(g) = \|\nabla \Phi(\alpha, g)\|_{L_2(R^3)}^2 \leq \|\Phi(\alpha, g)\|_{H^1(R^3)}^2 \leq \alpha_0^2 \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Рассмотрим главную линейную часть приращения. По теореме Рисса существует такой элемент $J'_{\Phi}(o) \in H_0^1(\Omega)$, что выполняется равенство

$$\langle -2\Phi^*(\alpha, \Delta \Phi(\alpha, o)), g \rangle = \langle J'_{\Phi}(o), g \rangle_{H_0^1(\Omega)}, \forall g \in H_0^1(\Omega). \quad (36)$$

Тождество (36) в операторной форме имеет вид

$$J'_{\Phi}(o) = (E - \Delta)^{-1} (-2\Phi^*(\alpha, \Delta \Phi(\alpha, o))) \in H_0^1(\Omega).$$

Для проверки условия Липшица для градиента воспользуемся (36), (31) и (34):

$$\begin{aligned} \|J'_{\Phi}(o) - J'_{\Phi}(\tilde{o})\|_{H_0^1(\Omega)} &= \| -2\Phi^*(\alpha, \Delta \Phi(\alpha, o - \tilde{o})) \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \\ &\leq 2\|\Phi^*\|_{L(H^{-1}(R^3) \rightarrow H^{-1}(\Omega))} \|\Delta \Phi(\alpha, o - \tilde{o})\|_{H^{-1}(R^3)} \leq \\ &\leq 2\|\Phi\|_{L(H_0^1(\Omega) \rightarrow H^1(R^3))}^2 \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)} = 2\alpha_0^2 \|o - \tilde{o}\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

8. Функционал Тихонова с фурье-фильтром в стабилизаторе и градиентный метод его минимизации. Обратная задача конфокальной микроскопии состоит в определении исходного трехмерного объекта $o(r_s)$ по наблюдаемым изображениям на детекторе $F_D(o)$ (или $F(o)$), где в рассматриваемой постановке функция рассеяния точки $h_{r'_3}(r_1)$ считается известной.

Для устойчивого нахождения приближенного решения обратной задачи введем функционалы Тихонова $T(o)$ и $T_D(o)$ с локализованным по частотам параметром стабилизатора $\alpha(\omega)$:

$$T(o) = J(o) + J_{\Phi}(o), \quad T_D(o) = J_D(o) + J_{\Phi}(o), o \in H_0^1(\Omega). \quad (37)$$

Заметим, что используемый нами стабилизатор обобщает выражение для классического стабилизатора со скалярным параметром α . Если $\alpha(\omega) \equiv \alpha$ — константа, то выражение превращается в функционал Тихонова со стандартным стабилизатором $T_D(o) = J_D(o) + \alpha^2 \|\nabla o\|_{L_2(\Omega)}^2, o \in H_0^1(\Omega)$.

Теорема 6. *Определенные в (37) функционалы $T(o)$ и $T_D(o)$ дифференцируемы по Фреше на всем пространстве $H_0^1(\Omega)$. На любом шаре B_R радиуса R с центром в нуле в пространстве $H_0^1(\Omega)$ производные Фреше $T'(o), T'_D(o) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ определяются из равенств*

$$\begin{aligned} T'(o) &= 2(E - \Delta)^{-1} ((F'(o))^*(F(o) - I) - \Phi^*(\alpha, \Delta \Phi(\alpha, o))), \\ T'_D(o) &= 2(E - \Delta)^{-1} ((F'_D(o))^*(F_D(o) - I) - \Phi^*(\alpha, \Delta \Phi(\alpha, o))) \end{aligned}$$

и удовлетворяют условию Липшица

$$\begin{aligned} \|T'(o) - T'(g)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq L \|o - g\|_{H_0^1(\Omega)}, \\ \|T'_D(o) - T'_D(g)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq L_D \|o - g\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

где $L = L_J(R) + 2\alpha_0^2$, $L_D = L_{J_D}(R) + 2\alpha_0^2$. **Доказательство** сводится к использованию теорем 3–5.

Будем рассматривать задачу минимизации функционалов (37) на множестве B_R в качестве вариационного аналога обратной задачи (2). Для определенности далее рассматривается $T_D(o)$. На основе



полученных в теореме 6 выражений для градиентов функционала Тихонова для решения задачи минимизации будем применять один вариант градиентного метода с проекцией $\mathcal{P}$ на множество B_R :

$$o_{m+1} = o_m + \lambda_m \overline{o_m}, \quad (38)$$

$$\overline{o_m} = \mathcal{P}(o_m - T'_D(o_m)) - o_m, \quad o_0 \in B_R, \quad (39)$$

$$\lambda_m = \min \left(\frac{2}{L_D + \theta}, 1 \right), \quad (40)$$

где L_D определено в теореме 6, $\theta > 0$, $m = 1, 2, \dots$. Как показано в [23], метод (38)–(40) порождает монотонно убывающую последовательность значений функционала и при $m \rightarrow +\infty$ справедливо предельное соотношение

$$\|o_m - \mathcal{P}(o_m - T'_D(o_m))\| \rightarrow 0,$$

представляющее собой предельное необходимое условие экстремума функционала $T_D(o)$ на B_R . При практической реализации численного алгоритма (38)–(40) используется правило останова, состоящее в малости изменения функционала T_D на итерации: $\|T_D(o_m) - T_D(o_{m-1})\| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

9. Численное моделирование оптического секционирования. Численное моделирование проводилось для полупрозрачного объекта, размеры которого

$$[-0.5 \text{ mm}, 0.5 \text{ mm}] \times [-0.5 \text{ mm}, 0.5 \text{ mm}] \times [-200 \text{ }\mu\text{m}, 200 \text{ }\mu\text{m}]$$

характерны для офтальмологических приложений. Использовались типичные для глаза человека параметры из табл. 1.

