2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

doi 10.26089/NumMet.v27r447 УДК 519.6

Параллельная MPI+GPU реализация 3D акустической полноволновой инверсии на преломленно-рефрагированных волнах

Д. С. Братчиков
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0009-0009-0752-9648, e-mail: d.s.bratchikov@math.nsc.ru

К. Г. Гадыльшин
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001-7247-6911, e-mail: gadylshin@gmail.com

С. В. Шарин
ООО "РН-Технологии", Москва, Российская Федерация
ORCID: 0009-0002-6718-3473, e-mail: svsharin@rn-t.ru

А. М. Шкуратов
ООО "РН-Технологии", Москва, Российская Федерация
ORCID: 0009-0002-0765-7681, e-mail: amshkuratov@rn-t.ru

Аннотация: В работе представлена параллельная реализация трехмерной акустической полноволновой инверсии на преломленно-рефрагированных волнах для обработки данных наземной сейсморазведки. Прямое моделирование волновых полей основано на применении конечно-разностной схемы высокого порядка с поглощающими граничными условиями типа CPML и реализовано на графических ускорителях с использованием технологии CUDA. Для ускорения вычисления градиента целевого функционала предложена параллельная реализация на базе MPI с динамической балансировкой нагрузки по источникам. Проведены численные эксперименты для синтетической трехмерной модели, демонстрирующие эффективность предложенного подхода и близкую к линейной сильную масштабируемость параллельного алгоритма.

Ключевые слова: полноволновая инверсия, акустика, преломленно-рефрагированные волны, MPI, CUDA.

Благодарности: Фундаментальная часть исследования, содержащая разработку численных методов и алгоритмов моделирования и обращения волновых полей, а также их эффективную реализацию на архитектурах графических ускорителей с использованием технологии CUDA, выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки России для ИМ СО РАН (№ FWNF-2026-0018).
Численные эксперименты проведены на высокопроизводительной системе вычислений "Сергей Годунов".

Для цитирования: Братчиков Д.С., Гадыльшин К.Г., Шарин С.В., Шкуратов А.М. Параллельная MPI+GPU реализация 3D акустической полноволновой инверсии на преломленно-рефрагированных волнах // Вычислительные методы и программирование. 2026. **27**, № 4. 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447.

© Д. С. Братчиков, К. Г. Гадыльшин, С. В. Шарин, А. М. Шкуратов

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

Parallel MPI+GPU implementation of 3D acoustic full waveform inversion on diving waves

Denis S. Bratchikov
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0009-0009-0752-9648, e-mail: d.s.bratchikov@math.nsc.ru

Kirill G. Gadylshin
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
ORCID: 0000-0001-7247-6911, e-mail: gadylshin@gmail.com

Sergey V. Sharin
RN-Technologies LLC, Moscow, Russia
ORCID: 0009-0002-6718-3473, e-mail: svsharin@rn-t.ru

Artem M. Shkuratov
RN-Technologies LLC, Moscow, Russia
ORCID: 0009-0002-0765-7681, e-mail: amshkuratov@rn-t.ru

Abstract: This article presents a parallel implementation of 3D acoustic full waveform inversion on diving waves for processing land seismic data. Direct wavefield modeling is based on application of a high-order finite-difference scheme with absorbing CPML boundary conditions and is implemented on graphics accelerators using CUDA technology. To accelerate the computation of the objective functional gradient, a parallel implementation based on MPI with dynamic load balancing across sources is proposed. Numerical experiments for a synthetic 3D model demonstrate the effectiveness of the proposed approach and the near-linear scalability of the parallel algorithm.

Keywords: full waveform inversion, acoustic, diving waves, MPI, CUDA.

Acknowledgements: The fundamental part of the research, containing the development of numerical methods and algorithms for modeling and inversion of wave fields, as well as their efficient implementation on the architectures of graphics accelerators using CUDA technology, was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation for IM SB RAS (No. FWNF-2026-0018).
All calculations were performed on HPC-system "Sergei Godunov".

For citation: D. S. Bratchikov, K. G. Gadylshin, S. V. Sharin and A. M. Shkuratov, "Parallel MPI+GPU implementation of 3D acoustic full waveform inversion on diving waves," Numerical Methods and Programming. **27** (4), 778–795 (2026). doi 10.26089/NumMet.v27r447.

1. Введение. Из-за истощения запасов углеводородов в освоенных регионах сейсморазведочные работы ведутся в районах со сложным геологическим строением недр. Что требует внедрения передовых технологий регистрации и обработки сейсмических данных для получения максимально достоверных сведений о геологической среде. Среди наиболее эффективных подходов количественной оценки физических параметров геологической среды по сейсмическим данным выделяется полноволновая инверсия (Full Waveform Inversion, FWI). В современной практике FWI формулируется как задача нелинейной оптимизации. В основе концепции метода лежит итеративный поиск параметров модели путем минимизации целевого функционала, определяющего невязку (как правило, в L_2-норме) между зарегистрированными полевыми данными и синтетическими сейсмограммами, рассчитанными для текущей модели среды. Оптимизационная постановка обратной динамической задачи сейсмики впервые предложена А. С. Алексеевым в 1960-х годах [1, 2]. Однако практическое внедрение этого подхода в то время оказалось невозможным из-за малой мощности вычислительных средств. На следующем этапе развития метода А. Тарантола в своих фундаментальных работах [3, 4] детально изложил математические основы FWI в доступной для широкого круга геофизиков форме — в виде решения нелинейной задачи наименьших квадратов с использованием метода сопряженного состояния (adjoint state method) для итерационного уточнения параметров модели.

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

Эти публикации легли в основу множества последующих исследований, сформировав целое направление в современной разведочной геофизике. К настоящему времени тематике FWI посвящено внушительное количество исследований, охватывающих широкий спектр теоретических и прикладных аспектов. Разработка новых модификаций метода направлена как на повышение вычислительной эффективности, так и на обеспечение достоверности получаемых результатов. Среди множества исследований выделяются работы [5–15], а также фундаментальный обзор [16], в котором систематизированы ключевые источники по состоянию на начало 2010-х годов. Публикации на русском языке в основном посвящены практическим примерам обработки полевых данных и зачастую носят характер материалов профильных конференций [17, 18].

Стоит отметить, что сегодня область применения FWI выходит за рамки геофизики. Метод успешно адаптируется для решения задач медицинской визуализации: в работе [19] продемонстрировано применение FWI для высокоразрешающей томографии тканей головного мозга, а в [20, 21] — для построения изображений ультразвуковой компьютерной томографии.

В зависимости от сложности математического описания процесса распространения сейсмических волн различают FWI в акустическом приближении (acoustic FWI или сокращенно aFWI), где в качестве математической модели рассматривается скалярное волновое уравнение, и в упругом приближении (elastic FWI или сокращенно eFWI), где в основе математической модели лежат уравнения динамической теории упругости. Данные наземной сейсморазведки содержат все типы сейсмических волн: продольные P-волны, поперечные S-волны и поверхностные. При этом в стандартных процедурах обработки целевая компонента — это P-волны. Алгоритмы aFWI, ориентированные на работу исключительно с P-волнами, требуют эффективной фильтрации других типов волн, которые иначе интерпретируются как помехи. Это накладывает существенные требования к качеству обработки входных данных. Расчет всех компонент волнового поля выполняется методом обращения упругих волновых полей eFWI. Учет S-волн в процессе решения обратной динамической задачи позволяет качественно повысить информативность и достоверность восстанавливаемых моделей среды [22]. Недавний выпуск “The Leading Edge” [23], одного из ведущих журналов в области разведочной геофизики для практиков, целиком посвящен eFWI, что подчеркивает его актуальность.

Несмотря на теоретические преимущества eFWI, в промышленной практике доминирует aFWI. Это обусловлено двумя ключевыми факторами. Во-первых, при проведении полевых работ как правило регистрируется лишь вертикальная компонента волнового поля, что ограничивает применимость полных упругих моделей. Во-вторых, прямое моделирование является наиболее вычислительно затратным этапом FWI; численный расчет упругих полей требует кратно больших вычислительных ресурсов, чем решение скалярного волнового уравнения.

Настоящая работа посвящена описанию высокопроизводительной реализации алгоритма FWI в акустическом приближении для обработки данных наземной 3D сейсморазведки. Особое внимание уделяется вычислительной эффективности метода, что критически важно для обработки больших объемов данных, характерных для промышленных проектов. Описывается высокопроизводительная схема расчета волновых полей, базирующаяся на применении технологий MPI и GPU. Приведенные результаты численных экспериментов подтверждают высокую точность и эффективность предложенного подхода при решении практических задач.

2. Численное моделирование сейсмических волновых полей. Сформулируем постановку задачи моделирования сейсмических полей и опишем алгоритм ее численного решения с использованием графических ускорителей (GPU). Прямая задача заключается в вычислении волнового поля $u(t, \boldsymbol{x})$ при заданной скорости распространения $v_p(\boldsymbol{x})$ и функции источника $S(t)$. Решение прямой задачи является самой ресурсоемкой частью метода обращения полных волновых полей, что обусловлено в том числе необходимостью многократных расчетов для тысяч источников. Поэтому для ускорения алгоритма основное внимание следует уделить эффективному решению прямой задачи.

2.1. Акустическое волновое уравнение и конечно-разностная схема. В изотропном случае распространение сейсмических волн в трехмерной среде описывается скалярным волновым уравнением с точечным источником:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v_p^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + S(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

где $u(t, \boldsymbol{x})$ — скалярное волновое поле (давление), $v_p(\boldsymbol{x})$ — скорость распространения волн, $S(t)$ — импульс зондирующего сигнала, $\boldsymbol{x}_s$ — пространственные координаты источника, $\delta(\boldsymbol{x})$ — дельта-функция Дирака, моделирующая точечный источник.

В качестве формы сигнала часто используют импульс Рикера, обеспечивающий нулевое среднее значение и ограниченный частотный спектр:

$$S(t) = \left(1 - 2\left(\pi f_0 \left(t - t_0\right)\right)^2\right) e^{-\left(\pi f_0 (t - t_0)\right)^2}, \tag{2}$$

где f_0 — доминирующая частота импульса, t_0 — сдвиг по времени.

