

УДК 621.385

МЕТОД МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА ПРИ РАСЧЕТЕ РЕКУПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ

А. С. Парфенова¹

Проведено численное исследование коллектора электронов лампы бегущей волны (ЛБВ). Предложен метод расчета электрических полей в областях с аксиальной симметрией и со сложной границей, на отдельных участках которой заданы граничные условия первого или второго рода. Приведены результаты тестовых расчетов трехступенчатого коллектора с рекуперацией энергии электронов.

Ключевые слова: матрица функции источника, расчет электрических полей, уравнение Пуассона, численные методы, функция Грина.

Введение. Коэффициент полезного действия (КПД) преобразования кинетической энергии электронов в сверхвысокочастотные колебания для широкополосных ЛБВ, используемых в системах космической связи, не превышает 15 – 20 %. Важным способом повышения технического КПД подобных устройств является использование многоступенчатых рекуператоров, позволяющих возвращать кинетическую энергию “отработанных” электронов в источник питания и увеличить общий КПД до 50 – 70 % [1]. Явление вторичной электронной эмиссии (ВЭЭ) существенно уменьшает КПД рекуперации и его необходимо учитывать в численных моделях. Учет ВЭЭ приводит к необходимости многократного расчета самосогласованного электрического поля, создаваемого пространственным зарядом первичного пучка и вторичными электронами нескольких порядков [2].

Успешные экспериментальные исследования подобных систем возможны только при наличии адекватных численных моделей, учитывающих все вышеописанные факторы и специфику задачи. Проблема математического моделирования коллектора электронов ЛБВ связана с решением самосогласованной задачи движения электронного потока в электрическом поле [3], создаваемом распределением потенциалов на его электродах и пространственным зарядом электронов. Фокусирующее магнитное поле имеет значительную величину лишь на входе в коллектор и стремится к нулю в его объеме, способствуя оседанию первичного пучка электронов на стенках коллектора.

Одним из эффективных способов нахождения самосогласованных электрических полей в таких системах является метод матричной функции Грина [5]. В этом методе матрица функции источника рассчитывается интегральным методом для исследуемой области до начала траекторного анализа и затем используется при вычислении потенциала пространственного заряда электронного потока на каждом временном шаге моделирования движения потока. Однако этот метод в своей стандартной форме хорошо работает только для небольших областей. При расчете же реальных конструкций необходимый объем памяти для матрицы функции Грина может занимать более четырех гигабайт (Гб), что превосходит размеры оперативной памяти 32-разрядных компьютеров [6]. В настоящей статье предлагается метод, включающий в себя численные алгоритмы, используемые при построении и вычислении матрицы функции источника для решения уравнения Пуассона.

1. Математическая постановка задачи. Областью решения задачи является аксиально-симметричная замкнутая вспомогательная поверхность $S = S_1 + \bigcup_i^{N_i} S_i + \bigcup_j^{N_j} S_j$, ограничивающая рассматриваемую область V и состоящая из конечного числа $N = 1 + N_i + N_j$ областей. Часть из них совпадает с поверхностями металлических электродов коллектора. Металлические электроды коллектора находятся под разными постоянными потенциалами U_{0i} и отделяются друг от друга диэлектрическими вставками. Диэлектрические вставки расположены либо в коаксиальных цилиндрах, либо между двумя дисками большого радиуса, образованными электродами, и вдали от их края. Учитывая такую характерную особенность конструкции, будем строить N_j дополнительных поверхностей, расположенных в указанных каналах и

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Воробьевы горы, 119992, г. Москва; e-mail: angelina_p@front.ru, a.parfenova@phys.msu.ru

перпендикулярных металлическим электродам в сечениях, где можно пренебречь влиянием диэлектрической вставки и края каналов на распределение поля. Однородные граничные условия второго рода в указанных сечениях можно свести к неоднородным граничным условиям первого рода, при этом нетрудно найти аналитические выражения для распределения потенциала U_{0j} в них. На вспомогательном сечении пролетного канала S_1 ставится граничное условие первого рода со значением потенциала U_{01} . Таким образом, можно задать неоднородные краевые условия первого рода на всей вспомогательной поверхности S .

Будем полагать, что вспомогательная поверхность S образована вращением вокруг некоторой оси образующей $\Gamma = \Gamma_1 + \bigcup_i^{N_i} \Gamma_i + \bigcup_j^{N_j} \Gamma_j$. Нумерация элементов образующей такая же, как и для вспомогательной поверхности. Введем систему цилиндрических координат r, φ, z , ось z которой совпадает с осью поверхности вращения. Для дальнейших вычислений введем систему координат вращения (h, τ, φ) так, чтобы поверхность S совпала с частью координатной поверхности $h = h_0, \tau \in \Gamma, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Определенные в одной точке орты $\{h^0, \tau^0, \varphi^0\}$ образует правую тройку векторов, а связь координат вращения с цилиндрическими координатами выражается формулами $r = r(h, \tau), z = z(h, \tau)$. Пример сечения Ω рассматриваемой области V меридиональной плоскостью, проходящей через ось вращения, представлен на рис. 1.