Таблица 1. Значения для вычислительного эксперимента

Table 1. Values for the computational experiment

$f_1 = f_2 = f$	r_1	r_2	r_0	r_D	λ	ω
17 mm	3 mm	3 mm	1 mm	0.6 mm	$0.63 \text{ }\mu\text{m}$	1 mm

Вычисления проводились на сетке $512 \times 512 \times 90$. Во всех экспериментах применение операторов прямого и обратного лапласиана проводилось в частотной области. В конце каждой итерации дополнительно в качестве постобработки применялась проекция $\mathcal{P}^-$ на множество неотрицательных чисел:

$$\mathcal{P}^-(o) = \begin{cases} o(r), & o(r) \geq 0, \\ 0, & o(r) < 0. \end{cases}$$

В первом эксперименте в качестве искомого полупрозрачного образца выступал многослойный объект, составленный из тонких слоев изображений глазного дна, повернутых на 90° (рис. 1). Для моделирования работы конфокальной системы мы применили к образцу прямую задачу (1) для получения наблюдаемых изображений в каждом слое (рис. 2). Полученные изображения составляют правую часть в уравнении (1), для которых точное решение известно по построению.

Для моделирования решения обратной задачи в вариационной постановке применим градиентный метод (38)–(40) к слоям на рис. 2 с постоянным шагом на итерациях и скалярным параметром α . На рис. 3 показаны результаты восстановления наблюдаемых изображений (рис. 2) с параметром $\alpha = 0.01$ за 30 итераций градиентного метода.

По рисункам видно хорошее восстановление искомого слоя и значительное уменьшение влияния соседних размытых слоев. Однако на работу градиентного метода было потрачено значительное время (3 часа), что говорит о необходимости применения методов ускорения вычислений. Один из примеров таких методов приведен в следующем подразделе.

9.1. Частотное обрезание изображения. Градиентный метод (38)–(40) является очень затратным по времени вычисления. На каждой итерации требуется вычислять две трехмерные свертки в каждой точке детектора и затем обратный трехмерный лапласиан. Причем вычисления нельзя проводить только в фурье-области, так как внутри одной из свертки присутствует поэлементное умножение на матрицу невязки. Поэтому в этом подразделе предлагается метод частотного обрезания изображения.