Для численного решения уравнения (1) используется явная конечно-разностная схема 2-го порядка по времени [24]:

$$u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} + v_p^2 \Delta t^2 (D_x + D_y + D_z) u^n, \tag{3}$$

где Δt — шаг по времени, n — номер временного слоя, D_x, D_y, D_z — конечно-разностные операторы аппроксимации вторых производных по пространственным переменным. В работе используется схема 8-го порядка точности по пространству. Шаг по времени подбирается из условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [25]:

$$\Delta t < C \frac{\min\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}}{v_p^{\max}}, \tag{4}$$

где $v_p^{\max}$ — максимальная скорость волны, Δx, Δy, Δz — шаги сетки по пространству.

Поскольку координаты источников и приемников не обязательно совпадают с узлами расчетной сетки, для корректного учета координат источников и проецирования волнового поля в точки расположения сейсмических приемников используется интерполяция Хикса [26]. Источник распределяется по $4 \times 4 \times 4$ соседним узлам с весами по следующей формуле:

$$w(\boldsymbol{x}_i) = \operatorname{sinc}\left(\frac{x_i - x_s}{\Delta x}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{y_i - y_s}{\Delta y}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{z_i - z_s}{\Delta z}\right),$$

где $\boldsymbol{x}_i$ — координата узла сетки, $\operatorname{sinc}(x) = \sin x / x$ — кардинальный синус. Таким образом, точечный источник моделируется без существенных численных дисперсий.

2.2. Поглощающие краевые условия типа PML. При моделировании распространения сейсмических волн рассматривается ограниченная расчетная область, вследствие чего возникают нефизические отражения от ее искусственных границ. Поглощающие краевые условия имитируют неограниченную расчетную область: волны, вышедшие за границу расчетной области, не возвращаются обратно. На практике для подавления отражений в качестве поглощающего краевого условия наиболее часто используется условие типа PML (Perfectly Matched Layer) [27]. Суть этого условия заключается в замене колеблющихся волн экспоненциально затухающими волнами путем аналитического продолжения уравнений в комплексную область с помощью комплексного растяжения координат. Главное преимущество PML состоит в том, что в непрерывном пределе и для бесконечно протяженного поглощающего слоя волны входят в него, не создавая отражений, независимо от их частоты и угла падения. Для PML конечного размера затухающие волны отражаются от внешнего края PML, на котором реализуется жесткое условие Дирихле, моделирующее полное отражение, и снова затухают на обратном пути ко входу в PML. Таким образом, теоретически эти волны не равны нулю. Однако их амплитуда затухает с экспоненциальным множителем, показатель которого зависит от удвоенной толщины PML. Поэтому при численном расчете они оказываются пренебрежимо малыми.

Хотя классический PML широко используется при моделировании сейсмических волн, он создает искусственные отражения для почти скользящих падающих волн, низкочастотных волн и затухающих волн [28]. В работе [29] показано, что обычный PML обладает лишь слабой устойчивостью и может расходиться при малых возмущениях, поскольку в нем используется нефизическое расщепление полей. В [30] предложен CFS-PML (Complex Frequency-Shifted PML), имеющий лучшую поглощающую способность для указанных типов волн. В данном подходе предлагается более общий вид функции растяжения, зависящей от частоты. Классический PML [27] является высокочастотным приближением CFS-PML и не очень хорошо подходит для описания низких частот. Это делает CFS-PML полезным в ряде случаев: когда имеются тонкие сеточные срезы, когда источники расположены близко к краю сетки или когда приемники удалены

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

на большие расстояния. Это довольно распространенные ситуации, которые представляют интерес для региональной сейсморазведки.

В [28] предлагается использовать метод рекурсивной свертки для реализации CFS-PML, т.е. CPML (Convolutional PML). Применение CPML к уравнению (1) приводит к следующей системе уравнений [31]:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v_p^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \dfrac{\partial \psi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi_z}{\partial z} + \zeta_x + \zeta_y + \zeta_z, \\ \psi_x^n = a_x \psi_x^{n-1} + b_x \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^n, \quad \zeta_x^n = a_x \zeta_x^{n-1} + b_x \left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n + \left(\dfrac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2}\right)^n\right], \\ \psi_y^n = a_y \psi_y^{n-1} + b_y \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^n, \quad \zeta_y^n = a_y \zeta_y^{n-1} + b_y \left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^n + \left(\dfrac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2}\right)^n\right], \\ \psi_z^n = a_z \psi_z^{n-1} + b_z \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^n, \quad \zeta_z^n = a_z \zeta_z^{n-1} + b_z \left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^n + \left(\dfrac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2}\right)^n\right], \end{cases} \tag{5}$$

где для $k \in \{x, y, z\}$ функции $\psi_k(t, \boldsymbol{x})$, $\zeta_k(t, \boldsymbol{x})$ являются вспомогательными переменными памяти, реализующими рекурсивную свертку, $a_k(\boldsymbol{x})$, $b_k(\boldsymbol{x})$ — коэффициенты затухания, определяемые согласно следующим формулам:

$$a_k = e^{-(d_k/\beta_k + \alpha_k)\Delta t}, \quad b_k = \frac{d_k}{\beta_k(d_k + \beta_k \alpha_k)}(a_k - 1),$$

где d_k — функция затухания вдоль нормального направления k, которая моделирует экспоненциальное затухание амплитуды распространяющейся волны при любом угле падения внутри PML-слоя; $\alpha_k(k)$ — коэффициент сдвига частоты, учитывающий зависимость скорости затухания волн внутри PML от частоты; β_k — масштабирующий коэффициент, который вводится для улучшения моделирования затухания волн бесконечно малой длины.

Величины d_k, α_k, β_k в CPML обычно задаются в виде следующих полиномов:

$$d_k = d_0 \left(\frac{l_k}{L}\right)^2, \quad \alpha_k = \alpha_0 \left(1 - \frac{l_k}{L}\right), \quad \beta_k = 1 + (\beta_0 - 1)\left(\frac{l_k}{L}\right)^2,$$

где l_k — расстояние от точки в поглощающем слое до внутренней границы расчетной области, L — ширина поглощающего слоя, $d_0 = -\dfrac{3v_p^{\max}}{2L}\ln R$ — максимальное значение функции затухания, R — коэффициент отражения ($R = 0.0001$), $\alpha_0 = \pi f_0$, значения коэффициента β_0 варьируются от 1 до 7.

Система (5) решается в PML-области и содержит шесть вспомогательных переменных памяти, которые обновляются в соответствии с рекурсивным правилом на каждой итерации по времени. Однако на практике для подавления отражений до уровня менее 1% достаточно PML-слоя толщиной 10–20 узлов сетки. По сравнению с общими размерами вычислительной сетки в геофизических задачах это пренебрежимо мало и не приводит к заметному росту вычислительных затрат. Более того, структура уравнений (1) и (5) во внутренней области без PML-слоев идентична. Поэтому достаточно добавить массив для хранения каждой из переменных памяти только в соответствующем PML-слое. Тогда в большей части PML-области будут использоваться только две вспомогательные переменные. Четыре и шесть вспомогательных переменных потребуются только для двух- и трехсторонних угловых областей соответственно. Пространственные производные для CPML уравнений (5) аппроксимируются со вторым порядком точности.

2.3. Параллельный алгоритм на GPU. Высокопроизводительная реализация конечно-разностного моделирования на GPU выполняется с использованием архитектуры NVIDIA CUDA. Трехмерная вычислительная область дискретизируется посредством трехмерной сетки потоков (grid of threads), где каждый поток отвечает за обновление одной ячейки вычислительной сетки. Для оптимизации критична иерархическая организация памяти: трехмерные массивы переменных волнового уравнения (5) размещаются в глобальной памяти (Global Memory) с использованием непрерывного линейного представления (contiguous memory layout), что обеспечивает согласованный доступ (coalesced access) и максимальную утилизацию пропускной способности шины памяти.

Статические коэффициенты конечно-разностной схемы и коэффициенты поглощающих граничных условий CPML предварительно вычисляются на хосте и размещаются в памяти постоянного доступа

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

(Constant Memory) для минимизации задержек чтения. Для снижения латентности при обращении к соседним узлам сетки в рамках вычисления пространственных производных ядра вычислений оптимизированы посредством разделяемой памяти (Shared Memory). Минимизация накладных расходов на передачу данных по шине PCIe достигается за счет сохранения всех промежуточных буферов на устройстве в течение всего цикла по времени. Обмен с хостом осуществляется только для записи итоговых сейсмических данных по завершении моделирования. Псевдокод процедуры моделирования приведен в Алгоритме 1.

Алгоритм 1. Прямое моделирование волнового поля на GPU

Algorithm 1. Forward wavefield modeling on GPU

function $forward(v_p, \text{source}, \text{receivers})$
  seismograms $:= \varnothing$
  // Initializing fields on the device
  $u^0_{\text{dev}}, u^1_{\text{dev}}, u^2_{\text{dev}} := 0$ // three time layers
  init_pml_variable(...) // pml variables
  for $n = 1 \dots n_t$ **do**
    // Calculation of the internal field (core)
    $u^{n+1}_{\text{dev}} :=$ time_step_kernel$\langle\langle$grid, block$\rangle\rangle(u^n_{\text{dev}}, u^{n-1}_{\text{dev}}, v_{p,\text{dev}})$
    // Applying PML to boundary layers
    $u^{n+1}_{\text{dev}} :=$ pml_kernel$\langle\langle$grid_pml, block$\rangle\rangle(u^{n+1}_{\text{dev}})$
    // Adding a source term
    $u^{n+1}_{\text{dev}} :=$ source_kernel$\langle\langle(1,1)\rangle\rangle(u^{n+1}_{\text{dev}}, \text{source}, t_n)$
    // Recording the solution in receivers
    $\text{seismograms}_{\text{dev}}[n] :=$ record_kernel$\langle\langle$grid_rec, block$\rangle\rangle(u^{n+1}_{\text{dev}}, \text{receivers})$
    // Cyclic permutation of pointers
    $(u^{n-1}, u^n, u^{n+1}) := (u^n, u^{n+1}, u^{n-1})$
  end for
  // Copy results to host
  seismograms $:= \text{memcpy}_{D\to H}(\text{seismograms}_{\text{dev}})$
return seismograms
end function

Для оценки эффективности реализации конечно-разностного моделирования на графических ускорителях выполняется серия численных экспериментов на видеокарте NVIDIA GeForce RTX 3090 (24 GB GDDR6X). Область моделирования размером $1000 \times 1000 \times 1000$ м дискретизируется с шагом $\Delta x \in \{1.25, 2.5, 5.0, 10.0\}$ м для вычислительных сеток с числом узлов $n_x \in \{100, 200, 400, 800\}$ соответственно. Шаг моделирования по времени составляет 10^{-4} с, доминирующая частота источника равна 10 Гц, используется однородная скоростная модель со скоростью 1000 м/с, ширина поглощающего слоя составляет 20 точек дискретизации. Геометрия наблюдения включает один источник в центре модели и 10 тыс. приемников, равномерно расположенных на поверхности с шагом 10 м. Для вычислений используется точность FP32. Размер блока составляет $8 \times 8 \times 8$.

