УДК 517.6

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ТОКОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ЭКРАНЕ

М. Ю. Медведик[1], Ю. Г. Смирнов[1], С. И. Соболев[2]

Рассмотрена электромагнитная задача дифракции на идеально проводящем экране, сводящаяся к решению псевдодифференциального уравнения. Предложен численный метод для этого уравнения с базисными функциями. Обсуждается параллельная реализация метода и представлены численные результаты.

Ключевые слова: параллельный алгоритм, метакомьютинг, численный метод, интегро-дифференциальное уравнение, электромагнитная задача дифракции.

1. Введение. Статья посвящена численному исследованию векторной задачи дифракции стороннего электромагнитного поля на идеально проводящих тонких экранах. С разработкой теории для данной задачи связаны такие имена, как Х. Гюйгенс, О. Френель, Г. Гельмгольц, Г. Р. Кирхгоф, Д. Лармор, А. Пуанкаре, А. Зоммерфельд и др. В общей постановке задача состоит в нахождении решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих определенным краевым условиям и условиям излучения на бесконечности. Наиболее естественный подход к решению этой задачи — сведение ее к векторному интегродифференциальному уравнению на экране. Такой подход часто называют методом поверхностных токов. Идея метода поверхностных токов принадлежит А. Пуанкаре. В акустических (скалярных) задачах этот метод разрабатывался Релеем (1897). Впервые интегродифференциальное уравнение на экране было получено А. Мауэ в 1949 году. В наших обозначениях это уравнение имеет вид

$$Lu = \operatorname{grad}_\tau A(\operatorname{div} u) + k^2 A_\tau u = f, \quad x \in \Omega,$$

где div — операция поверхностной дивергенции, A — интегральный оператор

$$Au = \int\limits_\Omega \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\, u(y)\, ds,$$

u — векторное поле, касательное к поверхности экрана Ω (плотность поверхностного тока). Индекс τ означает взятие компонент соответствующего векторного поля, касательных к Ω. Центральной проблемой при исследовании разрешимости уравнений указанного вида является выбор пространств для решений и для правых частей таким образом, чтобы обеспечить фредгольмовость (и, если удастся, однозначную разрешимость) в выбранных пространствах. Кроме того, пространство решений должно быть достаточно широким и содержать все возможно допустимые поля.

Изучение этих уравнений было начато в работах А. Мауэ. В [1] доказана теорема единственности (в том числе и для краевой задачи дифракции), исследовано поведение дифракционных полей на бесконечности и в окрестности гладкого края экрана, получены аналитические решения задач дифракции на тонком диске и сфере. Отметим, что в случае плоского экрана авторы применили преобразование Фурье для преобразования уравнений к виду, которое теперь называют псевдодифференциальным.

В работах Я. Н. Фельда, посвященных задаче на тонком экране, предложен подход к построению теории разрешимости краевой задачи дифракции в пространстве $L_1(\Omega)$ $\big(u \in L_1(\Omega)\big)$. Выбрать $L_2(\Omega)$ в качестве пространства решений нельзя, поскольку оно является слишком узким и не содержит решений с требуемой особенностью в окрестности края экрана (такого рода особенность известна, например, из аналитического решения задачи дифракции на полуплоскости). В указанных работах выбор пространств согласован с поведением полей в окрестности ребра, однако нет эффективного описания пространства образов оператора, определяемого левой частью представленного выше уравнения.

[1] Пензенский государственный университет, естественнонаучный факультет, ул. Красная, 40, 440017, г. Пенза; e-mail: medv@mail.ru, smirnov@tl.ru

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: sergeys@parallel.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

После публикации монографии [2] стали активно применяться численные методы (метод моментов, метод Галеркина) для решения задач дифракции на экранах различной формы, но без достаточного математического обоснования, которое отсутствует и в настоящее время. Тем не менее, в численных решениях задач дифракции был накоплен значительный опыт. Имеется ряд монографий по решению задач дифракции на экранах различной формы. Однако следует подчеркнуть, что проблема эффективного численного решения задач дифракции на тонких экранах в настоящее время, по-видимому, пока не решена даже с использованием самых мощных современных ЭВМ.

В данной работе предложен метод, позволяющий существенно ускорить алгоритм вычисления поверхностных токов на экранах произвольной формы. Рассмотрим последовательность действий при сведении задачи дифракции электромагнитного поля на идеально проводящем тонком ограниченном экране к векторному интегродифференциальному уравнению. На первом шаге доказывается единственность поставленной задачи дифракции. На втором — вводятся векторные пространства распределений W и W', в которых будет изучаться интегродифференциальное уравнение на экране. Формулируются предложения, описывающие основные свойства этих пространств, наиболее важное из которых — разложение W в прямую сумму ортогональных подпространств W_1 и W_2 (для $W'-W^1$ и W^2). На третьем шаге исследуются представления полей в виде векторного потенциала и выводится основное интегродифференциальное уравнение на экране, рассматриваемое как псевдодифференциальное. На четвертом шаге выполняется диагональное расщепление псевдодиференциального оператора на подпространствах W_1 и W_2 (этот шаг является ключевым при анализе свойств оператора). Пятый шаг заключается в построении численной схемы метода Галеркина и доказательстве теоремы о ее сходимости.

2. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2 = \{x_3 = 0\} \subset R^3$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ, состоящей из конечного числа простых дуг класса C^∞, сходящихся под ненулевыми углами. Задача дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля E^0, H^0 на бесконечно тонком идеально проводящем экране Ω, расположенном в свободном пространстве с волновым числом k, $k^2 = \omega^2\mu(\varepsilon + i\sigma\omega^{-1})$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \neq 0$, состоит в определении рассеянного электромагнитного поля

$$E,\, H \in C^2(R^3\backslash\overline{\Omega}) \bigcap_{\delta>0} C(\,\overline{R}^3_+\backslash\Gamma_\delta\,) \bigcap_{\delta>0} C(\,\overline{R}^3_-\backslash\Gamma_\delta\,),$$

удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} H = -ikE, \quad \operatorname{rot} E = ikH, \quad x \in R^3\backslash\overline{\Omega} \tag{1}$$

с краевыми условиями для касательной составляющей электрического поля на поверхности экрана

$$E_\tau\big|_\Omega = -E^0_\tau\big|_\Omega, \tag{2}$$

с условиями конечности энергии в любом ограниченном объеме

$$E,\, H \in L^2_{\mathrm{loc}}(R^3) \tag{3}$$

и с условиями излучения на бесконечности (условия Сильвера–Мюллера)

$$\begin{aligned} &E,\, H = o(r^{-1}), \quad r = |x| \to \infty \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} k > 0,\\ &H \times e_r - E = o(r^{-1}), \quad E \times e_r + H = o(r^{-1}),\\ &E,\, H = O(r^{-1}), \quad r \to \infty \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} k = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $e_r = x/|x|$, операция $\times$ означает векторное произведение, $\Gamma_\delta = \{x : |x-y| < \delta,\ y \in \Gamma\}$. Электромагнитные поля гармонически зависят от времени (множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен), $\omega > 0$ — круговая частота, $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\sigma \geqslant 0$ — проводимость среды. Для полного поля имеем $E^{\text{полн.}} = E^0 + E$, $H^{\text{полн.}} = H^0 + H$.

Будем предполагать, что все источники падающего поля находятся вне экрана $\overline{\Omega}$ так, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено $E^0 \in C^\infty(\Omega_\delta)$, $\Omega_\delta = \{x :\ |x-y| < \delta,\ y \in \Omega\}$, откуда следует, что $E^0_\tau\big|_\Omega \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Обычно падающее поле — это либо плоская волна, либо электрический или магнитный диполь, расположенный вне $\overline{\Omega}$. В этих случаях наши условия выполнены. Поле E^0, H^0 является решением системы уравнений Максвелла в свободном пространстве без экрана.

Условия (4) на бесконечности эквивалентны условиям излучения Зоммерфельда при $\operatorname{Im} k = 0$, $k \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} - ik\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = o(r^{-1}), \quad \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = O(r^{-1}), \quad r \to \infty,$$

которые иногда легче проверить. Задача (1) – (4) при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \neq 0$ имеет не более одного решения [3] и может быть сведена к векторному интегродифференциальному уравнению [3]

$$Lu = \big(\operatorname{grad} A(\operatorname{div} u) + k^2 Au\big)\big|_t = f, \tag{5}$$

где A является интегральным оператором

$$Au = \int\limits_{\Omega} \frac{\exp\big(ik|x-y|\big)}{|x-y|}\, u(y)\, ds, \tag{6}$$

$f = 4\pi k E_t^0\big|_\Omega$ и div — тангенциальная дивергенция на Ω. Тангенциальный вектор u называют поверхностной плотностью тока. В случае, когда поле E, $H \in C^2(R^3 \backslash \overline{\Omega}\,)$, получаем формулы

$$E \quad = ik^{-1}\big(\operatorname{grad} A_1(\operatorname{div}\, u) + k^2 A_1 u\big), \quad H = \operatorname{rot} A_1 u; \quad k \neq 0,$$
$$A_1 u = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{\exp\big(ik|x-y|\big)}{|x-y|}\, u(y)\, ds, \qquad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Целью данной работы является применение теории псевдодифференциальных уравнений к задаче дифракции.

3. Псевдодифференциальные уравнения. Задача (5), (6) может быть переписана в виде векторного псевдодиференциального уравнения на многообразии Ω [3]:

$$\operatorname{grad} \Delta^{-1/2}(\operatorname{div} u) + k^2 \Delta^{-1/2} u = f, \tag{7}$$

где Δ — оператор Лапласа. Заметим, что главная часть этого уравнения вырождена. При изучении уравнения (7) соболевское пространство W вводится в соответствии с поведением решения u вблизи границы $\partial\,\Omega$. Определим пространство W как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $\|u\|_W^2 = \|u\|_{-1/2}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{-1/2}^2$. Заметим, что $W = \big\{u \in \widetilde{H}^{-1/2}(\,\overline{\Omega}\,) :\ \operatorname{div} u \in \widetilde{H}^{-1/2}(\,\overline{\Omega}\,)\big\}$, где пространство $\widetilde{H}^s(\,\overline{\Omega}\,)$ является соболевским, определяемым обычным образом. Пусть W_1 и W_2 — подпространства пространства W, такие, что

$$W_1 := \{u \in W;\ \operatorname{div} u = 0\}, \quad W_2 := \{u \in W;\ \operatorname{rot} u = 0\}.$$

Здесь div и rot — тангенциальные дивергенция и ротор на Ω. Пространство W может быть разложено в виде прямой суммы подпространств W_1 и W_2: $W = W_1 \oplus W_2$. При использовании метода квадратичных форм мы можем рассматривать L как ограниченный оператор $L :\ W \to W'$, где через W' обозначено антидуальное пространство для W : $W' = \Big\{u\big|_\Omega :\ u \in H^{-1/2}(M),\ \operatorname{rot} u \in H^{-1/2}(M)\Big\}$; в этом представлении M — замкнутая поверхность, такая, что $\overline{\Omega} \in M$ [3].