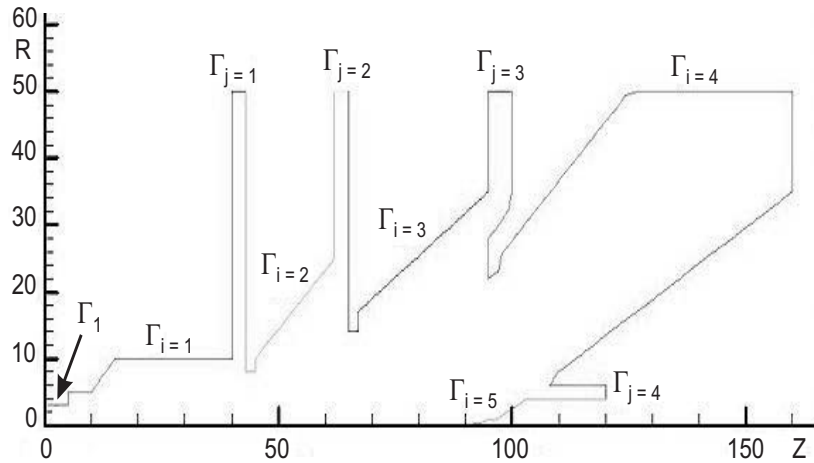


Рис. 1. Пример рассматриваемой аксиально-симметричной области Ω с образующей Γ

В ряде практически важных задач можно ограничиться рассмотрением стационарной задачи, когда можно пренебречь явной зависимостью от времени тока первичного пучка электронов, электрического и магнитного полей. В этом случае можно записать следующую самосогласованную систему уравнений, описывающих физические параметры коллектора с рекуперацией энергии электронов:

$$\Delta U = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.1) \quad U(r, z)|_{S_i} = U_{0i} \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.2)$$

$$\sigma(\tau) = \frac{\tilde{\sigma}(\tau)}{(\tau - \alpha_l)^{\kappa_1} (-\tau + \beta_l)^{\kappa_2}}, \quad (1.3) \quad \mathbf{E} = -\nabla U, \quad (1.4)$$

$$I_m = \text{const}, \quad m = \overline{1, M}, \quad (1.5) \quad \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} = \frac{e_0}{m_0} \left\{ \mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}_m}{\gamma_m} \mathbf{B}_0 \right] \right\}, \quad (1.6)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_m}{dt} = \frac{\mathbf{u}_m}{\gamma_m}, \quad \mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m \gamma_m, \quad \gamma_m = \sqrt{1 + u_m^2}, \quad (1.7) \quad \mathbf{r}_m|_{t=0} = \mathbf{r}_{m0}, \quad \mathbf{v}_m|_{t=0} = \mathbf{v}_{m0}, \quad (1.8)$$

$$\rho_n = \sum_{n,m} \frac{q_{n,m}}{V_n}, \quad (1.9) \quad I_{\Gamma(s)} = \sum_m I_m|_{\Gamma(s)}, \quad (1.10)$$

$$W_{\Gamma(s)} = \sum_m \frac{I_m}{e_0} m_0 (\gamma_m - \gamma_{m0}) \Big|_{\Gamma(s)}, \quad (1.11) \quad \eta_{\text{recup}} = \frac{W_0 - W}{W_0}. \quad (1.12)$$

Уравнение Пуассона (1.1) совместно с граничными условиями (1.2) используется для нахождения самосогласованного электрического поля $\mathbf{E} = \{E_r, 0, E_z\}$. Здесь U — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда электронного пучка, ε_0 — диэлектрическая постоянная.

Образующая Γ может иметь угловые точки, в которых функция плотности поверхностного заряда σ имеет интегрируемую особенность. Для удобства вычислений на отрезке, в окрестности концов которого встречаются особые точки, поверхностную плотность заряда можно представить в виде (1.3), где $\tilde{\sigma}(\tau)$ —

уже гладкая функция на отрезке $\alpha_l \leq \tau \leq \beta_l$ [4]. Значения κ_1 и κ_2 характеризуют порядок особенностей на концах отрезка и определяются значениями углов ω_1 и ω_2 в концевых точках: $\kappa_n = (\pi - \omega_n)/(2\pi - \omega_n)$, $n = 1, 2$. Электрические поля определяются по формуле (1.4). При описании самосогласованного движения электронного пучка используется дискретная модель из M трубок тока. Трубка тока определяется траекторией движения крупной частицы и переносит ток I_m , для которого выполняется закон сохранения в форме (1.5). Движение крупных частиц в виде бесконечно тонких электронных колец определяется релятивистскими уравнениями движения (1.6), (1.7) в цилиндрической системе координат, где $\mathbf{r}_m = \{r_m, 0, z_m\}$, $\mathbf{v}_m = \{v_{mr}, v_{m\varphi}, v_{mz}\}$, $\mathbf{u}_m = \{u_{vr}, u_{m\varphi}, u_{mz}\}$, γ_m — координата, скорость, нормированный импульс и релятивистский фактор Лоренца для каждой крупной частицы с номером m соответственно; e_0 , m_0 — заряд и масса электрона; $\mathbf{B}_0 = \{B_{0r}, 0, B_{0z}\}$ — известная индукция фокусирующего магнитного поля в сечении Ω (рис. 2). Начальные условия для первичного электронного пучка (1.8) ставятся на образующей Γ_1 , описывающей поперечное сечение S_1 пролетного канала. Раздача заряда осуществляется в соответствии с (1.9), где ρ_n — плотность заряда ячейки сетки с номером n ; $q_{n,m} = I_m \Delta t_{nm}$ — заряд, вносимый m -ой трубкой тока в n -ую ячейку; Δt_{nm} — время пролета m -ой трубки тока n -ой ячейки; V_n — объем n -ой ячейки сетки.