Измерение времени выполнения функции `forward()` осуществляется с использованием `CUDA Events` для исключения накладных расходов CPU. Перед каждым замером выполняется 100 прогревочных итераций для выхода GPU на максимальную частоту. Все значения усредняются по 100 итерациям. В табл. 1 приведены времена выполнения одного временного шага моделирования для различных размеров сетки. Используются флаги компиляции `-O3 -use_fast_math`.

Таблица 1. Время выполнения одного шага моделирования в зависимости от размера вычислительной сетки

Table 1. The execution time of one simulation step depending on the size of the computational grid

Размер сетки Grid size	Время выполнения, мс The execution time, ms
100^3	0.211
200^3	0.738
400^3	3.288
800^3	19.136

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

Детальные метрики производительности отдельных CUDA-ядер приведены в табл. 2. Профилирование отдельных ядер выполняется с помощью NVIDIA Nsight Compute. Основной вклад в вычислительные затраты вносит ядро `time_step_kernel`: при больших размерах сетки на него приходится до 73% общего времени выполнения, что характерно для задач вычислительной геофизики. Это делает его основным объектом для дальнейшей оптимизации. Ключевой показатель эффективности — достигнутая пропускная способность памяти GPU на уровне 93.2%. Это свидетельствует об оптимальной организации доступа к глобальной памяти.

Таблица 2. Производительности CUDA-ядер

Table 2. CUDA-kernel performance

Ядро (Kernel)	Пропускная способность памяти, % Memory bandwidth, %	Вычислительная пропускная способность, % Compute throughput, %	Загруженность, % Occupancy, %	Время выполнения ядра на временном шаге, % (мс) Time kernel execution, % (ms)
Размер сетки 100^3 Grid size 100^3				
`time_step_kernel`	85.32	72.7	81.93	27.39 (0.0578)
`pml_x_kernel`	64.56	15.49	76.96	17.3 (0.0365)
`pml_y_kernel`	66.88	15.97	76.17	16.49 (0.0348)
`pml_z_kernel`	67.93	12.48	75.42	20.95 (0.0442)
`record_kernel`	12.89	0.60	14.64	1.85 (0.0039)
Размер сетки 800^3 Grid size 800^3				
`time_step_kernel`	93.20	69.03	83.62	73.14 (14.16)
`pml_x_kernel`	71.91	14.74	80.58	7.2 (1.4)
`pml_y_kernel`	73.86	14.79	80.26	7.2 (1.4)
`pml_z_kernel`	63.24	9.75	77.50	10.9 (2.11)
`record_kernel`	5.86	0.47	13.18	0.04 (0.0088)

Соотношение вычислительной пропускной способности и пропускной способности памяти указывает на то, что ядро относится к классу memory-bound. Под memory-bound здесь понимается класс вычислительных ядер, производительность которых ограничивается прежде всего пропускной способностью памяти, а не пиковой производительностью вычислительных блоков GPU. Такой характер вычислений типичен для конечно-разностных схем на регулярных сетках: при относительно небольшом числе арифметических операций на каждом узле требуется многократное чтение значений волнового поля в соседних узлах и запись результата, что приводит к низкой арифметической интенсивности и высокой нагрузке на подсистему памяти [32]. По мере увеличения размера задачи наблюдается обратная зависимость между утилизацией памяти и загрузкой вычислительных блоков. Пропускная способность памяти возрастает с 85.32% до 93.20%, тогда как вычислительная пропускная способность снижается с 72.7% до 69.03%. Данная зависимость подтверждает, что ядро `time_step_kernel` относится к классу memory-bound: при масштабировании размеров сетки улучшается эффективность использования памяти за счет более эффективного кэширования и объединения запросов к памяти, однако вычислительные блоки простаивают в ожидании данных. Таким образом, дальнейшая оптимизация должна быть направлена на снижение объема передаваемых данных (например, через сжатие волнового поля), а не на увеличение вычислительной производительности.

3. Обращение полных волновых полей. Далее формулируется постановка метода обращения полного волнового поля. Описывается алгоритм вычисления градиента целевого функционала, а также стратегия оптимизации и параллельная реализация на базе архитектуры MPI. Затем приводятся численные эксперименты, демонстрирующие корректную работу алгоритма и показатели производительности.

3.1. Теория и алгоритм. Полноволновая инверсия [16] представляет собой итерационный процесс решения нелинейной обратной задачи, направленный на восстановление пространственного распределения физических параметров среды (в данном случае скорости продольных волн) по данным сейсмических наблюдений. Основные компоненты FWI: целевой функционал для измерения расхождения между наблюдаемыми и смоделированными данными, оператор прямой задачи для вычисления смоделированных данных и начальная скоростная модель, которая итеративно обновляется до тех пор, пока целевой функционал не достигнет минимума.

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

Математически FWI формулируется как задача минимизации функционала невязки между наблюдаемыми и смоделированными волновыми полями в координатах приемников. Функционал невязки вычисляется как среднеквадратичное отклонение:

$$J(m) = \frac{1}{2}\|F(m) - d_{\text{obs}}\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N_s}\sum_{r=1}^{N_r}\int_0^T (u^s(\boldsymbol{x}_r, t) - d^s_{\text{obs}}(\boldsymbol{x}_r, t))^2 dt, \tag{6}$$

где F — нелинейный оператор прямого моделирования, $m(\boldsymbol{x}) = v_p^{-2}(\boldsymbol{x})$ — квадрат медленности (в дальнейшем будем называть это искомой моделью, пространственное распределение которой в узлах вычислительной сетки требуется восстановить), d_{obs} — наблюдаемые данные, u^s — волновое поле, смоделированное для источника с координатами $\boldsymbol{x}_s$, $\boldsymbol{x}_r$ — координаты приемника, N_s, N_r — общее число источников и приемников соответственно, T — максимальное время моделирования.

Для минимизации целевого функционала (6) обычно используются градиентные или ньютоновские методы оптимизации. Ньютоновские методы требуют построения гессиана, т.е. выполнения вычислительно ресурсоемкой задачи в трехмерном случае. Поэтому предлагается применение градиентных методов. Градиент целевого функционала (6) эффективно вычисляется с помощью метода сопряженного состояния (adjoint state method) [33]:

$$\nabla J(m) = \sum_{s=1}^{N_s}\int_0^T \frac{\partial^2 u^s}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, t) q^s(\boldsymbol{x}, T - t) dt, \tag{7}$$

где $q(\boldsymbol{x}, t)$ — сопряженное волновое поле, которое является решением сопряженной задачи

$$\begin{cases} m\dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \Delta q + \displaystyle\sum_{r=1}^{N_r} r^s(\boldsymbol{x}_r, t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < t < T, \\ q|_{t=T} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial q}{\partial t}\right|_{t=T} = 0. \end{cases}$$

Здесь $r^s(\boldsymbol{x}_r, t) = d^s(\boldsymbol{x}_r, t) - d^s_{\text{obs}}(\boldsymbol{x}_r, t)$ — невязка смоделированных и наблюдаемых данных. Для численного решения данной задачи применяется тот же самый Алгоритм 1, что и для прямой задачи. Только в качестве источника используется невязка данных, распределенная по позициям приемников и развернутая во времени.

Для нахождения решения используется метод сопряженных градиентов (NLCG) в модификации Полака–Рибьера [34]. Обновление модели осуществляется по следующим формулам:

$$m_{k+1} = m_k + \lambda_k p_k, \quad p_k = g_k + \mu_k p_{k-1}, \quad \mu_k = \max\left\{0, \frac{\langle g_k, g_k - g_{k-1}\rangle}{\langle g_{k-1}, g_{k-1}\rangle}\right\}, \tag{8}$$

где $g_k = -\nabla J(m_k)$ — антиградиент, p_k — направление поиска минимума целевого функционала, λ_k — длина шага обновления модели.

Для предобуславливания градиента используется освещенность источника, что позволяет повысить информативность градиента в слабо освещенных областях:

$$\nabla\tilde{J}(m) = \frac{\nabla J(m)}{I(m)}, \quad I(m) = \sum_{s=1}^{N_s}\int_0^T u_s^2(\boldsymbol{x}, t) dt. \tag{9}$$

3.2. Параллельная реализация с помощью MPI. Конфигурация поверхностной системы наблюдения включает тысячи позиций источников возбуждения. Поскольку вычисление вклада каждого источника в градиент целевого функционала (7) является независимой задачей, наиболее эффективно выполнять параллельные вычисления для каждого источника с использованием интерфейса передачи сообщений (MPI). В работе реализуется архитектура типа “Master-Slave” (рис. 1) для обеспечения динамической балансировки вычислительной нагрузки. Выбор данной архитектуры обусловлен следующими двумя ключевыми факторами.

Во-первых, современные вычислительные кластеры зачастую обладают гетерогенной структурой и включают вычислительные узлы с графическими ускорителями различных архитектур и поколений.