Теорема 1. *Для* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ *и* $k \neq 0$ *существует единственное решение уравнения*

$$L\,(k)\, u = f, \quad u \in W, \quad f \in W'. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 1 содержится в [3].

4. Метод Галеркина. Рассмотрим n-мерное пространство $V_n \subset W$. Будем проводить аппроксимации u элементами $u_n \in V_n$. Методом Галеркина находим u_n из системы уравнений

$$(Au_n, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_n.$$

Эти уравнения определяются конечномерным оператором $A_n :\ V_n \to V_n^{'}$, где $V_n^{'}$ — *антидуальное* пространство к V_n.

Основная трудность при решении уравнений электрического поля (8) состоит в том, что оператор A не является сильно эллиптическим. Однако мы предлагаем новую схему метода Галеркина, которая гарантирует сходимость.

Теорема 2. *Пусть* n*-мерные подпространства* $V_n^1 \subset W_1$ *и* $V_n^2 \subset W_2$ *обладают аппроксимационными свойствами в* W_1 *и* W_2 *соответственно. Тогда метод Галеркина на подпространстве* $V_n = V_n^1 + V_n^2$ *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим следующее разложение оператора L:

$$L = L^1 + L^2 = \begin{pmatrix} k^2 L_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & -L_1^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 L_{11}^{(2)} & k^2 \widehat{L}_{12} \\ k^2 \widehat{L}_{21} & L_1^{(2)} + k^2 \widehat{L}_{22} \end{pmatrix},$$

где оператор L^2 компактен, а оператор L^1 непрерывно обратим при $k \neq 0$. Поскольку операторы L^1 и L ограниченны и непрерывно обратимы, а оператор L^2 компактен, то для доказательства сходимости метода Галеркина для оператора L достаточно доказать сходимость этого метода для оператора L^1. Сужения оператора L^1 на подпространства W_1 и W_2 являются непрерывно обратимыми (при $k \neq 0$) операторами $k^2 L_{11}^{(1)}$ и $-L_1^{(1)}$ соответственно. Поэтому метод Галеркина сходится для них на подпространствах W_1 и W_2, а следовательно, и для оператора L^1 на W.

Таким образом, сходимость метода Галеркина доказана, поэтому перейдем к рассмотрению численного метода.

5. Описание численного метода. Разработанный нами метод позволяет рассчитывать поверхностные токи на плоском ограниченном бесконечно тонком и идеально проводящем экране. Форма экрана может носить произвольный характер.

Рассчитанные поверхностные токи представляются в виде двух трехмерных графиков. Первый трехмерный график представляет $|J_x|$-составляющую тока, второй — $|J_y|$-составляющую. Примеры расчетов поверхностных токов, представленных в виде трехмерных графиков, приведены в конце статьи.

5.1. Построение сетки. Опишем способ построения сетки на экране, в качестве которого может быть взята любая поверхность *прямоугольной формы,* удовлетворяющая описанным выше условиям.

На прямоугольном экране прочертим равноотстоящие друг от друга линии по оси Ox и оси Oy таким образом, чтобы прямоугольник целиком был покрыт равномерной прямоугольной сеткой. Граничные линии сетки должны проходить по границе прямоугольника. Точки пересечения вертикальных и горизонтальных линий будем называть *вершинами.* Всем вершинам в прямоугольной области будет присвоен свой индивидуальный номер. Пусть область состоит из n вершин по оси Ox и m вершин по оси Oy. Вершины в области будем нумеровать следующим образом. Вершина с номером "1" располагается в левом нижнем углу. Далее номера расставляются в порядке возрастания по ходу передвижения в правую сторону по оси Ox. Номер $n+1$ присваивается вершине, расположенной во втором слое сетки в самой крайней левой позиции. Дальнейшие номера до вершины $2n$ включительно расставляются в порядке возрастания по ходу передвижения в правую сторону по оси Ox. Далее алгоритм нумерации вершин повторяется для каждого слоя. На рис. 1 представлен пример сетки 8×8 с пронумерованными вершинами.