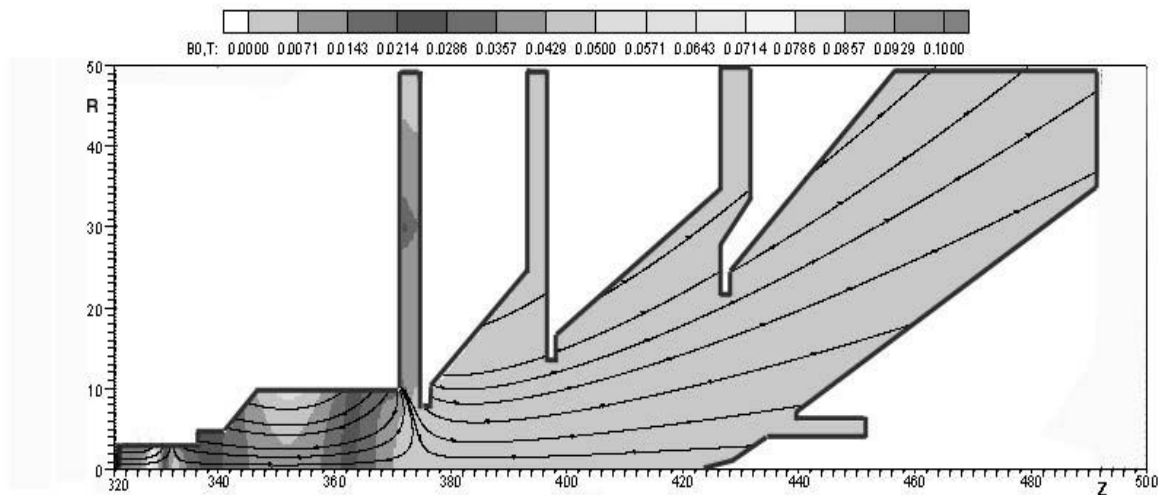


Рис. 2. Картина силовых линий индукции магнитного поля

Решение поставленной самосогласованной задачи методом итераций по пространственному заряду позволяет определить распределения тока (1.10) и мощности тока (1.11), осаждаемых на поверхности электродов, КПД электронной рекуперации (1.12). По формуле (1.10) можно оценить величину тока $I_{\Gamma(s)}$ на поверхности электрода s , где суммирование ведется по трубкам тока m , осевшим на электрод s . Аналогично по формуле (1.11) оценивается мощность $W_{\Gamma(s)}$, поглощаемая поверхностью s -го электрода, где γ_{m0} — релятивистский фактор m -ой крупной частицы на входе в коллектор. Зная входящую в коллектор электронную мощность W_0 и полную мощность W , поглощаемую поверхностью всех электродов коллектора, можно оценить КПД рекуперации η_{recup} по формуле (1.12).

Далее будет описан метод нахождения электрических полей.

2. Метод нахождения самосогласованного электрического поля. Линейная краевая задача первого рода (1.1), (1.2) нахождения самосогласованного электрического поля разбивается на две: однородную задачу ($\rho = 0$) с неоднородными граничными условиями для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta U_{V0} = 0, \\ U_{V0}(r, z)|_S = U_{S0} \end{cases} \quad (2.1)$$

и неоднородную задачу ($\rho \neq 0$) с однородными граничными условиями для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta U_V = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ U_V(r, z)|_S = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Задача (2.1) определяет скалярное электрическое поле, создаваемое заданным поверхностным распределением потенциалов. Из (2.2) находится потенциал, создаваемый известным распределением про-

пространственного заряда. Решение исходной задачи (1.1), (1.2) представимо в виде суммы решений этих двух задач: $U = U_{V0} + U_V$. Ниже описаны способы решения краевых задач (2.1) и (2.2).

2.1. Скалярное поле, создаваемое заданным распределением поверхностного потенциала. Решение задачи (2.1) находится методами теории потенциала. Сначала необходимо найти распределение плотности поверхностного заряда σ_0 , индуцированного потенциалами электродов, из интегрального уравнения

$$U_{V0}(r, z)|_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_0}{R} ds = U_{S0}. \quad (2.3)$$

Учтем симметрию вращения рассматриваемой области и разложим ядро $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$ интегрального уравнения в ряд Фурье по углу φ в цилиндрической системе координат [7]:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(r, z, r', z') \cos m\varphi. \quad (2.4)$$

В силу четности ядра относительно азимутального угла φ полученное разложение содержит только

косинус-гармоники ядра R_m , имеющие вид $R_m(r, z, r', z') = \frac{1}{\pi\epsilon_0 d} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2m\beta d\beta}{(1 - p^2 \cos^2 \beta)^{1/2}}$, где $\beta = \frac{\varphi' - \varphi}{2}$, $d = \sqrt{(r + r')^2 + (z - z')^2}$, $p = 2\sqrt{rr'}/d$, $0 < p < 1$.

В дальнейшем ограничимся первым членом ($m = 0$) разложения (2.4) в силу аксиальной симметрии рассматриваемой области. Пусть $K(p)$ — эллиптический интеграл первого рода; тогда

$$R_0(r, z, r', z') = \frac{K(p)}{\pi\epsilon_0 d}. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) определяет потенциал в точке с координатами (r, z) , создаваемый бесконечно тонким равномерно заряженным кольцом с единичным зарядом, расположенным в сечении z' и имеющим радиус r' .

Интегральное уравнение (2.3) представимо в следующем виде:

$$U_{V0}(\tau)|_{\Gamma} = \int_{\Gamma} R_0(\tau, \tau') \sigma_0(\tau') r(\tau') d\tau'. \quad (2.6)$$

Если найдено поверхностное распределение заряда $\sigma_0(\tau')$, наведенное заданным распределением потенциала на электродах, то потенциал во внутренних точках M рассматриваемой области Ω определяется следующим интегралом:

$$U_{V0}(M)|_{\Omega} = \int_{\Gamma} R_0(M, \tau') \sigma_0(\tau') r(\tau') d\tau'. \quad (2.7)$$

Ядро $R_0(\tau, \tau')$ интегрального уравнения (2.6) имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов.