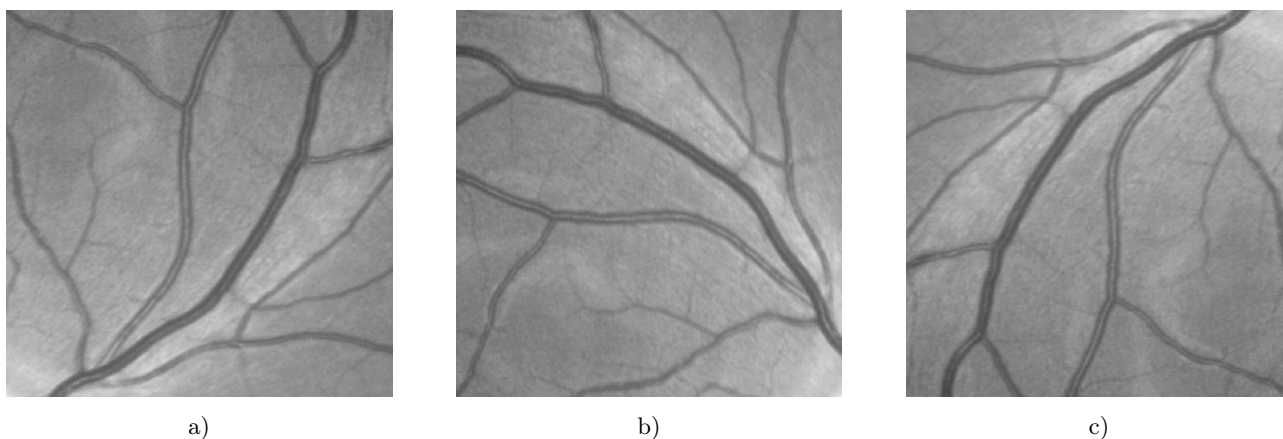


Рис. 1. Слои из изображений глазного дна
Fig. 1. Layers of fundus images

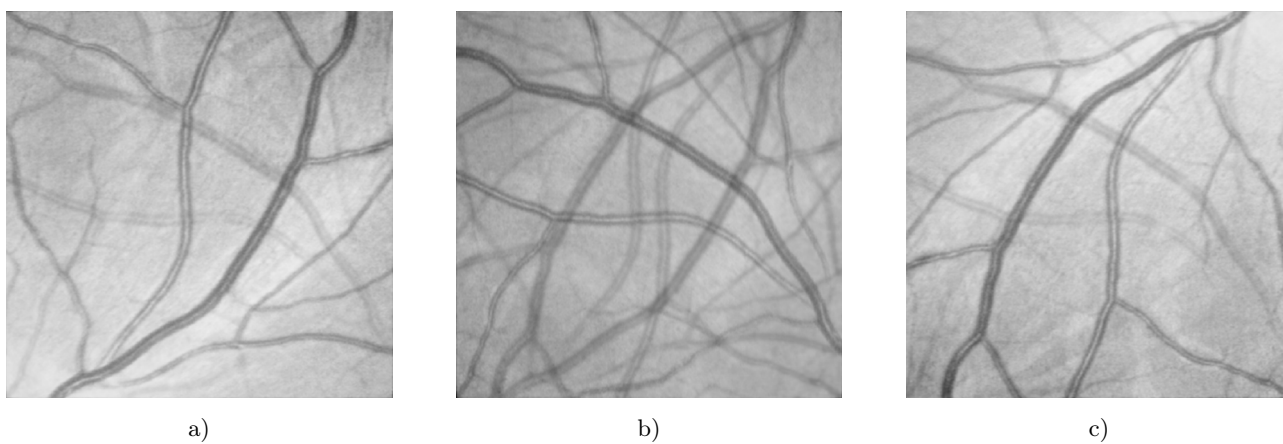


Рис. 2. Наблюдаемые изображения слоев
Fig. 2. Observed images of layers

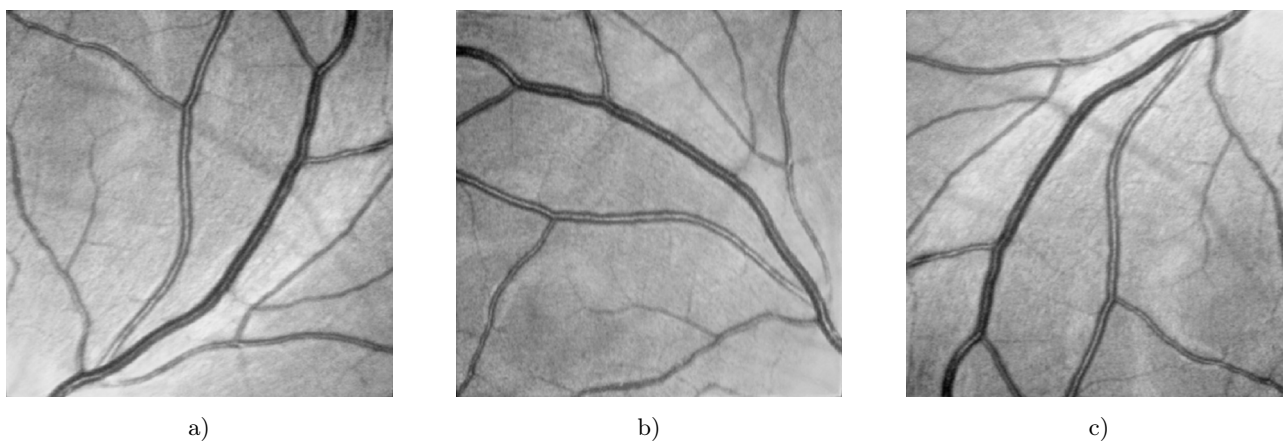


Рис. 3. Результат градиентного метода
Fig. 3. The result of the gradient method

Суть метода заключается в удалении высоких частот изображения и последующего применения градиентного метода (38)–(40) к уменьшенному изображению, что назовем первым этапом. На втором этапе результирующее изображение увеличиваем до исходного размера, добавлением нулевых высоких частот, и снова подаем на вход градиентному методу, но с меньшим количеством итераций.

В экспериментах изображение уменьшали в 4 раза, что на первом этапе дало увеличение скорости в 4 раза. На втором этапе число итераций было уменьшено в 4 раза. В результате после двух этапов получаем увеличение скорости в 2 раза, что является существенным увеличением. Эксперименты проводились с параметром $\alpha = 0.01$.