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

Поэтому производительность отдельных узлов на одинаковых задачах различается. Статическое распределение задач в таких условиях ведет к простоям высокопроизводительных узлов, тогда как динамическое распределение задач сокращает время ожидания и оптимизирует загрузку ресурсов.

Во-вторых, вычислительная область для моделирования волнового поля конкретного источника ограничивается локальной подмоделью, определяемой пространственными выносами соответствующих приемников (максимальное расстояние от источника до приемника). Различные подмодели характеризуются разными размерами и максимальными значениями скорости распространения волны. Согласно условию устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви (4), это влияет на выбор шага по времени и, следовательно, на общее количество временных шагов моделирования. Таким образом, вычислительная сложность задачи расчета градиента для разных источников неоднородна, поэтому для минимизации общего времени выполнения одной итерации FWI нагрузка распределяется динамически.

Механизм динамической балансировки нагрузки реализуется на основе централизованной очереди задач, управляемой Master-узлом. Master-узел хранит перечень источников, для которых требуется вычисление локальных градиентов. Распределение задач осуществляется по требованию: при освобождении Slave-узла Master-узел назначает ему следующий доступный источник. На Slave-узле выполняется прямое и сопряженное моделирование на GPU, после чего вычисленный локальный градиент передается обратно Master-узлу, и Slave-узел сигнализирует о готовности к новой задаче. Для минимизации коммуникационных накладных расходов и обеспечения перекрытия операций передачи данных с вычислениями применяются неблокирующие процедуры обмена `MPI_Isend` и `MPI_Irecv`. В момент ожидания завершения вычислений на удаленных узлах Master-узел выполняет суммирование поступивших локальных градиентов на CPU, что позволяет избежать простоев. Благодаря такому подходу, к моменту завершения обработки всей очереди источников глобальный градиент оказывается практически полностью сформированным. Данная стратегия минимизирует латентность коммуникаций и поддерживает высокую степень утилизации вычислительных ресурсов кластера.

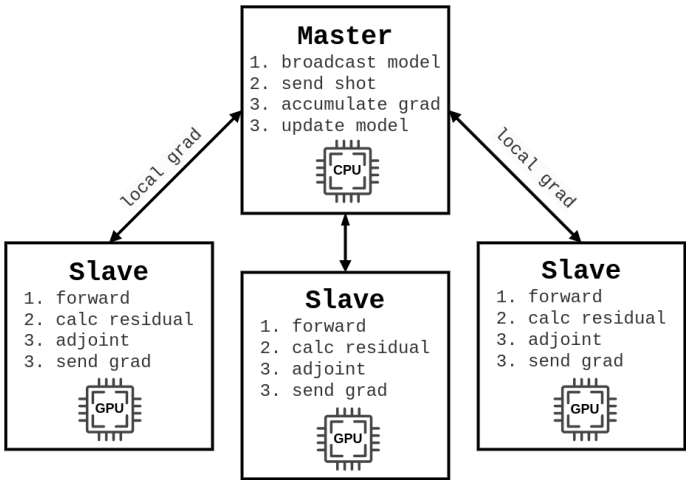

Рис. 1. Архитектура MPI коммуникаций одной итерации FWI

Fig. 1. Architecture of MPI communications of one FWI iteration

4. Численные эксперименты. В следующем разделе для демонстрации работоспособности и эффективности алгоритма приведено сравнение с реализацией алгоритма на CPU, а также представлены численные эксперименты FWI на реалистичных моделях сред.

4.1. Оценка вычислительной эффективности GPU-архитектуры. Обращение полных волновых полей требует многократного решения прямой и сопряженной задач для тысяч источников, что делает выбор эффективной вычислительной архитектуры критически важным для промышленной применимости метода к данным 3D сейсморазведки. Для оценки эффективности предложенной GPU реализации проведено сравнение с параллельной реализацией алгоритма на CPU (MPI + OpenMP) на двух высокопроизводительных вычислительных системах:

1. GPU-кластер “Сергей Годунов” (Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН): узел с графическими ускорителями NVIDIA Tesla A100 (4×80 ГБ GDDR6X, 2× Intel Xeon Gold 6342, 1 ТБ DDR4);

2. CPU-кластер “Политехник–РСК Cascade” (СКЦ “Политехнический” СПбПУ Петра Великого): 64 двухпроцессорных узла Intel Xeon Platinum 8268 (24 ядра, 2.9 ГГц).

Параметры тестовой задачи: 2178 источников, размер сетки $422 \times 422 \times 71$ узлов, число временных шагов $n_t = 701$, ширина поглощающих слоев составляет 20 узлов сетки. Конфигурация CPU-узла: 12 MPI-

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

процессов на узел, 4 OpenMP потока на процесс, что обеспечивает полную загрузку 48 вычислительных ядер узла. Результаты показали, что время выполнения одной итерации FWI составляет 96 минут на одном GPU-узле с 4 ускорителями. Для достижения эквивалентной производительности на CPU-кластере требуется 45 узлов (2160 ядер). Данное соотношение обусловлено архитектурными преимуществами GPU для задач конечно-разностного моделирования (высокая пропускная способность и массовый параллелизм вычислительных ядер). Полученные результаты подтверждают целесообразность использования GPU-архитектуры для промышленной реализации FWI.

4.2. Полноволновая инверсия наземных данных 3D сейсморазведки на преломленно–рефрагированных волнах. Последующие численные эксперименты выполнены на вычислительной системе “Сергей Годунов”. Далее описывается синтетический пример численного обращения полных волновых полей на преломленных волнах для восстановления трехмерной неоднородной скоростной модели, содержащей надвиговую структуру (геологическое разрывное нарушение в земной коре в виде наклонной структуры) и высокоскоростное включение. Визуализация распределения скорости представлена на рис. 2. Далее она именуется истинной моделью.

Параметры области моделирования задаются следующими: начало координат $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = -560$ м; число узлов вычислительной сетки $n_x = 1438$, $n_y = 679$, $n_z = 136$; шаг дискретизации $\Delta x = 12.5$ м, $\Delta y = 12.5$ м, $\Delta z = 10$ м; размеры области $L_x = 17960$ м, $L_y = 8475$ м, $L_z = 1350$ м. Наблюдаемые данные смоделированы с помощью конечно-разностного алгоритма, описанного в разделе 2. В качестве зондирующего сигнала используется импульс Рикера (2). Ширина поглощающих слоев составляет 20 точек. Шаг моделирования по времени $\Delta t = 0.002$ с, число временных шагов $n_t = 701$. Обращение выполняется на преломленно-рефрагированных волнах, которые выделяются в окрестности первых вступлений на расстояниях более 500 м.

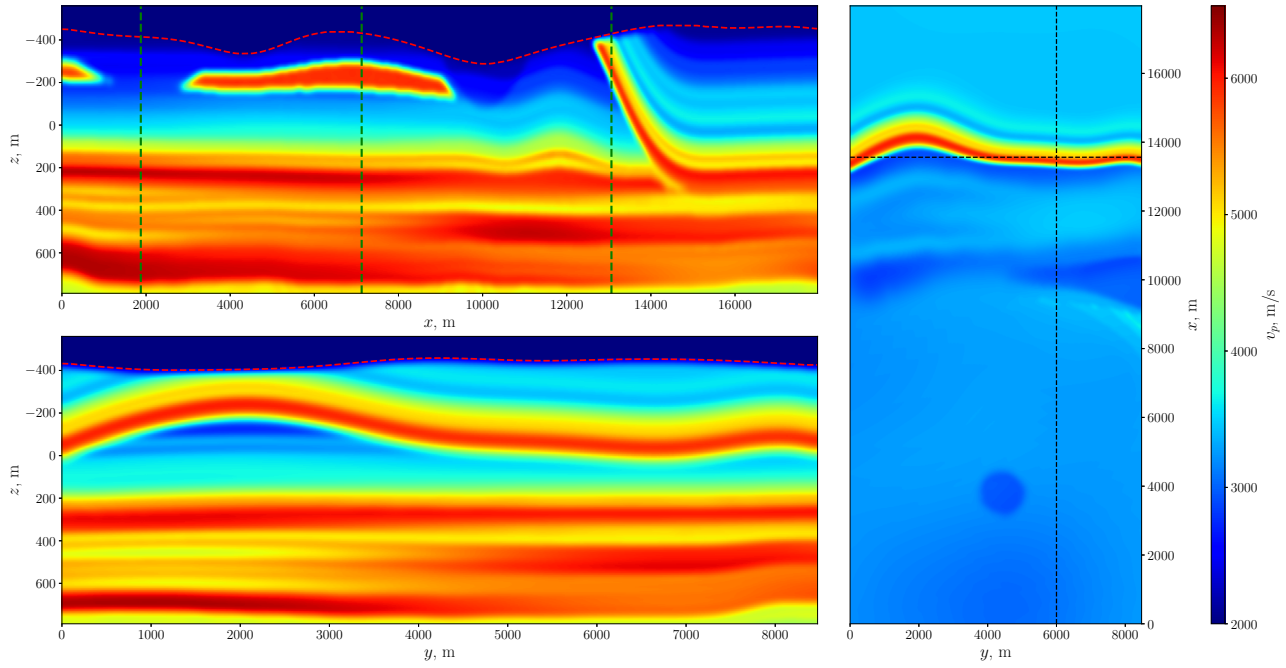

Рис. 2. Истинная скоростная модель. Слева сверху: xz-срез при $y = 6000$ м. Слева снизу: yz-срез при $x = 13560$ м. Справа: xy-срез при $z = -100$ м. Красная пунктирная линия показывает уровень топографии, черная пунктирная линия — положение вертикальных срезов, зеленая пунктирная линия — положение скоростных 1D-профилей

Fig. 2. True velocity model. Top left: xz-slice at $y = 6000$ m. Bottom left: yz-slice at $x = 13560$ m. Right: xy-slice at $z = -100$ m. Red dotted line shows a topography level, black dotted line — vertical cut positions, green dotted line — 1D velocity profile positions

Геометрия наблюдения состоит из линий возбуждения, равномерно распределенных по поверхности с шагом 150 м. В каждой линии возбуждения равномерно расположены пункты возбуждения с шагом 25 м. Таким образом, имеем 40152 пункта возбуждения на поверхности. Для выполнения FWI выбрано 10% случайных пунктов возбуждения, т.е. 4015 источников. Перпендикулярно линиям возбуждения равномер-

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

но распределены линии приема с шагом 150 м. В каждой линии приема равномерно расположены пункты приема с шагом 25 м. Максимальные выносы каждого пункта возбуждения составляют 3000 м вдоль оси x и 2400 м вдоль оси y. Таким образом, каждый источник содержит максимум 32 линии приема и 240 пунктов приема в каждой линии, т.е. всего 7680 приемников. Глубина залегания источников и приемников определяется рельефом, изображенным на рис. 2.