2.2. Потенциал, индуцированный пространственным зарядом электронного потока. Скалярный потенциал U_V , обусловленный пространственным зарядом электронов и соответствующий краевой задаче (2.2), будем искать методом функции Грина [5]:

$$G(M, M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R(M, M')} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_1(M_s)}{R(M, M_s)} ds. \quad (2.8)$$

Здесь $\frac{1}{R(M, M')}$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, $\sigma_1(M_s)$ — распределение заряда на поверхности S , индуцированного единичным зарядом, расположенным в точке M_s . Для нахождения $\sigma_1(M_s)$ используется интегральное уравнение теории потенциалов при $M \in V$, $M' \in V$:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{R(M, M')} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_1(M_s)}{R(M, M_s)} ds' = 0.$$

Интегральное представление решения краевой задачи (2.2) через функцию Грина выглядит следующим образом:

$$U_V(M)|_V = \int_V \rho(M') G(M, M') dV. \quad (2.9)$$

Плотность пространственного заряда $\rho(M')$ считается известной функцией координат и определяется из решения уравнений движения по формуле (1.9).

Ограничимся рассмотрением аксиально-симметричной задачи и воспользуемся разложением (2.4); тогда потенциал в области Ω записывается в виде интеграла

$$U_V(r, z)|_\Omega = \int_\Omega \rho(r', z') G_0(r, z, r', z') d\Omega', \quad (2.10)$$

где $G_0(r, z, r', z') = R_0(r, z, r', z') + \int_\Gamma R_0(r, z, \tau') \sigma_1(\tau') r(\tau') -$ функция Грина для аксиально-симметричной области. Плотность поверхностного заряда σ_1 , индуцированная единичным зарядом, определяется из интегрального уравнения $\int_\Omega R_0(r, z, r', z') d\Omega' + \int_\Gamma R_0(r, z, \tau') \sigma_1(\tau') d\tau' = 0$.

Полученные соотношения для нахождения самосогласованного электрического поля (2.6), (2.7), (2.10) будут использованы при численном решении задачи (1.1), (1.2).

3. Численный метод нахождения самосогласованных электрических полей. Разобьем образующую Γ одномерной неравномерной сеткой $\Gamma_0 < \Gamma_1 < \Gamma_2 < \dots < \Gamma_N$ размерностью N_S , а область распространения пучка Ω — двумерной сеткой размером M_r на M_z по координатам r и z соответственно. Пусть $N_{S'}$ — число точек поверхностных источников на образующей Γ ($N_S = N_{S'}$), N_V — число узлов двумерной сетки, равное $M_r \times M_z$, $N_{V'}$ — число точек источников пространственного заряда в области Ω , равное $(M_r - 1) \times (M_z - 1)$.

Дискретный аналог распределения потенциала $\bar{U}_{V0}$, соответствующий интегралу (2.7), можно описать вектором длины N_V и представить в виде

$$\bar{U}_{V0} = \hat{g}^{(VS')} (\hat{g}^{(SS')})^{-1} \bar{U}_{S0}. \quad (3.1)$$

Здесь $\bar{U}_{S0}$ — заданный вектор значений потенциала в точках разбиения поверхности длины N_S . Квадратная матрица $\hat{g}^{(SS')}$ размера $N_S \times N_{S'}$ связана с дискретным представлением интегрального уравнения (2.6): $\bar{U}_S = \hat{g}^{(SS')} \bar{\sigma}_{S'}$, где $\bar{\sigma}_{S'}$ — вектор распределения плотности поверхностного заряда. Матрица $\hat{g}^{(SS')}$ вычисляется из (3.1) и имеет диагональное преобладание в силу следующего используемого представления полного эллиптического интеграла первого рода $K(p)$, входящего в функцию R_0 [8]:

$$K(p) = [a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_1^2 + \dots] + [b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_1^2 + \dots] \ln(1/p_1) + \varepsilon(p),$$

где $a_0 = 1.3862944$, $a_1 = 0.1119723$, $a_2 = 0.0725296$, $b_0 = 0.5$, $b_1 = 0.1213478$, $b_2 = 0.0288729$, $p + p_1 = 1$, $\varepsilon(p)$ — погрешность, удовлетворяющая условию $|\varepsilon(p)| \leq 3 \times 10^{-5}$ при учете трех слагаемых. Численное интегрирование логарифмической особенности проводится с помощью квадратур Каспера [7], которые позволяют учитывать особенность без ее явного выделения, при этом точки наблюдения s и точки источников s' на границе Γ могут совпадать. Входящая в (3.1) матрица $\hat{g}^{(VS')}$ — прямоугольная матрица размера $N_V \times N_{S'}$, связанная с влиянием поверхностных зарядов на потенциал внутри области.

Однородная краевая задача (2.1) для заданных геометрии области и параметров сеток решается один раз и ее результат сохраняется в памяти компьютера. Поля, соответствующие этой краевой задаче, определяются наведенными зарядами на поверхности электродов при отсутствии электронного пучка. Далее на каждой последующей итерации результат расчета решения однородной краевой задачи (2.1) прибавляется к решению неоднородной краевой задачи (2.2).