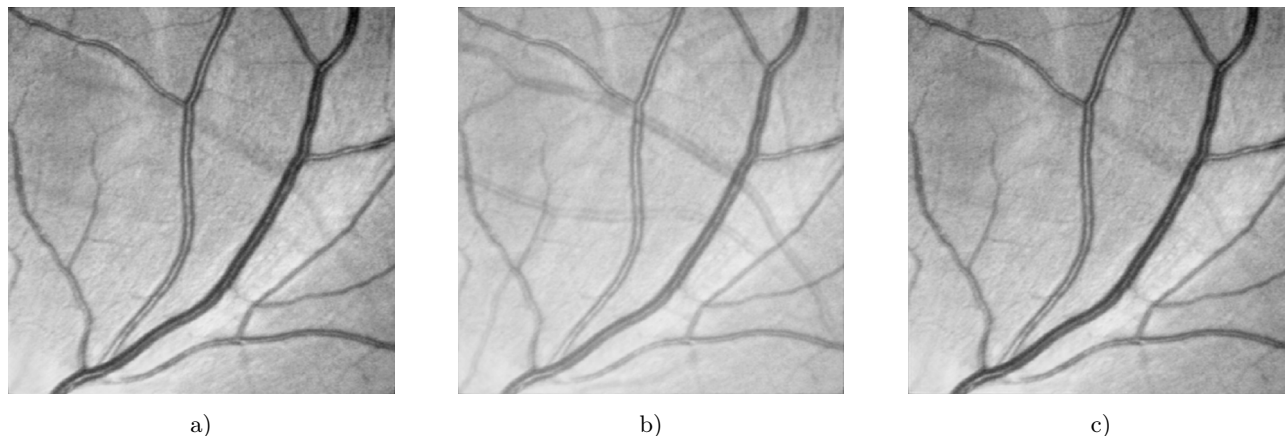


Рис. 4. Сравнение результатов восстановления для первого слоя

Fig. 4. Comparison of recovery results for the first layer

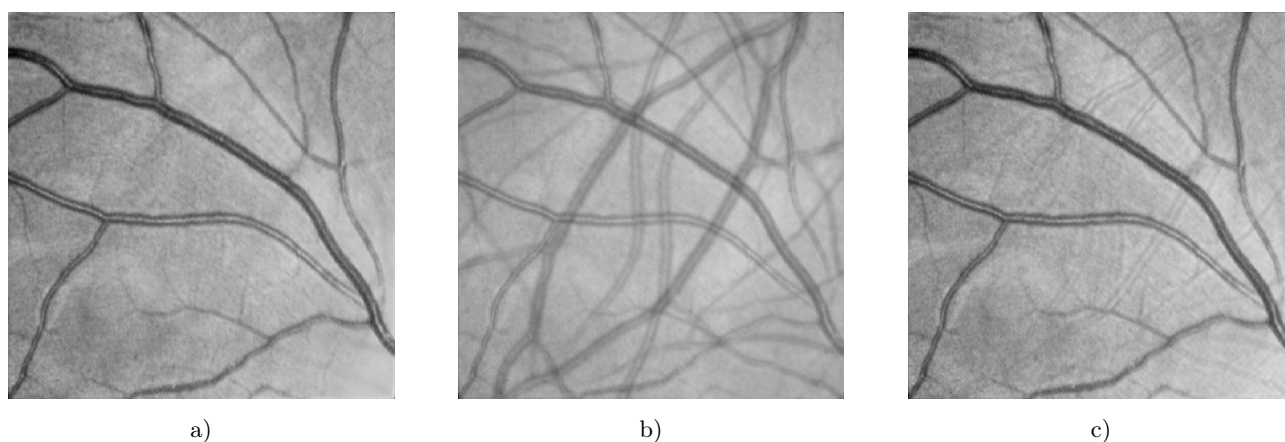


Рис. 5. Сравнение результатов восстановления для второго слоя

Fig. 5. Comparison of recovery results for the second layer

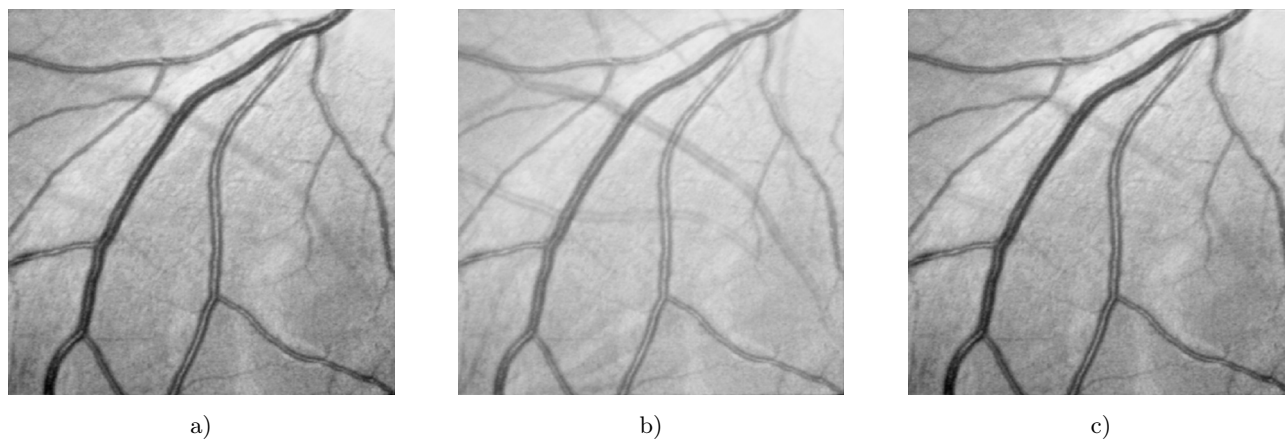


Рис. 6. Сравнение результатов восстановления для третьего слоя

Fig. 6. Comparison of recovery results for the third layer

На рис. 4–6 приведено сравнение результата восстановления с полноразмерными изображениями (рис. 4 а, 5 а, 6 а) и результата восстановления с частотным обрезанием изображения (рис. 4 с, 5 с, 6 с). По центру (рис. 4 б, 5 б, 6 б) показаны наблюдаемые изображения с рис. 2. Видно, что частотное обрезание изображения хуже восстановило высокие частоты, что видно на рис. 6 с. Однако это не сильно повлияло на общее качество восстановления, а выигрыш во времени вычисления перекрывает отмеченный недостаток.

9.2. Градиентный метод с фурье-фильтром в стабилизаторе. Приведем результат применения градиентного метода с нетривиальным фурье-фильтром. В этом примере искомый образец составлен из слоев симулированных линий с гауссовым размытием границ для выполнения требований гладкости. На рис. 7 показаны исходные слои, а на рис. 8 показан результат прямой задачи (1), т.е. их изображения, полученные в конфокальной системе.

В градиентном методе (38)–(40) выбор скалярного параметра $\alpha(\omega)$ играет важную роль для обратной задачи. От него зависит, какая часть изображения восстановится. При малом значении параметра $\alpha = 0.01$ хорошо восстанавливаются резкие переходы, а именно границы, но остаются внутренности соседних слоев (рис. 9). При большом значении параметра $\alpha = 0.1$ хорошо восстанавливаются плавные переходы, но остаются границы (рис. 10). Также места пересечений начинают пропадать.

Градиентный метод с зависящим от частотных переменных мультипликатором $\alpha(\omega)$ реализуем посредством его выбора в виде кусочно-постоянной функции с указанными выше большим и малым значениями параметра для разных частей изображения. Для высоких частот, соответствующих резким переходам, будем брать малое значение параметра $\alpha = 0.01$, а для низких частот, соответствующих плавным переходам, возьмем большое значение параметра $\alpha = 0.1$.