В качестве стартовой скоростной модели FWI используется модель, полученная по томографии на рефрагированных волнах. Визуализация распределения стартовой скорости представлена на рис. 3. Сценарий обращения состоит из двух этапов с последовательным увеличением доминирующей частоты:

1. обращение на доминирующей частоте 5 Гц;

2. обращение на доминирующей частоте 12 Гц.

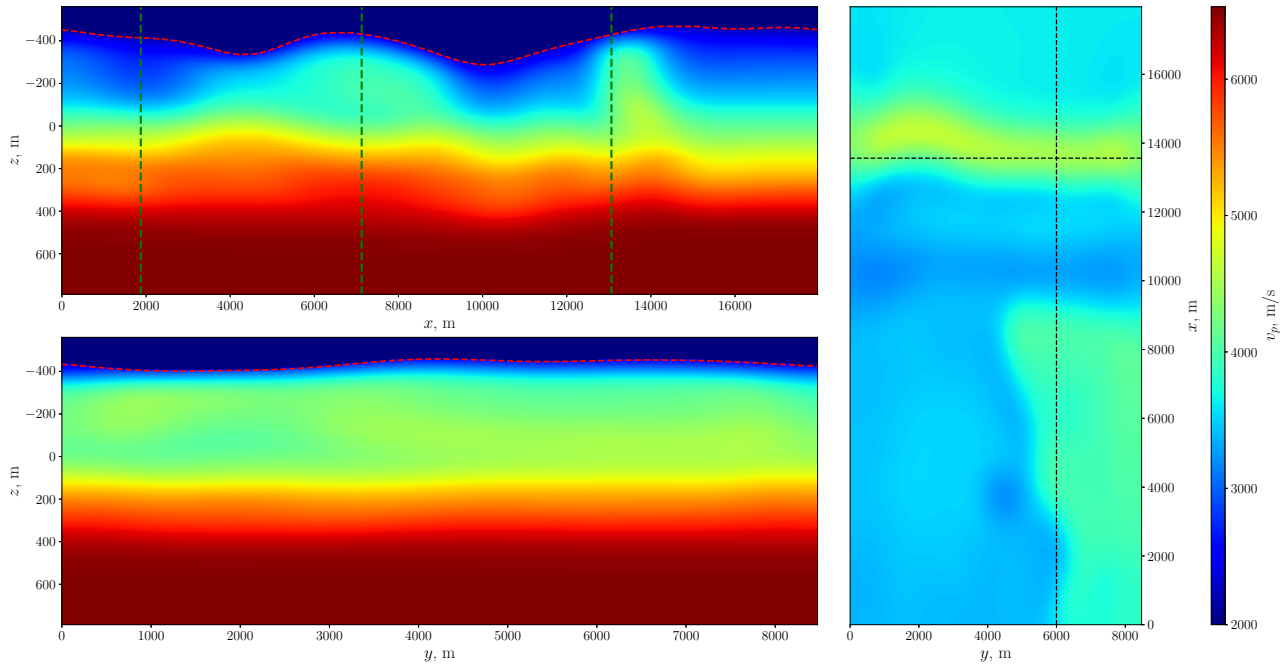

Рис. 3. Стартовая скоростная модель. Обозначения идентичны обозначениям к рис. 2

Fig. 3. Start velocity model. Notations are identical to those in Figure 2

В процессе обращения на каждой итерации применяются следующие техники предобработки градиента для ускорения сходимости процесса минимизации: затухание градиента вблизи источников для подавления артефактов, предобуславливание градиента с помощью освещенности (9), сглаживание градиента. Длина шага обновления модели в методе сопряженных градиентов (8) подбирается эмпирическим образом в процентах обновления относительно текущей модели $\lambda_k = \eta \cdot \dfrac{\|m_k\|_2}{\|g_k\|_2} \cdot 100\%$. Для уточнения длины шага обновления модели используется линейный поиск методом золотого сечения на подмножестве, содержащем 5% случайных источников из всей геометрии системы наблюдения. Первый этап состоит из 10 итераций с набором шагов $\eta \in \{0.05, 0.05, 0.04, 0.03, 0.025, 0.02, 0.01, 0.01, 0.005, 0.005\}$. Результат обращения последней итерации представлен на рис. 4. Как видно из рис. 5, целевой функционал снизился почти в три раза, что свидетельствует о построении качественного низкочастотного приближения скоростной модели. Сравнение карт невязок до и после обращения, демонстрирующих распределение значений целевого функционала по источникам, приведено на рис. 6: для большинства источников достигается значительное падение невязки. Наибольшие остаточные значения функционала локализуются в основном в областях надвига и высокоскоростного включения, что обусловлено сложностью восстановления резких контрастов скорости на низких частотах.

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

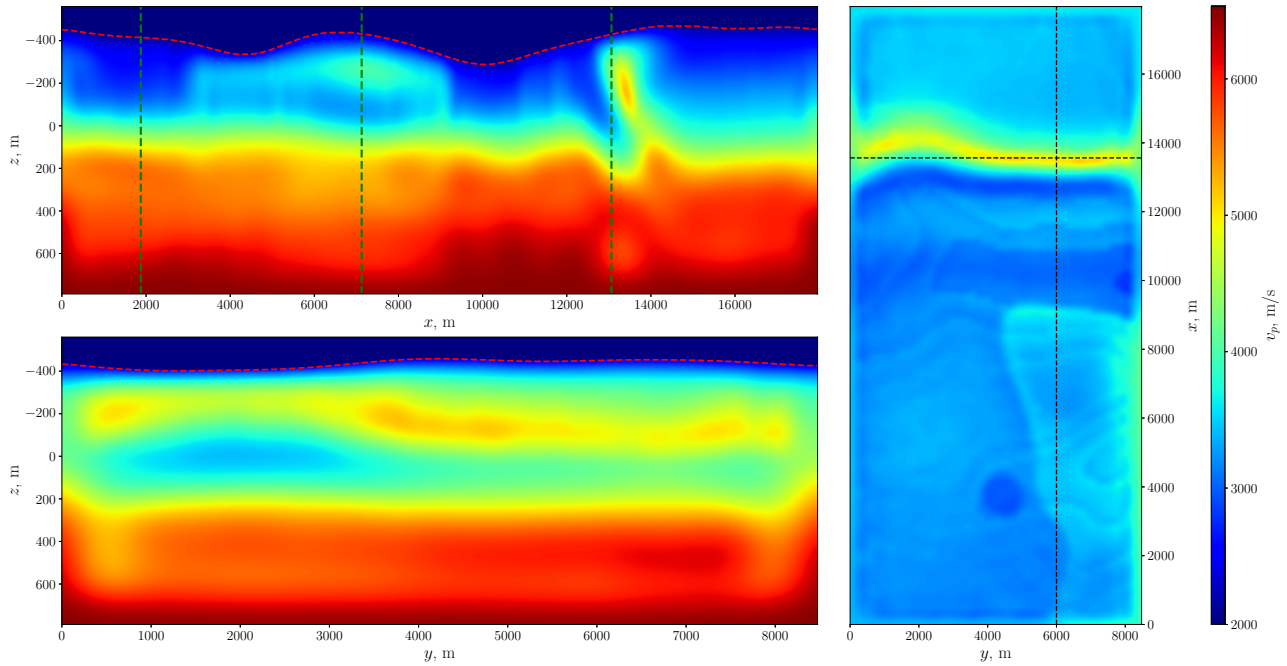

Рис. 4. Результат обращения на частоте 5 Гц. Обозначения идентичны обозначениям к рис. 2

Fig. 4. Inversion result at frequency of 5 Hz. Notations are identical to those in Figure 2

На втором этапе в качестве начального приближения используется результат обращения на частоте 5 Гц. Второй этап состоит из 10 итераций с набором шагов $\eta \in \{0.04, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.02, 0.02, 0.01, 0.01, 0.01\}$. Результат обращения на частоте 12 Гц представлен на рис. 7. Сравнение карт невязок до и после обращения на частоте 12 Гц проиллюстрировано на рис. 8. Наблюдается уменьшение невязки в области надвига, что свидетельствует об успешном восстановлении мелкомасштабных неоднородностей. На рис. 9 показано поведение целевого функционала на частоте 12 Гц. Функционал дополнительно снизился еще в два раза, что подтверждает эффективность многомасштабной стратегии. Сравнение одномерных скоростных профилей (рис. 10) демонстрирует значительное улучшение модели, особенно в области надвига.