Дискретный аналог распределения потенциала $\bar{U}_V$, который соответствует интегральному уравнению (2.10), можно описать вектором длины N_V и представить в виде

$$\bar{U}_V = \hat{g}^{(VV')} \bar{\rho}_{V'} - \hat{g}^{(VS')} \bar{\sigma}_{\text{beam}}, \quad (3.2)$$

где $\bar{\sigma}_{\text{beam}} = (\hat{g}^{(SS')})^{-1} \hat{g}^{(SV')} \bar{\rho}_{V'}$ — вектор распределения плотности поверхностного заряда, индуцируемый пространственным зарядом электронного пучка, описываемым вектором $\bar{\rho}_{V'}$ длины $N_{V'}$. Матрица

$\hat{g}^{(SV')}$ — прямоугольная матрица размера $N_S \times N_{V'}$, связанная с наличием ограничивающей металлической поверхности электродов. Матрица $\hat{g}^{(VV')}$ — прямоугольная матрица размера $N_V \times N_{V'}$, связанная со взаимодействием пространственных зарядов, если не учитывать наличие электродов. Таким образом, учитывая выражение для $\bar{\sigma}_{\text{beam}}$ и вынося общий множитель $\bar{\rho}_{V'}$ за скобки, можно получить

$$\bar{U}_V = \hat{G} \bar{\rho}_{V'}, \quad (3.3)$$

где

$$\hat{G} = [\hat{g}^{(VV')} - \hat{g}^{(VS')} (\hat{g}^{(SS')})^{-1} \hat{g}^{(SV')}] \quad (3.4)$$

— матрица функции Грина неоднородной краевой задачи (2.2). В области Ω точки наблюдения V выбираются в узлах сетки, а заряды располагаются в центрах ячеек сетки V' . Матрицы $\hat{g}^{(SS')}$, $\hat{g}^{(VS')}$, $\hat{g}^{(SV')}$, $\hat{g}^{(VV')}$, $\hat{G}$ определяются только геометрическими характеристиками коллектора электронов, поэтому могут быть рассчитаны один раз и сохранены в памяти компьютера.

3.1. Алгоритмы учета пространственного заряда. Далее описаны три численных алгоритма, используемые при построении и вычислении матрицы функции источника. Последовательно применяя эти три алгоритма при расчете электрического потенциала $\bar{U}_V$, можно сочетать быстродействие и необходимые размеры дискретизации рассчитываемой области коллектора электронов.

A1. Алгоритм введения вспомогательной сеточной функции на равномерной прямоугольной сетке для вычисления матрицы $\hat{g}^{(VV')}$. Для уменьшения объема информации, необходимой для построения матрицы функции Грина $\hat{G}$ и ускорения расчета, эта матрица разбивается на две матрицы (3.4) с размерами, равными исходной. Первая матрица $\hat{g}^{(VV')}$ связана с учетом потенциала электронного пучка в свободном пространстве. Как правило, способ прямого расчета компонент этой матрицы не экономичен из-за больших размеров необходимых для ее описания массивов, достигающих нескольких Гб и превышающих объем допустимой оперативной памяти персональных компьютеров. Чтобы сократить объем требуемой оперативной памяти, строится вспомогательная матрица существенно меньшего размера, из которой матрица $\hat{g}^{(VV')}$ может быть однозначно восстановлена.

Рассмотрим равномерную прямоугольную сетку с шагами Δr и Δz по осям r и z соответственно и с размерностью $M_r \times M_z$. Рассмотрим на ней сеточную функцию $\hat{g}^{(VV')}$. Элементы этой сеточной функции, согласно (2.5), можно записать в виде $g^{(VV')} = A \frac{K(P_{VV'})}{\sqrt{(z_V - z_{V'})^2 + (r_V + r_{V'})^2}}$, где A — коэффициент пропорциональности, V — номер узла сетки, V' — номер точки расположения пространственного заряда, $K(P_{VV'})$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

При изменении значений V и V' в пределах $1 \leq V \leq N_V = M_r M_z$, $1 \leq V' \leq N_{V'} = M'_r M'_z$ размерность сеточной функции $g^{(VV')}$ составляет $\dim(g^{(VV')}) = N_V \times N_{V'} = M_r \times M'_r \times M_z \times M'_z$, где $M'_r = (M_r - 1)$, $M'_z = (M_z - 1)$. На рис. 3 представлено расположение узлов сетки V и точек расположения пространственных зарядов V' .

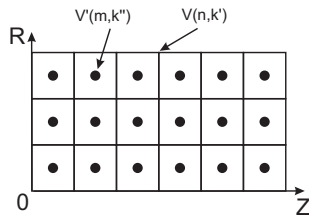


Рис. 3. Фрагмент сетки с зарядами

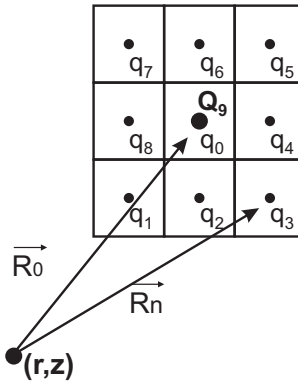


Рис. 4. Пример ячейки крупной сетки, содержащей девять ячеек мелкой сетки. В центре каждой мелкой ячейки размещены бесконечно тонкие кольцевые заряды, которые объединяются в кластер