На рис. 11 показан пример одного периода трехмерного спектра по слоям для изображений (рис. 8), продолженных четным гладким образом на границах. В качестве нормировки спектра использовался арктангенс. Как видно, по слоям спектр то сужается, то расширяется. Для определения области низких и высоких частот требуется учитывать эту динамику.

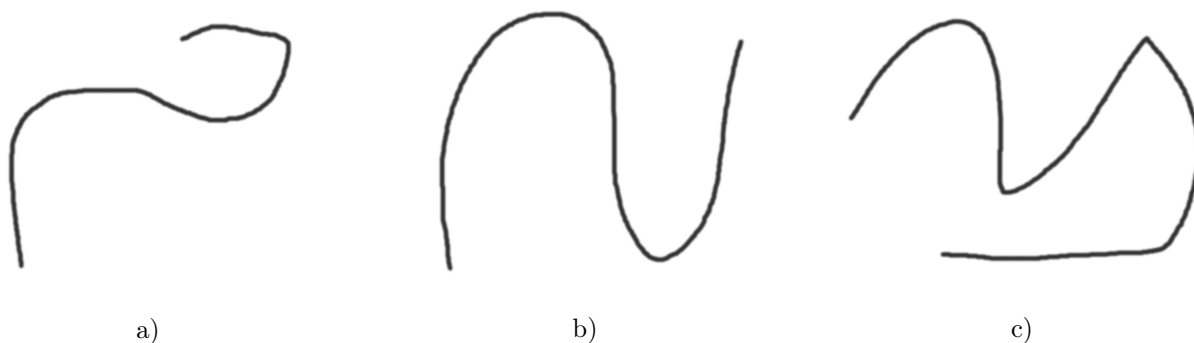


Рис. 7. Симулированные линии с гауссовым размытием

Fig. 7. Simulated lines with Gaussian blur

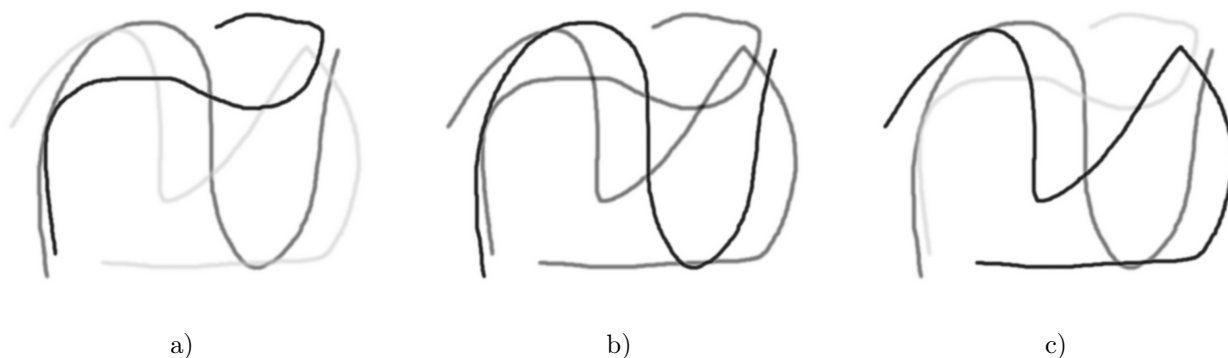


Рис. 8. Наблюдаемые изображения симулированных линий

Fig. 8. Observed images of simulated lines

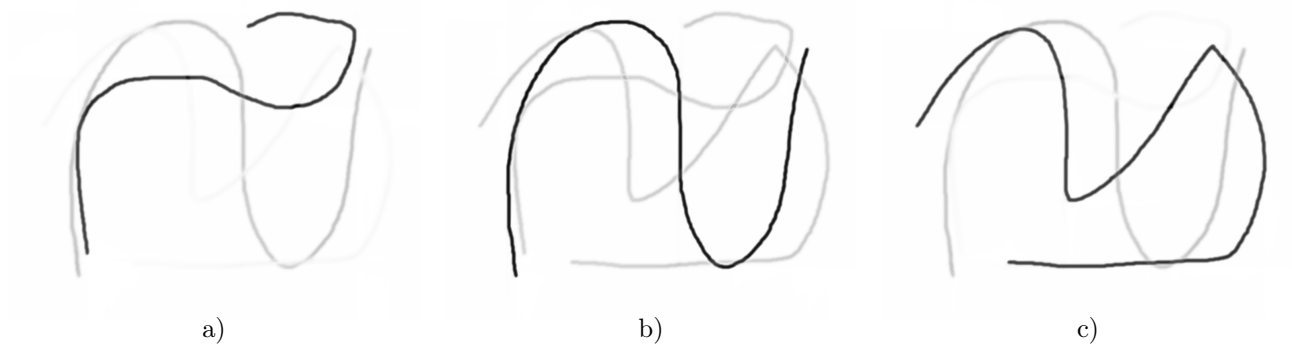


Рис. 9. Результат восстановления с малым параметром $\alpha = 0.01$

Fig. 9. The result of recovery with a small parameter $\alpha = 0.01$

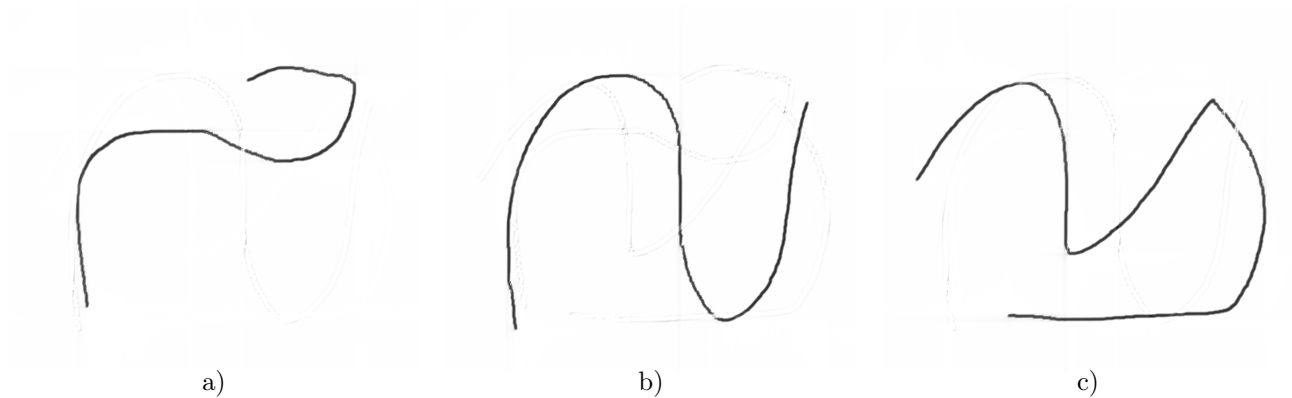


Рис. 10. Результат восстановления с большим параметром $\alpha = 0.1$

Fig. 10. The result of recovery with a large parameter $\alpha = 0.1$

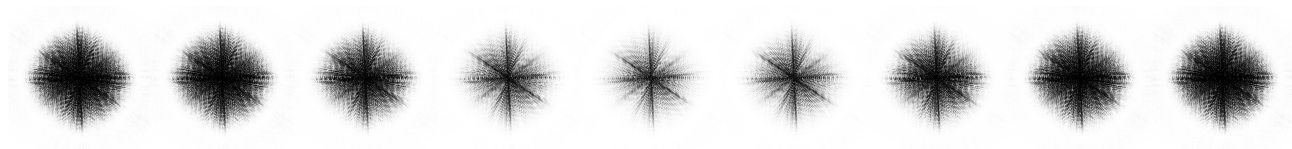


Рис. 11. Сечения энергетического спектра наблюдаемого объекта

Fig. 11. Cross-sections of the energy spectrum of the observed object



Рис. 12. Маска высоких и низких частот

Fig. 12. High and low frequency mask

На рис. 12 показан пример частотных масок для рис. 11, где белая область соответствует низким частотам, а все остальное — высоким.

Применяя большое значение параметра α для низких частот и малое значение параметра для высоких, получим следующий результат градиентного метода на рис. 13.