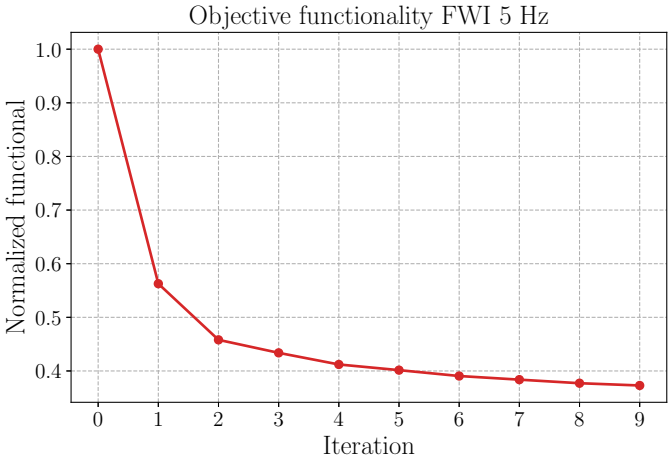

Рис. 5. Сходимость целевого функционала на частоте 5 Гц

Fig. 5. Convergence of the objective functional at frequency of 5 Hz

Таблица 3. Сильная масштабируемость: время выполнения одной итерации FWI в зависимости от числа GPU

Table 3. Strong scalability: execution time of one FWI iteration depending on the number of GPUs

Число GPU Number of GPUs	Время, с Time, s	Ускорение Speedup
1	4671	1.00
2	2422	1.93
3	1607	2.91
4	1213	3.85

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

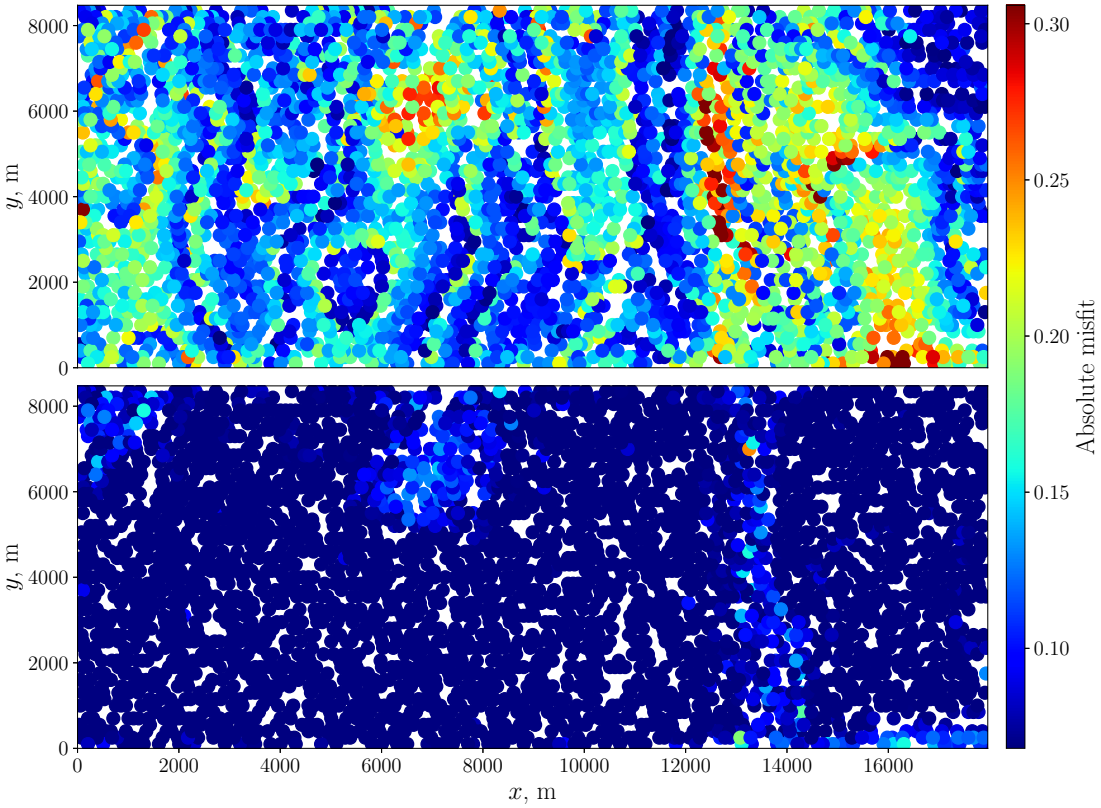

Рис. 6. Карта невязок на частоте 5 Гц. Сверху: стартовая модель. Снизу: восстановленная модель на частоте 5 Гц

Fig. 6. Misfit map at 5 Hz. Top: starting model. Bottom: reconstructed model at frequency of 5 Hz

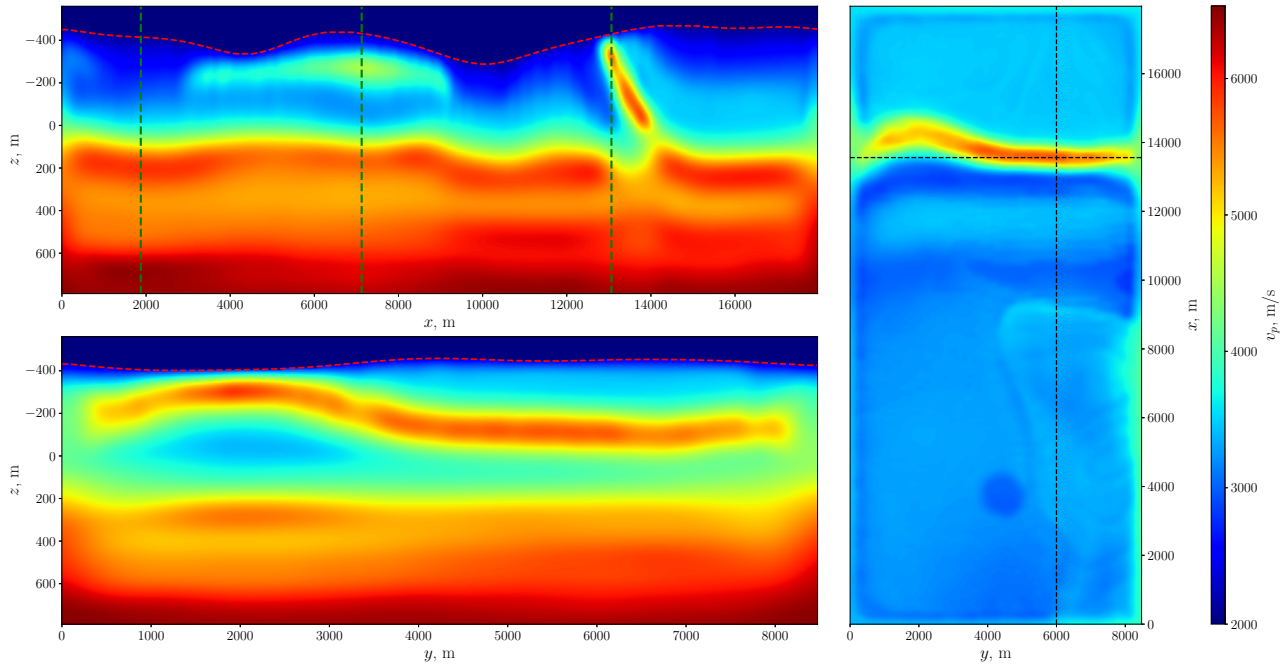

Рис. 7. Результат обращения на частоте 12 Гц. Обозначения идентичны обозначениям к рис. 2

Fig. 7. Inversion result at frequency of 12 Hz. Notations are identical to those in Figure 2

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

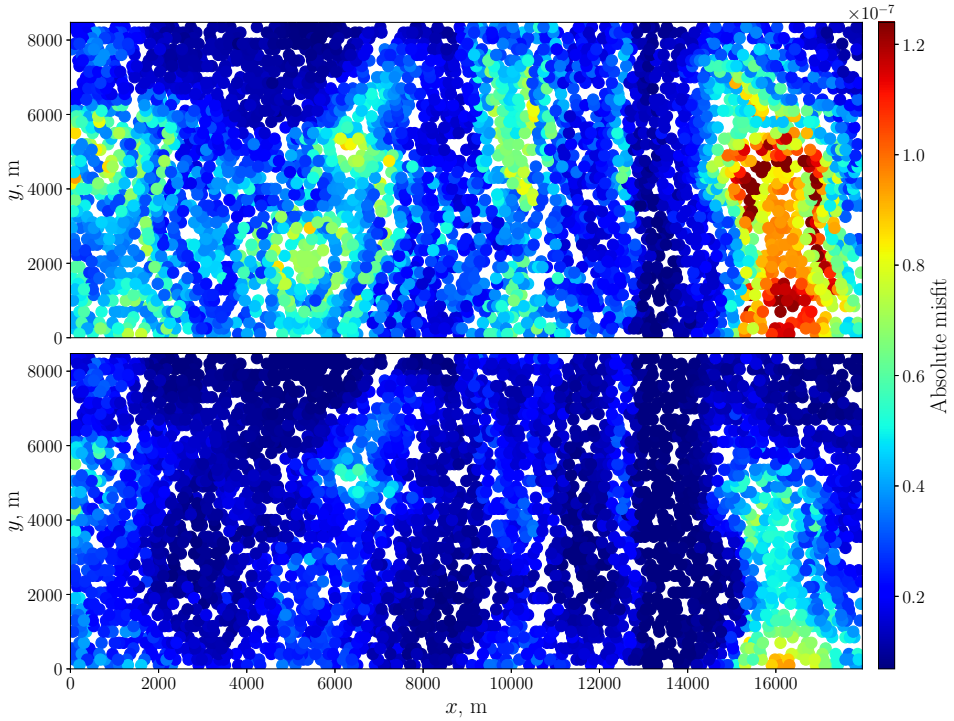

Рис. 8. Карта невязок на частоте 12 Гц. Сверху: восстановленная модель на частоте 5 Гц. Снизу: восстановленная модель на частоте 12 Гц

Fig. 8. Misfit map at frequency of 12 Hz. Top: reconstructed model at frequency of 5 Hz. Bottom: reconstructed model at frequency of 12 Hz

4.3. Производительность обращения полного волнового поля. Для оценки эффективности параллельной реализации алгоритма FWI проведен тест сильной масштабируемости (strong scaling). Эксперимент выполнен для фиксированной задачи размером $1438 \times 679 \times 136$ узлов с использованием 4015 источников. Измерялось среднее время выполнения одной итерации FWI, включающей прямое и сопряженное моделирование для всех источников, вычисление и суммирование градиента. Результаты тестирования приведены в табл. 3. Ускорение близко к линейному, что свидетельствует о минимальных накладных расходах на коммуникации и эффективной балансировке нагрузки.