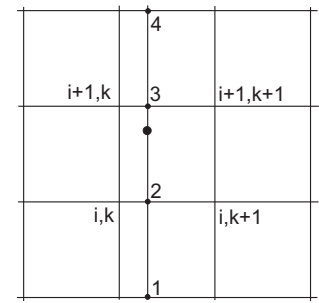


Рис. 5. Двумерная интерполяция по шестнадцати точкам

Рассмотрим вспомогательную сеточную функцию $f_{mnk} = A \frac{K(P_{nmk})}{\sqrt{Dz_k^2 + (r_m + r_n)^2}}$, где r_n — точка наблюдения, r_m — точка источника, $Dz_k = \frac{\Delta z}{2} + \Delta z(k-1)$, $P_{mnk} = \frac{2\sqrt{r_m r_n}}{\sqrt{Dz_k^2 + (r_m + r_n)^2}}$, $1 \leq n \leq M_r$, $1 \leq m \leq M'_r$, $1 \leq k \leq M'_z$, $r_n = \Delta r(n-1)$, $r_m = \frac{\Delta r}{2} + \Delta r(m-1)$. Ее размерность равна $\dim(f_{mnk}) = M_r \times M'_r \times M'_z$.

Утверждение. Сеточная функция $g^{(VV')}$ может быть однозначно восстановлена с помощью функции f_{mnk} с размерностью в M_z раз меньшей, чем размерность сеточной функции $g^{(VV')}$.

С помощью сеточной функции f_{mnk} матрица $\hat{g}^{(VV')}$ восстанавливается построчно последовательным перебором всех узлов сетки (точек наблюдения) V и всех точек расположения пространственных зарядов V' . Матрица $\hat{g}^{(VV')}$ не создается в явном виде целиком, а последовательно восстанавливается по строкам. Далее каждая полученная строка матрицы $\hat{g}^{(VV')}$ последовательно умножается на вектор пространственного заряда $\bar{p}_{V'}$. В результате такого умножения получаем часть решения $\bar{U}_V^{(I)} = \hat{g}^{(VV')} \bar{p}_{V'}$, (первое слагаемое в (3.3)) неоднородной задачи (2.2), связанную со взаимодействием пространственных зарядов.

Замечание 1. Преобразование f_{mnk} является вырожденным по координате z , так как разные значения $z_{k''}$ и $z_{k'}$ соответствуют одному и тому же значению Dz_k , где $1 \leq k'' \leq M'_z$, $1 \leq k' \leq M_z$, $1 \leq k \leq M'_z$ и $Dz_k = |z_{k''} - z_{k'}|$.

Согласно замечанию 1, массив f_{mnk} будет содержать повторяющиеся фрагменты, поэтому объем памяти для него можно сократить еще в два раза.

Замечание 2. Возможно обобщение алгоритма восстановления матрицы $\hat{g}^{(VV')}$ на случай нерегулярной сетки через интерполяцию рассчитанных значений сеточной функции f_{mnk} для равномерной сетки.

Для реальных конструкций $M_z \gg M_r$, поэтому выигрыш в используемом объеме оперативной памяти составляет порядка 1000 раз.

A2. Алгоритм экономичного хранения матриц в памяти компьютера для нахождения вклада поверхностных зарядов в решение $\bar{U}_V$ неоднородной задачи. В представлении (3.4) для матрицы функции Грина $\hat{G}$ вторая матрица (слагаемое) учитывает вклад в потенциал, обусловленный поверхностными зарядами, индуцированными объемным зарядом электронного пучка. Эта матрица представляется в виде произведения двух прямоугольных матриц с числом элементов, существенно меньшим числа элементов исходной матрицы: $\underbrace{\hat{g}^{(VS')}}_2 \underbrace{(\hat{g}^{(S'V')} \bar{p}_{V'})}_1$, где $\hat{g}^{(S'V')} = (\hat{g}^{(SS')})^{-1} \hat{g}^{(SV')}$ —

матрица размеров $N_{S'}$ на $N_{V'}$. При этом число операций для построения этой части решения $\bar{U}_V^{(II)} = -\hat{g}^{(VS')} (\hat{g}^{(SS')})^{-1} \hat{g}^{(SV')} \bar{p}_{V'}$ (второе слагаемое в (3.3)) оказывается также значительно меньшим, чем при использовании исходной матрицы. Пусть $K_{S'V'}$ — число операций при умножении матрицы $\hat{g}^{(S'V')}$ размера $N_{S'} \times N_{V'}$ на вектор $\bar{p}_{V'}$ длины $N_{V'}$, $K_{VS'}$ — число операций при умножении матрицы $\hat{g}^{(VS')}$ размера $N_V \times N_{S'}$ на вектор длины $N_{S'}$, $K_{VV'}$ — число операций при умножении матрицы $\hat{g}^{(VS')} (\hat{g}^{(SS')})^{-1} \hat{g}^{(SV')}$ размера $N_V \times N_{V'}$ на вектор $\bar{p}_{V'}$ длины $N_{V'}$.

Утверждение. Число операций $K_{S'V'} + K_{VS'}$ при умножении матрицы размера $N_{S'} \times N_{V'}$ на вектор длины $N_{V'}$ и умножении матрицы размера $N_V \times N_{S'}$ на вектор длины $N_{S'}$ меньше, чем число операций $K_{VV'}$ при умножении матрицы размера $N_V \times N_{V'}$ на вектор длины $N_{V'}$: $K_{S'V'} + K_{VS'} < K_{VV'}$.

Суммарное число операций в первом случае: $K_{S'V'} + K_{VS'} = (N_V + N_{V'})N_{S'} + (N_S + N_{S'})N_{V'} \cong 4N_S N_{V'}$. Суммарное число операций во втором случае: $K_{VV'} = (N_V + N_{V'})N_{V'} \cong 2N_{V'}^2$.