Видно, что хорошо восстановились как границы, так и внутренности соседних слоев. Также места пересечений слоев не пострадали, как это было на рис. 10. Это говорит о эффективности использования локализованного по частотам параметра α для построения функционала Тихонова и градиентного метода (38)–(40).

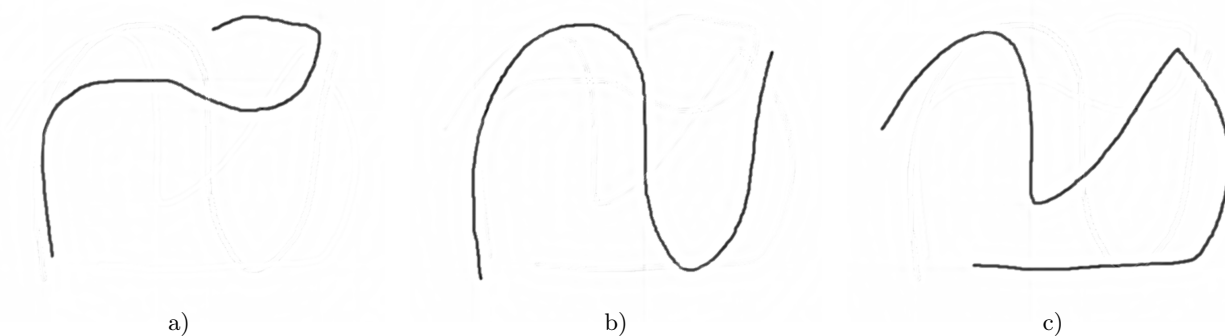


Рис. 13. Результат восстановления с дополнительной обработкой

Fig. 13. The result of restoration with additional processing

10. Заключение. Поставлена задача восстановления трехмерных полупрозрачных объектов для нелинейной модели конфокальной оптической системы на основе минимизации функционала Тихонова с фурье-фильтром в стабилизаторе. Установлена дифференцируемость по Фреше функционала Тихонова в пространстве Соболева и получены оценки константы Липшица для его градиента. Предложен метод минимизации функционала Тихонова, допускающий экономичную реализацию на основе применения градиентного метода к изображениям, предварительно уменьшенным обрезанием в частотной области, и повторного применения градиентного метода к полноразмерному результату, но с уменьшенным числом итераций. Приведенные результаты численных экспериментов на изображениях глазного дна и симулированных изображениях показывают эффективность использования вариационного подхода на основе градиентного метода минимизации функционала Тихонова с фурье-фильтром в стабилизаторе.