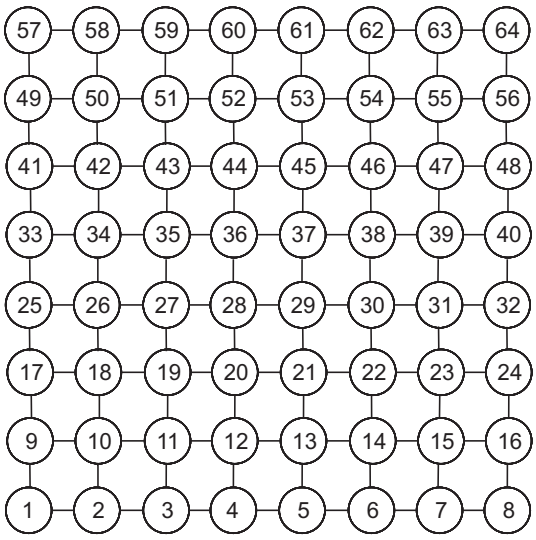


Рис. 1

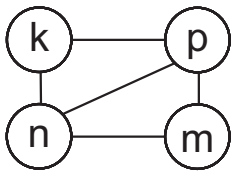


Рис. 2

Линии, соединяющие между собой соседние вершины, называются *горизонтальными* и *вертикальными ребрами.* В сетке, представленной на рис. 1, возможны два вида ребер. Однако мы для повышения точности расчета введем еще и диагональные ребра. Для этого рассмотрим ячейку сетки, изображенную на рис. 2. Линию, соединяющую вершину с номером n с вершиной с номером p, будем называть *диагональным ребром.* Диагональное ребро не существует, если вершина с меньшим номером принадлежит правой границе прямоугольной поверхности. Рассмотрим диагональное ребро, представленное на рис. 2. Пусть количество вершин, расположенных по оси Ox, равно q, а номер нижней вершины равен n и при этом диагональное ребро может существовать; тогда $p = n + q + 1$.

Пусть наша прямоугольная область содержит q вершин по оси Ox и p вершин по оси Oy; тогда количе-

ство ребер каждого типа нетрудно вычислить. Количество диагональных ребер определяется по формуле $(p-1)(q-1)$, количество вертикальных ребер — по формуле $(p-1)(q-2)$, а количество горизонтальных ребер — по формуле $(p-2)(q-1)$. Нетрудно подсчитать общее количество ребер в нашей прямоугольной области. Для этого просуммируем количество диагональных, вертикальных и горизонтальных ребер и получим, что общее число ребер равно

$$num = (p-1)(q-1) + (p-1)(q-2) + (p-2)(q-1).$$

Для дальнейшего рассмотрения метода нам потребуется ввести два понятия: *уровень* и *ряд*. Под уровнем будем понимать совокупность вершин, расположенных по оси Ox на одной из линий сетки вместе с горизонтальными ребрами, их соединяющими, и вместе с вертикальными и диагональными ребрами, выходящими из этих вершин и расположенными выше данной линии сетки. Рядом будем называть совокупность вершин, расположенных по оси Oy на одной из линий сетки вместе с вертикальными ребрами, их соединяющими, и вместе с горизонтальными и диагональными ребрами, выходящими из этих вершин и расположенными правее данной линии сетки.

Опишем алгоритм нумерации ребер в сетке. Первыми нумеруются диагональные ребра, затем вертикальные и последними нумеруются горизонтальные ребра. Диагональные ребра нумеруются, начиная с нуля. Ребро с нулевым номером расположено на пересечении первого ряда и первого уровня. Нумерация последующих ребер аналогична нумерации вершин, т.е. следом за нулевым на том же уровне, но во втором ряду, располагается первое ребро. Первое ребро выходит из второй вершины, расположенной правее по оси Ox, и так далее. Данная процедура продолжается до тех пор, пока не встречается вершина, для которой диагональное ребро построить нельзя, тогда эта вершина пропускается и алгоритм начинает построение с самой левой вершины, расположенной на уровень выше данного.

Описанная процедура повторяется для всех вершин. Вертикальные ребра нумеруются аналогично. Ребро с номером, на единицу большим, чем максимальное из диагональных, выходит из вершины, располагающейся во втором ряду на первом уровне. Следующее по номеру ребро должно выходить из вершины, находящейся правее по оси Ox, т.е. в третьем ряду первого ряда, и так далее. Исключение составляет случай, когда вершина является крайней. Для исключительного случая приходится пропускать две вершины — крайнюю правую на текущем уровне и крайнюю левую вершину, расположенную на уровень выше. Новое ребро располагается на уровень выше во втором ряду. Горизонтальные ребра нумеруются с вершины, расположенной на пересечении второго уровня и первого ряда. Номер первой горизонтальной вершины на единицу больше, чем номер последней вертикальной вершины. Оставаясь на том же уровне, сдвигаемся по оси Ox правее во второй ряд. Вершина, расположенная на пересечении третьего ряда и второго уровня, является следующей горизонтальной вершиной.

Рассмотренная процедура нумерации горизонтальных ребер повторяется до тех пор, пока не встречается вершина, для которой построить ребро нельзя. В этом случае мы пропускаем одну вершину и, тем самым, переходим на уровень выше в первый ряд. Следуя указанному алгоритму, мы пронумеруем только внутренние ребра прямоугольный области. Нетрудно сформулировать критерий принадлежности ребра области. Для этого рассмотрим рис. 3.

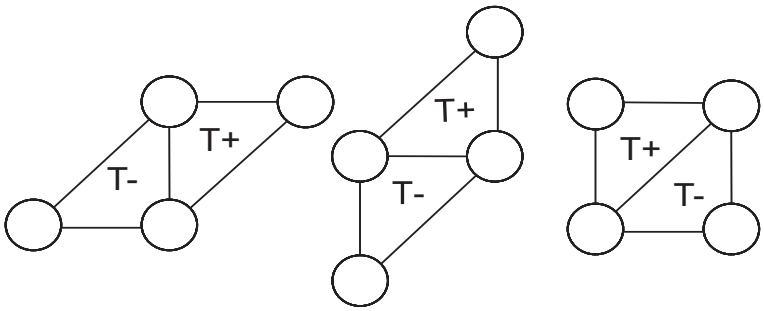


Рис. 3

Ребро принадлежит области, если оно принадлежит области вместе с двумя окаймляющими его треугольниками. Окаймляющие его треугольники будем называть *носителями*. Носители делятся на два вида: T^+ и T^-. Носитель T^+ будем называть положительным носителем, а носитель T^- — отрицательным носителем. Из примера, приведенного на рис. 3, наглядно видно, как располагаются носители для каждого из видов ребер: вертикального, горизонтального и диагонального. На этом этап построения сетки можно считать завершенным.