Предложенный алгоритм, использующий эту оценку, позволяет сэкономить объем оперативной памяти в $N_V = M_r M_z$ раз и увеличить быстродействие по сравнению с прямым перемножением матриц.

A3. Алгоритм объединения удаленных зарядов в кластеры при учете взаимодействия между зарядами. Алгоритм основан на введении двух сеток. Крупная сетка используется для учета пространственного заряда на расстояниях, превышающих радиус действия кулоновских сил, при этом удаленные от точки наблюдения заряды объединяются в кластер — систему девяти зарядов (рис. 4). В окрестности точки наблюдения, ограниченной этим радиусом, вклад в пространственный заряд учитывается на мелкой сетке. В дополнение к предыдущим двум, этот алгоритм позволил сократить время расчета еще в несколько раз [9].

Суммарный заряд в центре кластера равен сумме зарядов: $Q_9 = \sum_{n=0}^8 q_n$. Центр кластера с зарядом Q_9 расположен в точке с координатами (r'_0, z'_0) . Расстояние от точки наблюдения с координатами (r, z) до

центра системы зарядов (r'_0, z'_0) равно $|\mathbf{R}_0| = \sqrt{(z'_0 - z)^2 + (r'_0 - r)^2}$; $|\mathbf{R}_n| = \sqrt{(z'_n - z)^2 + (r'_n - r)^2}$ — расстояние от точки наблюдения с координатами (r, z) до каждого заряда системы ($n = \overline{0, 8}$) с координатами (r'_n, z'_n) . Кластеры создаются только для тех зарядов, которые удалены от точки наблюдения на расстоянии, большем радиуса действия кулоновских сил.

С введением укрупненной сетки сокращается размерность матрицы $\hat{g}^{(VV')}$, что ускоряет ее расчет. Область пучка Ω покрыта двумерной сеткой размером $M_r \times M_z$ и с шагами Δr и Δz по координатам r и z соответственно. Пусть дана точка наблюдения V с координатами (r, z) ; полное число узлов объемной сетки в области Ω равно N_V . Точка источника V' характеризуется координатами (r'_n, z'_n) ; полное число объемных источников в области Ω равно $N_{V'}$. Введем крупную сетку с шагами $m\Delta r$ и $m\Delta z$ по координатам r и z соответственно. Выделим область вокруг точки наблюдения размером, кратным m : $mk\Delta r$ по координате r и $mk\Delta z$ по координате z . За пределами рассматриваемой области будем рассчитывать вклад в пространственный заряд точки наблюдения на крупной сетке. Внутри рассматриваемой области, а также в окрестности образующей Γ вклад в пространственный заряд точки наблюдения будем учитывать на мелкой исходной сетке с шагами Δr и Δz . Значения m и k подбирались экспериментально и были взяты равными 3 и 2, соответственно.

Введение крупной сетки позволило снизить время счета еще в несколько раз без ухудшения точности, так как нет необходимости детализировать поля дальних зарядов [9]. Покажем, что погрешность процедуры объединения удаленных от точки наблюдения зарядов в кластеры имеет второй порядок малости.

Оценим величину $|U_9(r, z) - Q_9 G_0(r, r'_0, z - z'_0)|$, где $U_9(r, z)$ — потенциал, создаваемый системой девяти зарядов (рис. 4) в точке наблюдения с координатами (r, z) ; $Q_9 G_0(r, r'_0, z - z'_0)$ — потенциал, создаваемый в точке (r, z) одним суммарным зарядом, который заменяет кластер; $G_0(r, r'_0, z - z'_0)$ — потенциал в точке наблюдения (r, z) , создаваемый расположенной в сечении z'_0 бесконечно тонкой кольцевой нитью с зарядом, равным единице, и с радиусом r'_0 ; этот потенциал вычисляется по формуле (2.5).

Потенциал, создаваемый кластером в точке наблюдения, может быть представлен в виде

$$U_9(r, z) = \sum_{n=0}^8 q_n G_0(r, r'_n, z - z'_n). \quad (3.5)$$

Обозначим потенциал $G_0(r, r'_0, z - z'_0)$ через G_{00} .

Рассмотрим случай, когда кластер расположен на больших расстояниях от точки наблюдения. Оценим величину погрешности, вносимой в расчет при замене кластера зарядов одним суммарным зарядом, расположенным в точке (r'_0, z'_0) . Для этого разложим величины, входящие в (3.5), в ряд Тейлора в точке (r'_0, z'_0) до второго порядка малости. Пусть $\Delta r_n, \Delta z_n$ — расстояния между центром кластера (r'_0, z'_0) и точками расположения зарядов (r'_n, z'_n) . Предположим, что $\Delta r_n = \Delta z_n = h$, где h — шаг сетки. Подставим полученные разложения в (3.5) и получим

$$\begin{aligned} U_9(r, z) &= \sum_{n=0}^8 q_n G_{00} + \sum_{n=1}^8 \left(\frac{\partial G_{00}}{\partial z} \Delta z_n + \frac{\partial G_{00}}{\partial r} \Delta r_n \right) (q_0 + q_{or} \Delta r_n + q_{oz} \Delta z_n) + \frac{o(h)}{\sqrt{(r + r'_0)^2 + (z - z'_0)^2}} = \\ &= Q_9 G_{00} + \sum_{n=1}^8 q_0 \left(\frac{\partial G_{00}}{\partial z} h + \frac{\partial G_{00}}{\partial r} h \right) + \frac{o(h)}{\sqrt{(r + r'_0)^2 + (z - z'_0)^2}}. \end{aligned}$$