Список литературы

1. Paddock S.W., ed. Confocal Microscopy. Methods and Protocols, 1st ed. Methods in Molecular Biology (book series (MIMB)), Vol. 122). New York: Humana Press, 1999. doi [10.1385/159259722X](https://doi.org/10.1385/159259722X).
2. Pawley J.B., ed. Handbook of biological confocal microscopy, 3 ed. New York: Springer, 2006. doi [10.1007/978-0-387-45524-2](https://doi.org/10.1007/978-0-387-45524-2).
3. Jerome W.G., Robert L.P., (eds.) Basic confocal microscopy. Cham: Springer, 2018. doi [10.1007/978-0-387-78175-4](https://doi.org/10.1007/978-0-387-78175-4).
4. Bille J.F., ed. High resolution imaging in microscopy and ophthalmology. New Frontiers in Biomedical Optics, 1st ed. Cham: Springer, 2019. doi [10.1007/978-3-030-16638-0](https://doi.org/10.1007/978-3-030-16638-0).
5. Guthoff R.F., Baudouin C., Stave J. Atlas of confocal laser scanning in-vivo microscopy in ophthalmology: principles and applications in diagnostic and therapeutic ophthalmology, 1st ed. Berlin: Springer, 2006. doi [10.1007/3-540-32707-X](https://doi.org/10.1007/3-540-32707-X).
6. Wilson T., Sheppard C. Theory and practice of scanning optical microscopy. London: Academic Press Inc, 1984.
7. Gu M. Principles of three-dimensional imaging in confocal microscopes. Singapore: World Scientific, 1996. doi [10.1046/j.1365-2818.1999.0429c.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-2818.1999.0429c.x).
8. Roorda A., Romero-Borja F., Donnelly III W.J., et al. Adaptive optics scanning laser ophthalmoscopy // Opt. Express. 2002. 10, N 9. 405–412. doi [10.1364/OE.10.000405](https://doi.org/10.1364/OE.10.000405).
9. Williams D.R., Burns S.A., Miller D.T., Roorda A. Evolution of adaptive optics retinal imaging // Biomed. Opt. Express. 2023. 14, N 3. 1307–1338. doi [10.1364/B0E.485371](https://doi.org/10.1364/B0E.485371).
10. Бажитов С.Д., Ларичев А.В., Разгулин А.В. Исследование одной конфокальной оптической системы для офтальмологических приложений // Компьютерная оптика. 2026. 50, № 2. Article Number 1735. doi [10.18287/COJ1735](https://doi.org/10.18287/COJ1735).
11. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач, 2-е изд. М.: Наука, 1979.
12. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука. Физматлит, 1990.
13. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
14. Савелова Т.И. О регуляризации нелинейных интегральных уравнений типа свертки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. 19, № 1. 22–28. [U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 19, N 1. 20–27 (1979)]. <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf5431>. Дата обращения: 11 сентября 2026.
15. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука. Физматлит, 1995.



16. Degtiarev E.V., Vorontsov M.A. Spatial filtering in nonlinear two-dimensional feedback systems: phase-distortion suppression // J. Opt. Soc. Amer. Ser. B. 1995. **12**, N 7. 1238–1248. doi [10.1364/JOSAB.12.001238](https://doi.org/10.1364/JOSAB.12.001238).
17. Larichev A.V., Nikolaev I.P., Violino P. LCLV-based system for high resolution wavefront correction: phase knife as a feedback intensity producer // Opt. Commun. 1997. **138**, N (1–3). 127–135. doi [10.1016/S0030-4018\(97\)00031-X](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(97)00031-X).
18. Потапов М.М., Чечкина К.А. Об одной модели амплитудно-фазовой фильтрации в нелинейной оптической системе с обратной связью // Вестн. моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1997. № 4. 31–36.
19. Разгулин А.В., Чушкин В.А. О задаче оптимальной Фурье-фильтрации для одного класса моделей нелинейных оптических систем с обратной связью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. **44**, № 9. 1608–1618. [Comput. Math. Math. Phys. **44**, N 9. 1528–1538 (2004)]. <http://mi.mathnet.ru/zvmmf779>. Дата обращения: 11 сентября 2026.
20. Разгулин А.В., Сазонова С.В. О задаче матричной Фурье-фильтрации для одного класса моделей нелинейных оптических систем с обратной связью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. **57**, № 9. 1403–1420. [Comput. Math. Math. Phys. **57**, N 9. 1385–1403 (2017)]. doi [10.7868/S0044466917090125](https://doi.org/10.7868/S0044466917090125). <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf10607>. Дата обращения: 11 сентября 2026.
21. Adams R.A., Fournier J.J.F. Sobolev Spaces, 2nd ed. Pure and Applied Mathematics (series), Vol. 140. Amsterdam: Elsevier, 2003.
22. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
23. Разгулин А.В. О методе проекции градиента для квазидифференцируемых функционалов с гильбертовым градиентом // Вестн. Моск. ун-та. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2006. № 1. 12–15.
24. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения (Учебно-методическое пособие). М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2010.

Получена
17 июля 2026 г.

Принята
3 августа 2026 г.

Опубликована
16 сентября 2026 г.

Информация об авторах

Сергей Денисович Бажитов — аспирант; 1) Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация; 2) Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

Александр Витальевич Разгулин — д.ф.-м.н., заведующий кафедрой; 1) Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 1, стр. 52, 119991, Москва, Российская Федерация; 2) Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Ленинские горы, 1, 119991, Москва, Российская Федерация.

Андрей Викторович Ларичев — к.ф.-м.н., доцент; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 1, стр. 2, 119991, Москва, Российская Федерация.