5.2. Расчет интегралов. В предыдущем разделе было полностью завершено построение сетки на прямоугольной пластине. Этот раздел посвящен описанию метода численного интегрирования, выбору базисных функций и построению матрицы.

Рассмотрим схему метода Галеркина. Следуя алгоритму, предложенному в схеме, мы должны сформировать матрицу на базе построенной сетки. Поскольку ключевыми элементами в сетке являются ребра, то в матрице номер ребра соответствует номеру строки или номеру столбца. Другими словами, размер создаваемой нами матрицы равен $num \times num$, где num — количество ребер в сетке. Матрица заполняется элементами из матричного уравнения $(Au_n, v) = (f, v)$. Каждый элемент матрицы получается путем вычисления четырехкратного интеграла $Au = \int\limits_{\Omega} G(x,y)\,\varphi(x)\,u(y)\,ds$, имеющего особенность в области интегрирования. Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ и $G(x,y) = \dfrac{\exp\bigl(ik|x-y|\bigr)}{|x-y|}$ — функция Грина. В качестве базисных функций $\varphi(x)$ выберем функции, предложенные в [5]. Например, для канонической области $[0,1] \times [0,1]$ имеем

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x_1, x_2 - 1) & \text{в} \quad T^+, \\ (1 - x_1, -x_2) & \text{в} \quad T^-. \end{cases}$$

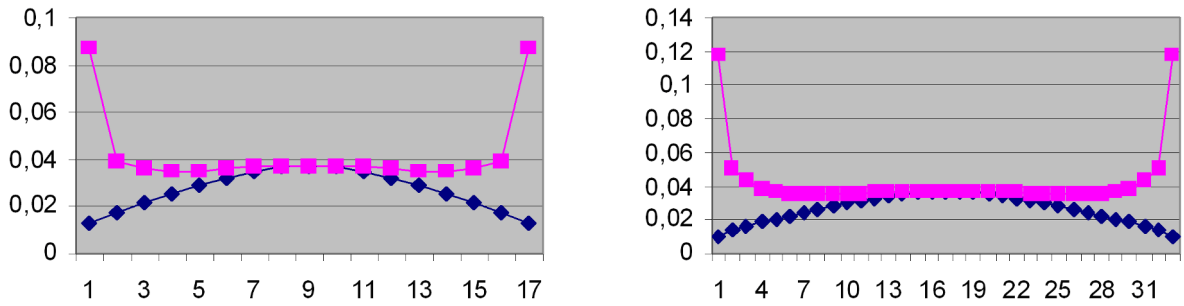
Теперь рассмотрим алгоритм вычисления произвольного элемента матрицы. Для этого выберем элемент a_{ij}, построенный на базе ребер i и j. Первым рассмотрим случай, когда $i \neq j$. Каждое ребро имеет свои окружающие носители. Для ребра i — это носители T_i^+ и T_i^-, для ребра j — это носители T_j^+ и T_j^-. Выполним интегрирование по четырем областям, определяемым носителями каждого из ребер. Для этого каждую сторону носителей разобьем на n равных частей. Проведем линии, соединяющие соответствующие узлы разбиения. Таким образом, мы получаем четыре поверхности, разбитые на одинаковые по площади и форме треугольники. Внутри каждого маленького треугольника выбираем среднюю точку, например, можно взять точку пересечения медиан. Далее выполним интегрирование методом прямоугольников: сумму значений функции во всех точках умножим на площадь основания треугольника. Количество точек интегрирования при этом равно $(n-1)(n-1)$.

Теперь рассмотрим второй случай, когда матричный элемент построен на базе совпадающих ребер $i = j$. Тогда из-за особенности в функции Грина $G(x,y)$ при интегрировании возможно возникновение ситуации, приводящей к делению на нуль. Чтобы избежать этого, мы предлагаем разнести внутренние точки интегрирования. Например, для носителей ребра i в качестве внутренних точек маленьких треугольников можно брать точку пересечения медиан, а для ребра j внутреннюю точку можно рассчитывать как одну треть от середины сторон треугольника. Таким образом, деление на нуль не возникнет. Однако есть еще случай, когда ребра i и j являются соседними. Тогда возможно пересечение только одного из носителей. В этом случае мы можем также воспользоваться способом, описанным выше. Итак, мы завершили описание алгоритма для построения одного элемента матрицы.

Для построения всей матрицы нам потребуется провести перебор по всем ребрам i и j, рассчитав при этом все элементы a_{ij}. Правая часть матричного уравнения рассчитывается путем численного интегрирования базисных функций. Интегрирование производится по носителям, соответствующим ребру с номером, равным номеру строки в матрице. На этом этап формирования матрицы можно считать завершенным. Для нахождения токов осталось только решить систему линейных уравнений. Полученная система линейных уравнений была решена методом Гаусса с выбором главного элемента по строке. Ниже приведены примеры расчета токов для квадратной пластины размером $\lambda \times \lambda$ с более грубой и более точной сеткой (здесь λ — длина волны). Расчет задачи выполнялся дважды. На рис. 4 представлена первая серия графиков, отображающая центральные срезы для поверхностных токов для сетки $19 \times 18 \times 25$ (рис. 4 а) и сетки размером $35 \times 34 \times 25$ (рис. 4 б). Точность расчета полученных результатов можно оценить на основе данных, приведенных в [4].