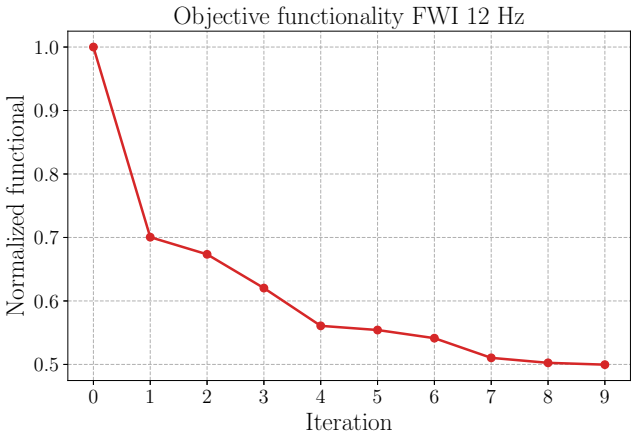

Рис. 9. Сходимость целевого функционала на частоте 12 Гц

Fig. 9. Convergence of the objective functional at frequency of 12 Hz

5. Заключение. Разработан, численно реализован и протестирован параллельный алгоритм трехмерной акустической полноволновой инверсии. Показано, что использование графических ускорителей позволяет существенно сократить время решения прямой и сопряженной задач за счет эффективной организации вычислений и доступа к памяти. Предложенная MPI-реализация с динамическим распределением задач обеспечивает эффективную балансировку нагрузки при вычислении вклада отдельных источников в градиент целевого функционала и позволяет минимизировать коммуникационные накладные расходы. Результаты численных экспериментов подтверждают работоспособность алгоритма и эффективность мно-

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

гомасштабной стратегии инверсии. Наблюдается существенное снижение значения целевого функционала и улучшение качества восстановленной скоростной модели, включая области со сложной геологической структурой. Полученные результаты свидетельствуют о применимости предложенного подхода для решения практических задач трехмерной сейсморазведки. Дальнейшие исследования могут быть направлены на повышение эффективности вычислений за счет снижения объема передаваемых данных и распространение метода на более сложные физические модели.

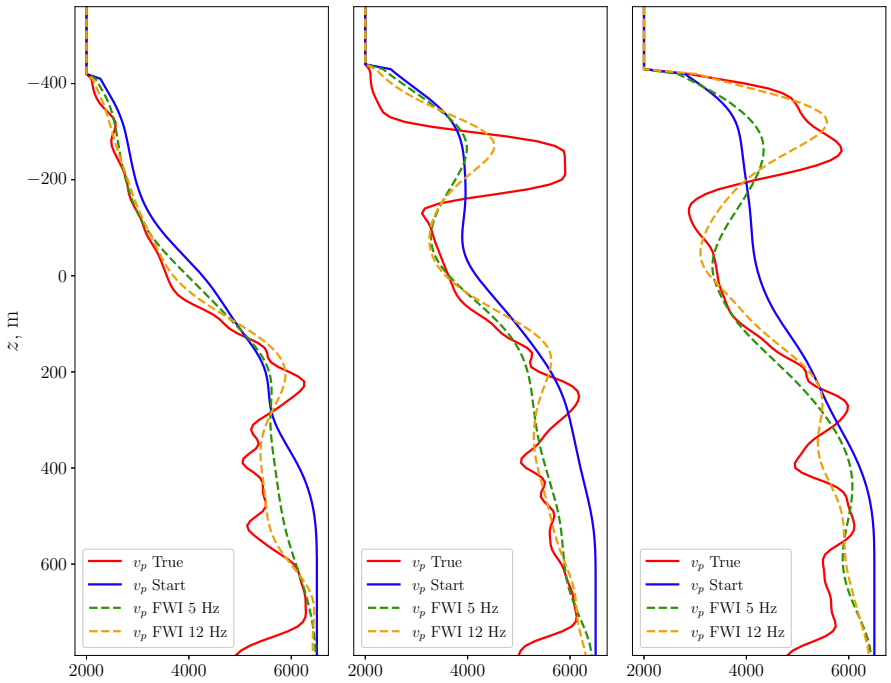

Рис. 10. Сравнение 1D-профилей скорости xz-среза. Синяя линия соответствует стартовой модели, красная линия — истинной модели, зеленая пунктирная линия — модели с частотой 5 Гц, оранжевая пунктирная линия — модели с частотой 12 Гц. Слева: $x = 1875$ м. Посередине: $x = 7125$ м. Справа: $x = 13075$ м

Fig. 10. Comparison of 1D velocity profiles for xz-slice. Blue line corresponds to starting model, red line — to true model, green dotted line — to model at frequency of 5 Hz, orange dotted line — to model at 12 Hz. Left: $x = 1875$ m. Middle: $x = 7125$ m. Right: $x = 13075$ m

Список литературы

1. *Алексеев А.С.* Некоторые обратные задачи теории распространения волн. I, II // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 11. 1514–1531.
2. *Алексеев А.С.* Обратные динамические задачи сейсмики // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1967. pp. 9–84.
3. *Tarantola A.* Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation // Geophysics. 1984. **49**, № 8. 1259–1266. doi 10.1190/1.1441754.
4. *Tarantola A.* A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data // Geophysics. 1986. **51**, № 10. 1893–1903. doi 10.1190/1.1442046.
5. *Pratt R.G., Shin C., Hicks G.J.* Gauss–Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion // Geophysical Journal International. 1998. **133**, № 2. 341–362. doi 10.1046/j.1365-246X.1998.00498.x.
6. *Pratt R.G.* Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: theory and verification in a physical scale model // Geophysics. 1999. **64**, № 3. 888–901. doi 10.1190/1.1444597.
7. *Shin C., Cha Y.H.* Waveform inversion in the Laplace domain // Geophysical Journal International. 2008. **173**, № 3. 922–931. doi 10.1111/j.1365-246X.2008.03768.x.
8. *Ben-Hadj-Ali H., Operto S., Virieux J.* Velocity model building by 3D frequency-domain full-waveform inversion of wide-aperture seismic data // Geophysics. 2008. **73**, № 5. VE101–VE117. doi 10.1190/1.2957948.

9. *Brossier R., Operto S., Virieux J.* Which data residual norm for robust elastic frequency-domain full waveform inversion? // Geophysics. 2010. **75**, № 3. R37–R46. doi 10.1190/1.3379323.
10. *Métivier L., Bretaudeau F., Brossier R., et al.* Full waveform inversion and the truncated Newton method: quantitative imaging of complex subsurface structures // Geophysical Prospecting. 2014. **62**, № 6. 1353–1375. doi 10.1111/1365-2478.12136.
11. *Warner M., Guasch L.* Adaptive waveform inversion: theory // Geophysics. 2016. **81**, № 6. R429–R445. doi 10.1190/GEO2015-0387.1.
12. *Yang Y., Engquist B., Sun J., Hamfeldt B.F.* Application of optimal transport and the quadratic Wasserstein metric to full-waveform inversion // Geophysics. 2018. **83**, № 1. R43–R62. doi 10.1190/geo2016-0663.1.
13. *Pladys A., Brossier R., Li Y., Métivier L.* On cycle-skipping and misfit function modification for full-wave inversion: comparison of five recent approaches // Geophysics. 2021. **86**, № 4. R563–R587. doi 10.1190/geo2020-0851.1.
14. *Barnier G., Biondi E., Clapp R.G., Biondi B.* Full-waveform inversion by model extension: theory, design, and optimization // Geophysics. 2023. **88**, № 5. R579–R607. doi 10.1190/geo2022-0350.1.
15. *Tcheverda V., Gadylshin K.* Elastic full-waveform inversion using migration-based depth reflector representation in the data domain // Geosciences. 2021. **11**, № 2. Article Number 76. doi 10.3390/geosciences11020076.
16. *Virieux J., Operto S.* An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics // Geophysics. 2009. **74**, № 6. WCC1–WCC26. doi 10.1190/1.3238367.
17. *Гадыльшин К.Г., Чеверда В.А.* Решение обратной динамической задачи сейсмики путем обращения полного многокомпонентного упругого волнового поля // Доклады академии наук. 2018. **482**, № 6. 708–712. doi 10.31857/S000523100002920-6.
18. *Гадыльшин К.Г., Чеверда В.А., Твердохлебов Д.Н.* Реконструкция верхней части геологического разреза в Восточной Сибири путем обращения полного волнового поля // Доклады Российской Академии наук. Науки о земле. 2022. **502**, № 2. 90–94. doi 10.31857/S2686739722020074.
19. *Guasch L., Calderón Agudo O., Tang M.-X., et al.* Full-waveform inversion imaging of the human brain // NPJ Digital Medicine. 2020. **3**. Article Number 28. doi 10.1038/s41746-020-0240-8.
20. *Pérez-Liva M., Herraiz J.L., Udias J.M., et al.* Time domain reconstruction of sound speed and attenuation in ultrasound computed tomography using full wave inversion // The Journal of the Acoustical Society of America. 2017. **141**, № 3. 1595–1604. doi 10.1121/1.4976688.
21. *Wu X., Li Y., Su C., et al.* Ultrasound computed tomography based on full waveform inversion with source directivity calibration // Ultrasonics. 2023. **132**. Article Number 107004. doi 10.1016/j.ultras.2023.107004.
22. *Kamath N., Brossier R., Métivier L., et al.* Multiparameter full-waveform inversion of 3D ocean-bottom cable data from the Valhall field // Geophysics. 2021. **86**, № 1. B15–B35. doi 10.1190/geo2019-0705.1.
23. *Routh P., Ratcliffe A., Plessix R.-E., Neelamani R.* Introduction to this special section: elastic full-waveform inversion // The Leading Edge. 2025. **44**, № 5. 336–337. doi 10.1190/tle44050336.1.
24. *Alford R.M., Kelly K.R., Boore D.M.* Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation // Geophysics. 1974. **39**, № 6. 834–842. doi 10.1190/1.1440470.
25. *Courant R., Friedrichs K., Lewy H.* On the partial difference equations of mathematical physics // IBM Journal of Research and Development. 1967. **11**, № 2. 215–234. doi 10.1147/rd.112.0215.
26. *Hicks G.J.* Arbitrary source and receiver positioning in finite-difference schemes using Kaiser windowed sinc functions // Geophysics. 2002. **67**, № 1. 156—166. doi 10.1190/1.1451454.
27. *Berenger J.-P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. 1994. **114**, № 2. 185–200. doi 10.1006/jcph.1994.1159.
28. *Komatitsch D., Martin R.* An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation // Geophysics. 2007. **72**, № 5. SM155—SM167. doi 10.1190/1.2757586.
29. *Abarbanel S., Gottlieb D.* A mathematical analysis of the PML method // Journal of Computational Physics. 1997. **134**, № 2. 357–363. doi 10.1006/jcph.1997.5717.
30. *Kuzuoglu M., Mittra R.* Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers // IEEE Microwave and Guided Wave Letters. 1996. **6**, № 12. 447–449. doi 10.1109/75.544545.
31. *Pasalic D., McGarry R.* Convolutional perfectly matched layer for isotropic and anisotropic acoustic wave equations // SEG International Exposition and Annual Meeting, Denver, Colorado, October 17–22, 2010. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2010. pp. 2925–2929. doi 10.1190/1.3513453.
32. *Michéa D., Komatitsch D.* Accelerating a three-dimensional finite-difference wave propagation code using GPU graphics cards // Geophysical Journal International. 2010. **182**, № 1. 389–402. doi 10.1111/j.1365-246X.2010.04616.x.
33. *Plessix R.-E.* A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications //Geophysical Journal International. 2006. **167**, № 2. 495–503. doi 10.1111/j.1365-246X.2006.02978.x.