References

1. S. W. Paddock (ed.), *Confocal Microscopy. Methods and Protocols*, 1st ed. in *Methods in Molecular Biology (book series (MIMB))*, Vol. 122 (Humana Press, New York, 1999). doi [10.1385/159259722X](https://doi.org/10.1385/159259722X).
2. J. B. Pawley (ed.), *Handbook of Biological Confocal Microscopy*, 3 ed. (Springer, New York, 2006). doi [10.1007/978-0-387-45524-2](https://doi.org/10.1007/978-0-387-45524-2).
3. W. G. Jerome and L. P. Robert (eds.), *Basic Confocal Microscopy*, 2d ed. (Springer, Cham, 2018). doi [10.1007/978-0-387-78175-4](https://doi.org/10.1007/978-0-387-78175-4).
4. J. F. Bille (ed.), *High Resolution Imaging in Microscopy and Ophthalmology. New Frontiers in Biomedical Optics*, 1st ed. (Springer, Cham, 2019). doi [10.1007/978-3-030-16638-0](https://doi.org/10.1007/978-3-030-16638-0).
5. R. F. Guthoff, C. Baudouin, and J. Stave, *Atlas of Confocal Laser Scanning In-vivo Microscopy in Ophthalmology: Principles and Applications in Diagnostic and Therapeutic Ophthalmology*, 1st ed. (Springer, Berlin, 2006). doi [10.1007/3-540-32707-X](https://doi.org/10.1007/3-540-32707-X).

6. T. Wilson and C. Sheppard, *Theory and practice of scanning optical microscopy* (Academic Press Inc, London, 1984).
7. M. Gu, *Principles of Three-Dimensional Imaging in Confocal Microscopes* (World Scientific, Singapore, 1996). doi [10.1046/j.1365-2818.1999.0429c.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-2818.1999.0429c.x).
8. A. Roorda, F. Romero-Borja, W. J. Donnelly III, et al., “Adaptive optics scanning laser ophthalmoscopy,” *Opt. Express* **10** (9), 405–412 (2002). doi [10.1364/OE.10.000405](https://doi.org/10.1364/OE.10.000405).
9. D. R. Williams, S. A. Burns, D. T. Miller, and A. Roorda, “Evolution of adaptive optics retinal imaging,” *Biomed. Opt. Express* **14** (3), 1307–1338 (2023). doi [10.1364/BOE.485371](https://doi.org/10.1364/BOE.485371).
10. S. D. Bazhitov, A. V. Larichev, and A. V. Razgulin, “Research of one confocal optical system for ophthalmic applications,” *Computer Optics* **50** (2), Article Number 1735. (2026) [in Russian]. doi [10.18287/COJ1735](https://doi.org/10.18287/COJ1735).
11. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods for solving ill-posed problems, 2nd ed.* (Nauka, M., 1979) [in Russian].
12. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical methods for solving ill-posed problems* (Nauka, M., 1990) [in Russian].
13. V. A. Morozov, *Regular methods for solving ill-posed problems* (Nauka, M., 1987) [in Russian].
14. T. I. Savelova, “Regularization of non-linear integral equations of the convolution type,” *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **19** (1), 20–27 (1979). doi [10.1016/0041-5553\(79\)90063-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90063-6).
15. A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, and A. G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems (Applied Mathematics)* (Chapman and Hall/CRC, London, 1997).
16. E. V. Degtiarev and M. A. Vorontsov, “Spatial filtering in nonlinear two-dimensional feedback systems: phase-distortion suppression,” *J. Opt. Soc. Amer. Ser. B* **12** (7), 1238–1248 (1995). doi [10.1364/JOSAB.12.001238](https://doi.org/10.1364/JOSAB.12.001238).
17. A. V. Larichev, I. P. Nikolaev, and P. Violino, “LCLV-based system for high resolution wavefront correction: phase knife as a feedback intensity producer,” *Opt. Commun.* **138** (1–3), 127–135 (1997). doi [10.1016/S0030-4018\(97\)00031-X](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(97)00031-X).
18. M. M. Potapov and K. A. Chechkina, “On one model of amplitude-phase filtering in a nonlinear optical system with feedback,” *Moscow University Bulletin. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics* (4), 31–36 (1997) [in Russian].
19. A. V. Razgulin and V. A. Chushkin, “On the problem of optimal Fourier filtering for a class of models of nonlinear optical systems with feedback,” *Computational Mathematics and Mathematical Physics* **44** (9), 1528–1538 (2004).
20. A. V. Razgulin and S. V. Sazonova, “On the matrix Fourier filtering problem for a class of models of nonlinear optical systems with a feedback,” *Computational Mathematics and Mathematical Physics* **57** (9), 1385–1403 (2017). doi [10.1134/S0965542517090123](https://doi.org/10.1134/S0965542517090123). <https://doi.org/10.1134/S0965542517090123>. Cited September 11, 2026.
21. R. A. Adams and J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces, 2nd ed. Pure and Applied Mathematics (series), Vol. 140* (Elsevier, Amsterdam, 2003).
22. S. M. Nikol’skii, *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems* (Springer, Berlin, 1975).
23. A. V. Razgulin, “On a projection-gradient method for quasi-differentiable functionals with Hölder-continuous gradient,” *Moscow University Bulletin N 1*, 12–15 (2006) [in Russian].
24. F. P. Vasiliev, M. A. Kurzchansky, M. M. Potapov, and A. V. Razgulin, *Approximate solution of dual control and observation problems* (Publishing Department of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University, MAKS Press, M., 2010) [in Russian].

Received
July 17, 2026

Accepted
August 3, 2026

Published
September 16, 2026

Information about the authors

Sergey D. Bazhitov — PhD Student; 1) Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia; 2) Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.

Alexander V. Razgulin — Dr. Sci., Head of Department; 1) Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Leninskie Gory, 1, building 52, 119991, Moscow, Russia; 2) Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, 119991, Moscow, Russia.

Andrey V. Larichev — Ph. D., Associate Professor; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie Gory, 1, building 2, 119991, Moscow, Russia.