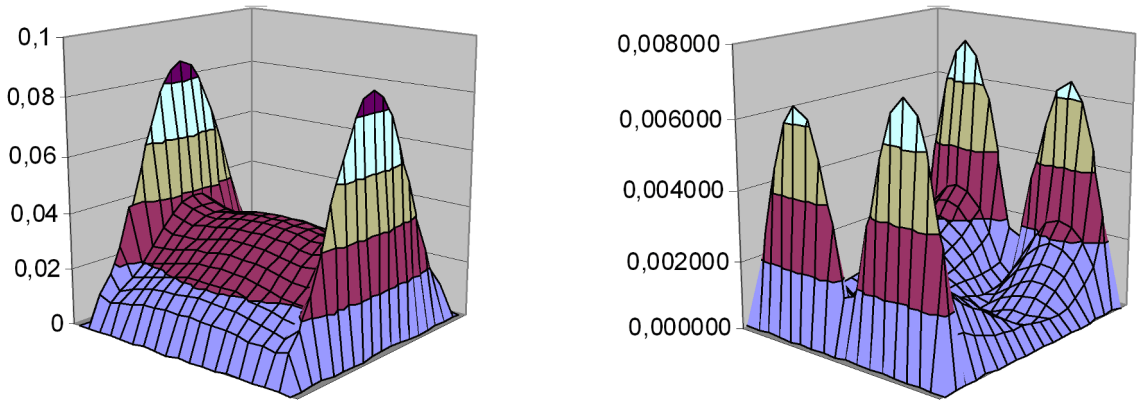
Вторая серия графиков (рис. 5, 6) представляет результаты в виде поверхностных токов. На рис. 5 а и 6 а представлены результаты расчета поверхностных токов $|J_x|$, на рис. 5 б и 6 б приведены результаты расчета поверхностных токов $|J_y|$. Точность расчета можно оценить на основе данных, полученных в [4] и [5].

5.3. Расчет токов на произвольной поверхности. Для расчета токов на экране произвольного вида нам потребуется ранее рассчитанная поверхность прямоугольной формы, целиком включающая в себя выбранный экран. Пусть у нас имеется экран прямоугольной формы, удовлетворяющий заданным условиям и уже рассчитанный с помощью описанного выше метода. Для расчета мы можем воспользоваться созданной ранее базой данных, из которой по номерам ребер i и j мы сможем получить значение элемента a_{ij}. Тогда можно построить новую матрицу для расчетов тока на экране без дополнительных



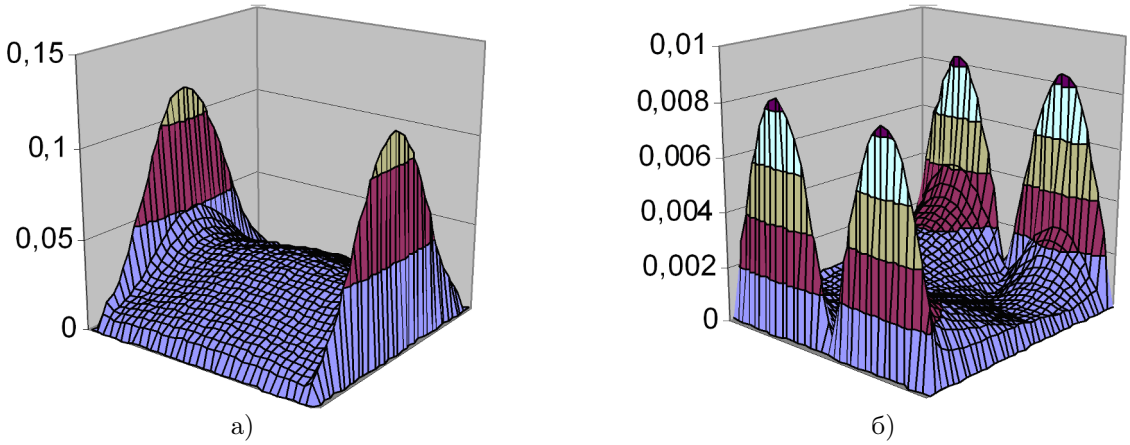
а) б)

Рис. 4. Срезки для поверхностных токов (для сетки $19 \times 18 \times 25$ и $35 \times 34 \times x25$)



а) б)

Рис. 5. Поверхностные токи $|J_x|$ и $|J_y|$ (для сетки $19 \times 18 \times 25$)



а) б)

Рис. 6. Поверхностные токи $|J_x|$ и $|J_y|$ (для сетки $35 \times 34 \times 25$)

вычислений. Для этого нам потребуется использовать лишь часть значений ранее посчитанной матрицы. Данную процедуру будем называть процедурой вырезания элементов. Опишем алгоритм процедуры вырезания.