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

34. *Polak E., Ribiere G.* Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées // Revue Française D'informatique et de Recherche Opérationnelle. Série Rouge. 1969. **3**, № R1. 35–43.

Получена *29 июля 2026 г.*
Принята *31 августа 2026 г.*
Опубликована *26 ноября 2026 г.*

Информация об авторах

Денис Сергеевич Братчиков — к.ф.-м.н., мл. науч. сотр.; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Кирилл Геннадьевич Гадыльшин — к.ф.-м.н., заведующий лабораторией; Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Российская Федерация.

Сергей Викторович Шарин — к.ф.-м.н., эксперт; ООО "РН-Технологии", б-р Раменский д. 1, 111607, Москва, Российская Федерация.

Артем Маратович Шкуратов — к.ф.-м.н., главный специалист; ООО "РН-Технологии", б-р Раменский д. 1, 111607, Москва, Российская Федерация.

References

1. A. S. Alekseev, "Some Inverse Problems of Wave Propagation Theory. I, II," Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Geofiz. No 11, 1514–1531 (1962).
2. A. S. Alekseev, "Inverse Dynamic Problems of Seismics," in *Some Methods and Algorithms for the Interpretation of Geophysical Data* (Nauka, Moscow, 1967), pp. 9–84 [in Russian].
3. A. Tarantola, "Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation," Geophysics **49** (8), 1259–1266 (1984). doi 10.1190/1.1441754.
4. A. Tarantola, "A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data," Geophysics **51** (10), 1893–1903 (1986). doi 10.1190/1.1442046.
5. R. G. Pratt, C. Shin, and G. J. Hicks, "Gauss–Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion," Geophys. J. Int. **133** (2), 341–362 (1998). doi 10.1046/j.1365-246X.1998.00498.x.
6. R. G. Pratt, "Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model," Geophysics **64** (3), 888–901 (1999). doi 10.1190/1.1444597.
7. C. Shin and Y. H. Cha, "Waveform inversion in the Laplace domain," Geophys. J. Int. **173** (3), 922–931 (2008). doi 10.1111/j.1365-246X.2008.03768.x.
8. H. Ben-Hadj-Ali, S. Operto, and J. Virieux, "Velocity model building by 3D frequency-domain full-waveform inversion of wide-aperture seismic data," Geophysics **73** (5), VE101–VE117 (2008). doi 10.1190/1.2957948.
9. R. Brossier, S. Operto, and J. Virieux, "Which data residual norm for robust elastic frequency-domain full waveform inversion?" Geophysics **75** (3), R37–R46 (2010). doi 10.1190/1.3379323.
10. L. Métivier, F. Bretaudeau, R. Brossier, et al., "Full waveform inversion and the truncated Newton method: quantitative imaging of complex subsurface structures," Geophys. Prospect. **62** (6), 1353–1375 (2014). doi 10.1111/1365-2478.12136.
11. M. Warner and L. Guasch, "Adaptive waveform inversion: Theory," Geophysics **81** (6), R429–R445 (2016). doi 10.1190/GEO2015-0387.1.
12. Y. Yang, B. Engquist, J. Sun, and B. F. Hamfeldt, "Application of optimal transport and the quadratic Wasserstein metric to full-waveform inversion," Geophysics **83** (1), R43–R62 (2018). doi 10.1190/geo2016-0663.1.
13. A. Pladys, R. Brossier, Y. Li, and L. Métivier, "On cycle-skipping and misfit function modification for full-wave inversion: Comparison of five recent approaches," Geophysics **86** (4), R563–R587 (2021). doi 10.1190/geo2020-0851.1.
14. G. Barnier, E. Biondi, R. G. Clapp, and B. Biondi, "Full-waveform inversion by model extension: Theory, design, and optimization," Geophysics **88** (5), R579–R607 (2023). doi 10.1190/geo2022-0350.1.
15. V. Tcheverda and K. Gadylshin, "Elastic Full-Waveform Inversion Using Migration-Based Depth Reflector Representation in the Data Domain," Geosciences **11** (2), Article Number 76 (2021). doi 10.3390/geosciences11020076.
16. J. Virieux and S. Operto, "An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics," Geophysics **74** (6), WCC1–WCC26 (2009). doi 10.1190/1.3238367.

2026, **27** (4), 778–795. doi 10.26089/NumMet.v27r447

17. K. G. Gadylshin and V. A. Cheverda, "Solution of the Inverse Dynamic Problem of Seismics by Inverting the Full Multicomponent Elastic Wave Field," Dokl. Akad. Nauk **482** (6), 708–712 (2018). doi 10.31857/S000523100002920-6.
18. K. G. Gadylshin, V. A. Cheverda, and D. N. Tverdokhlebov, "Reconstruction of the Upper Part of the Geological Section in Eastern Siberia by Full Waveform Inversion," Dokl. Ross. Akad. Nauk. Nauki o Zemle **502** (2), 90–94 (2022). doi 10.31857/S2686739722020074.
19. L. Guasch, O. Calderón Agudo, M.-X. Tang, et al., "Full-waveform inversion imaging of the human brain," NPJ Digit. Med. **3**, Article Number 28 (2020). doi 10.1038/s41746-020-0240-8.
20. M. Pérez-Liva, J. L. Herraiz, J. M. Udias, et al., "Time domain reconstruction of sound speed and attenuation in ultrasound computed tomography using full wave inversion," J. Acoust. Soc. Am. **141** (3), 1595–1604 (2017). doi 10.1121/1.4976688.
21. X. Wu, Y. Li, C. Su, et al., "Ultrasound computed tomography based on full waveform inversion with source directivity calibration," Ultrasonics **132**, Article Number 107004 (2023). doi 10.1016/j.ultras.2023.107004.
22. N. Kamath, R. Brossier, L. Métivier, et al., "Multiparameter full-waveform inversion of 3D ocean-bottom cable data from the Valhall field," Geophysics **86** (1), B15–B35 (2021). doi 10.1190/geo2019-0705.1.
23. P. Routh, A. Ratcliffe, R.-E. Plessix, and R. Neelamani, "Introduction to this special section: Elastic full-waveform inversion," The Leading Edge **44** (5), 336–337 (2025). doi 10.1190/tle44050336.1.
24. R. M. Alford, K. R. Kelly, and D. M. Boore, "Accuracy of Finite-Difference Modeling of the Acoustic Wave Equation," Geophysics **39** (6), 834–842 (1974). doi 10.1190/1.1440470.
25. R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, "On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics," IBM Journal of Research and Development **11** (2), 215–234 (1967). doi 10.1147/rd.112.0215.
26. G. J. Hicks, "Arbitrary source and receiver positioning in finite-difference schemes using Kaiser windowed sinc functions," Geophysics **67** (1), 156–166 (2002). doi 10.1190/1.1451454.
27. J.-P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," J. Comput. Phys. **114** (2), 185–200 (1994). doi 10.1006/jcph.1994.1159.
28. D. Komatitsch and R. Martin, "An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation," Geophysics **72** (5), SM155–SM167 (2007). doi 10.1190/1.2757586.
29. S. Abarbanel and D. Gottlieb, "A Mathematical Analysis of the PML Method," J. Comput. Phys. **134** (2), 357–363 (1997). doi 10.1006/jcph.1997.5717.
30. M. Kuzuoglu and R. Mittra, "Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers," IEEE Microwave Guided Wave Lett. **6** (12), 447–449 (1996). doi 10.1109/75.544545.
31. D. Pasalic and R. McGarry, "Convolutional perfectly matched layer for isotropic and anisotropic acoustic wave equations," in *SEG International Exposition and Annual Meeting, Denver, Colorado, October 17–22, 2010* (SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2010), pp. 2925–2929. doi 10.1190/1.3513453.
32. D. Michéa and D. Komatitsch, "Accelerating a three-dimensional finite-difference wave propagation code using GPU graphics cards," Geophys. J. Int. **182** (1), 389–402 (2010). doi 10.1111/j.1365-246X.2010.04616.x.
33. R.-E. Plessix, "A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications," Geophys. J. Int. **167** (2), 495–503 (2006). doi 10.1111/j.1365-246X.2006.02978.x.
34. E. Polak and G. Ribiere, "Note sur la Convergence de Méthodes de Directions Conjuguées," Revue Française D'informatique et de Recherche Opérationnelle. Série Rouge **3** (R1), 35–43 (1969).

Received *July 29, 2026*
Accepted *August 31, 2026*
Published *November 26, 2026*

Information about the authors

Denis S. Bratchikov — PhD, Research Scientist; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.

Kirill G. Gadylshin — PhD, Head of Laboratory; Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Ac. Koptyug prospekt, 4, 630090, Novosibirsk, Russia.

Sergey V. Sharin — PhD, Expert; RN-Technologies LLC, Ramensky bul'var, 1, 111607, Moscow, Russia.

Artem M. Shkuratov — PhD, Leading specialist; RN-Technologies LLC, Ramensky bul'var, 1, 111607, Moscow, Russia.