Для описания алгоритма вырезания нам потребуется ввести несколько допущений и определений. Фигура произвольной формы, которую мы будем вырезать из пластины, должна как можно более точно описываться линиями сетки. Линии сетки, описывающие фигуру, должны целиком находиться в самой

фигуре. Поэтому так же, как и для произвольной пластины, будем считать, что ребро принадлежит фигуре тогда и только тогда, когда оно принадлежат фигуре вместе со всеми носителями, образованными данным ребром. При этом необходимо учесть, что чем точнее повторяет узор сетки саму фигуру, тем точнее будет расчет токов. Также следует отметь, что размер прямоугольной пластины, описывающий фигуру произвольной формы, должен быть как можно меньшего размера. Скорость построения новой матрицы будет напрямую зависеть от размера пластины и количества ребер в сетке. На рис. 7 мы видим это на примере одной и той же фигуры, описываемой двумя разными сетками. С точки зрения скорости счета правая сетка предпочтительней.

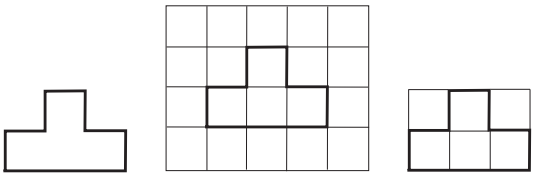


Рис. 7

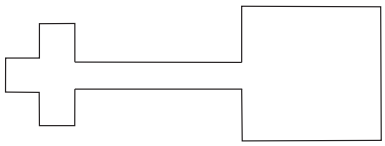
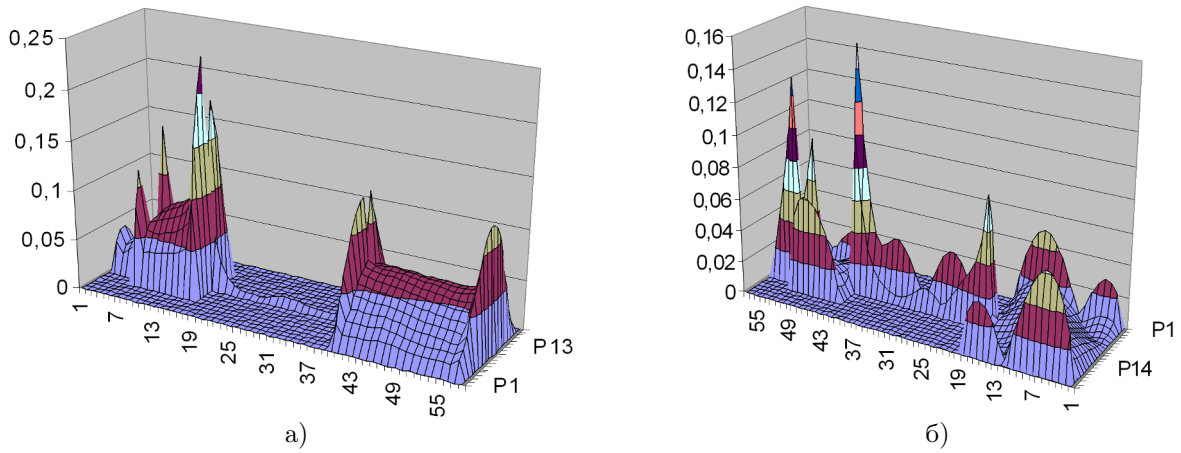


Рис. 8

Сначала определим количество ребер, принадлежащих фигуре. Для этого просмотрим все ребра, принадлежащие прямоугольной области, и выберем среди них те, которые принадлежат фигуре. Разобьем область на минимальное количество “простых” прямоугольников. Под “простым” прямоугольником будем понимать такой прямоугольник, для которого любая его сторона либо принадлежит области целиком, либо не принадлежит. Например, на рис. 7 верхняя часть фигуры является “простым” прямоугольником, а основание не является “простым” прямоугольником. Если сторона принадлежит целиком области, то все ребра, находящиеся на ней, принадлежат фигуре. Для каждого ребра проведем проверку в каждом из таких прямоугольников, чтобы узнать, принадлежит ли ребро области или нет. Для горизонтальных и вертикальных ребер достаточным условием является принадлежность области вершин, окаймляющих ребро. Для диагональных ребер необходимо, чтобы помимо вершин области принадлежала и средняя точка ребра. Пусть количество ребер, принадлежащих фигуре, равно m, тогда размер новой матрицы будет равен $m \times m$. Ребра, входящие в состав фигуры произвольного размера, перенумеруем заново. Для создания новой матрицы из старой будем производить последовательный перебор всех пар ребер, принадлежащих прямоугольной области. Если пара ребер принадлежит области, то соответствующий ему элемент матрицы под новыми номерами переписывается в новую матрицу. Таким образом заполняется вся матрица. В соответствии со старым номером ребра выбираем и правую часть каждого из уравнений. После этого решаем систему линейных уравнений методом Гаусса. Пример расчета сложной фигуры, вырезанной из пластины $\lambda \times 3\lambda$, приведен ниже. В качестве рассчитываемой фигуры бралась фигура, представленная в [5]. Внешний вид фигуры изображен на рис. 8.

Заметим, что точно определить размеры фигуры из [5] не представлялось возможным, поэтому рис. 9 лишь отображает картину поведения токов на схожей фигуре. На рис. 9 а отображены поверхностные токи $|J_x|$, а на рис. 9 б — токи $|J_y|$.



а) б)

Рис. 9. Поверхностные токи $|J_x|$ и $|J_y|$ для фигуры, вырезанной из сетки $19 \times 57 \times 25$

5.4. Решение задачи в распределенной вычислительной среде. Нетрудно заметить, что расчет задач подобного рода требует значительных вычислительных затрат. Для обеспечения адекватности математических моделей реальным физическим задачам необходимо использовать матрицы как можно бóльших размеров. Наиболее естественным подходом, упрощающим решение задачи, является использование матричной симметрии. За счет этого время на составление матрицы можно сократить в два раза. Учитывая, что основное время при решении задач уходит на формирование матрицы, это существенно ускоряет расчет всей задачи. Например, расчет поверхностных токов для экрана прямоугольной формы размером $\lambda \times 3\lambda$ продолжался в течение двух часов на компьютере Pentium-4 с тактовой частотой 2400 и оперативной памятью 512 мегабайт. Размер матрицы в этой задаче был равен 2950×2951 элементов.

Наиболее естественным приемом ускорения расчета подобных задач является использование параллельных вычислений. В данном случае идея алгоритма распараллеливания очень проста. Основная часть времени при расчете задачи уходит на формирование матрицы, однако процессы расчета ее элементов возможно организовать так, что они оказываются независимыми друг от друга и, тем самым, могут быть переданы для исполнения на разные вычислительные процессоры. Дальнейшее существенное ускорение достигается за счет применения параллельных алгоритмов для решения систем линейных уравнений. Ниже приведен пример решения задачи для фигуры крестообразной формы в случае пластины размером $\lambda \times \lambda$ (используется сетка $49 \times 48 \times 64$, размер матрицы составляет 6673×6674 элементов).

Для расчета матрицы был задействован вычислительный комплекс НИВЦ МГУ, использовавшийся в режиме “по занятости”. К расчетам подключались узлы трех вычислительных кластеров комплекса, не занятые в данный момент через штатную систему очередей. Таким образом, расчет задачи происходил на фоне основной работы кластеров, при этом среднее число одновременно работающих над задачей процессоров составило 36, максимальное — 50. Вычисления были организованы следующим образом: вся матрица была разбита на вычислительные порции по 1000 элементов, каждый процессор получал задание в виде очередной порции, обсчитывал ее, передавал результаты на центральный сервер системы и затем запрашивал новую порцию. Максимальное время расчета одной порции составляло 7 мин. 29 сек., минимальное — 1 мин. 7 сек., среднее — 3 мин. 45 сек. Общее время счета задачи составило 69 часов 34 мин., при этом суммарное время работы всех задействованных процессоров составило 2787 часов, т.е. средний однопроцессорный персональный компьютер работал бы над задачей около 116 дней. Эффективность работы системы X-Com, с помощью которой были организованы вычисления, составила 99.72 %. В процессе счета в общей сложности между центральным сервером и вычислительными узлами было передано 2.2 Гб данных.

Расчет поверхностных токов для крестообразной фигуры с использованием ранее посчитанной матрицы производился на персональном компьютере Pentium-4 с тактовой частотой 2400 и оперативной памятью 512 мегабайт. Скорость расчета для задачи произвольной формы равна двум часам. Точная форма фигуры изображена на рис. 10. Размеры лопасти креста равны шести ячейкам сетки, т.е. общая длина креста равна восемнадцати ячейкам сетки.

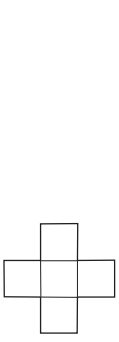
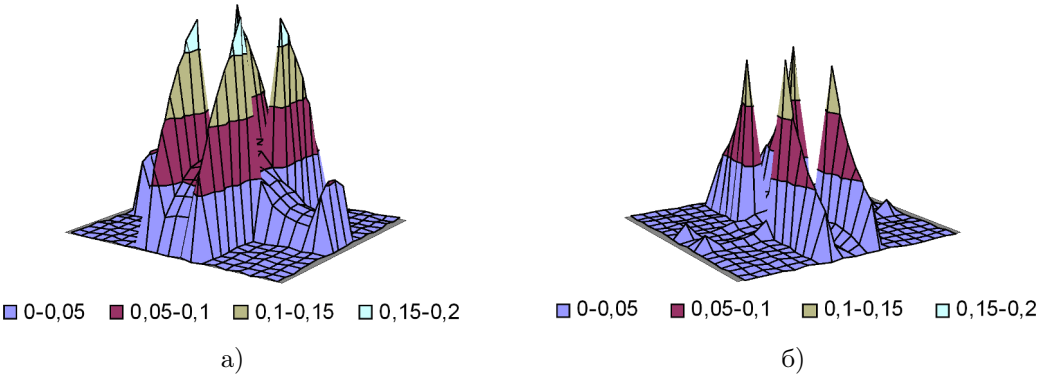


Рис. 10



а) б)

Рис. 11. Поверхностные токи $|J_x|$ и $|J_y|$ для фигуры, вырезанной из сетки $49 \times 48 \times 64$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов № 03–07–90274, 05–07–90206, 05–07–90292).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hoenl H., Maue A.W., Westpfahl K.* Theorie der Beugung. Berlin: Springer-Verlag, 1961.
2. *Harrington R.F.* Field computation by moment methods. Albany: Macmillian Publishers, 1961.
3. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: Радиотехника, 1996.
4. *Zwamborn A. and Berg P.* A weak form of the conjugate gradient FFT method for plate problems // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1991. **39**. 224–228.
5. *Rao S.M., Wilton D.R., and Glisson A.W.* Electromagnetic scattering by surface of arbitrary shape // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1982. **30**. 409–417.

Поступила в редакцию
15.03.2005