Отметим, что второе слагаемое в полученной формуле, отвечающее дипольному приближению, равно нулю вследствие симметрии расположения зарядов в кластере (сумма каждой пары зарядов дает нуль). Окончательно имеем следующую оценку:

$$U_9(r, z) = Q_9 G_0(r, r'_0, z - z'_0) + \frac{o(h)}{\sqrt{(r + r'_0)^2 + (z - z'_0)^2}}.$$

3.2. Нахождение электрического поля по найденным значениям потенциала. По найденным в узлах сетки значениям потенциала численно вычисляется самосогласованное электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla U$, $\mathbf{E} = \{E_r, E_z\}$. Метод полиномов Лагранжа для численного дифференцирования и интерполирования по четырем точкам дает хорошую точность на равномерной одномерной сетке [8]. В данной работе используется интерполяция Лагранжа для двумерной сетки по шестнадцати точкам с помощью введения шаблона 4×4 (рис. 5).

Составляющие E_r и E_z электрического поля вычисляются по формулам $E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$, $E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$. Для определения $E_{z(i,k)}$ — компоненты z электрического поля в ячейке с номером (i, k) — необходимо

с помощью численного дифференцирования Лагранжа вычислить значения компоненты E_z в четырех точках 1, 2, 3, 4, а затем проинтерполировать полученные в этих точках значения E_z .

Аналогичные действия выполняются и для вычисления компоненты r электрического поля в ячейке с номером (i, k) .

Погрешность вычисления первой производной по четырем равноудаленным точкам методом Лагранжа имеет четвертый порядок малости $\sim \Delta z^4$; интерполирование полученных четырех значений производной в равноотстоящих точках 1, 2, 3, 4 дает погрешность $\sim \Delta r^4$. Тогда погрешность вычисления частной производной по шаблону 4×4 имеет порядок $o(\sqrt{(\Delta z)^8 + (\Delta r)^8})$.

4. Результаты численных расчетов. На основе предложенных алгоритмов была разработана программа на языке VISUAL FORTRAN 95 для численных исследований электронных СВЧ-устройств. С ее помощью были исследованы физические процессы в реальной конструкции аксиально-симметричного трехступенчатого коллектора с рекуперацией энергии отработанных электронов широкополосной ЛБВ. Были проведены расчеты электрических полей и траекторный анализ электронного потока.

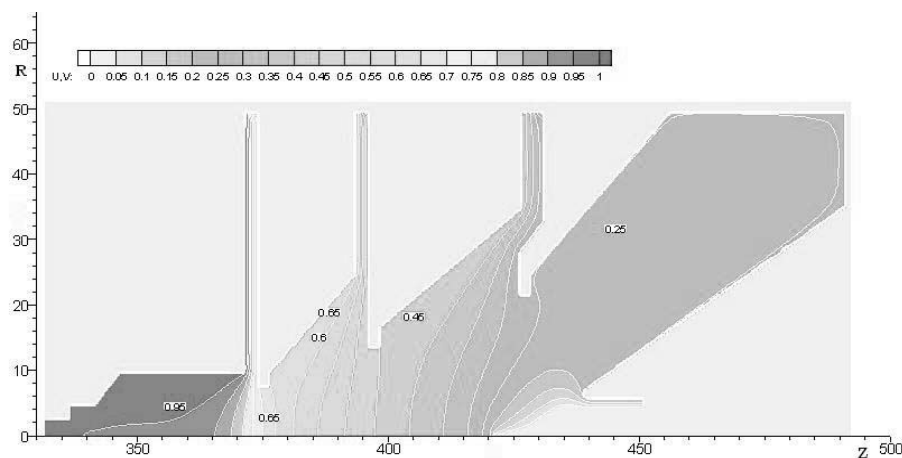


Рис. 6. Распределение потенциала в рекуператоре электронов на восьмой итерации по заряду

Точность вычисления электрических полей определялась путем численного эксперимента. Для расчета были подобраны следующие параметры сеток: $\Delta r = \Delta z = h = 0,35$ мм, $M_z = 461$, $M_r = 148$, $N_S = 679$. На рис. 6 представлено распределение потенциала, рассчитанное при этих параметрах. Число итераций для сходимости решения с относительной погрешностью не более 1 % было равно восьми. При расчете электрических полей с удвоением шагов сетки по координатам r и z (см. таблицу) относительная разность составляла в среднем по сетке 17 %.

Параметры сеток

Шаги сетки, $\Delta r = \Delta z = h$, мм	Число разбиений по оси z , M_z	Число разбиений по оси r , M_r	Число разбиений образующей Γ , N_S
0.25	644	206	679
0.50	323	104	679

На рис. 7 представлены силовые линии самосогласованного электрического поля, полученного численным дифференцированием потенциала U (см. п. 3.2).

На рис. 8 представлен расчет траекторий электронного потока в меридиональной плоскости без учета алгоритмов ВЭЭ [10]. Электронный пучок имеет определенное распределение по скоростям на входе в коллектор. На первой итерации при отсутствии пространственного заряда электронный пучок локализован вблизи оси прибора (рис. 8, а). С увеличением числа итераций под действием расталкивающих сил пространственного заряда электронный пучок постепенно расширяется и больше оседает на электродах коллектора (рис. 8, б). Видны существенные качественные отличия с учетом пространственного заряда (рис. 8, б) и без него (рис. 8, а).

Вычислительные эксперименты, проведенные в соответствии с предложенными алгоритмами и при учете алгоритмов ВЭЭ, хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований [10].

5. Заключение. Предложены способы, позволяющие на порядки сократить запросы к памяти компьютера и увеличить быстродействие при расчете электрических полей методом матричной функции

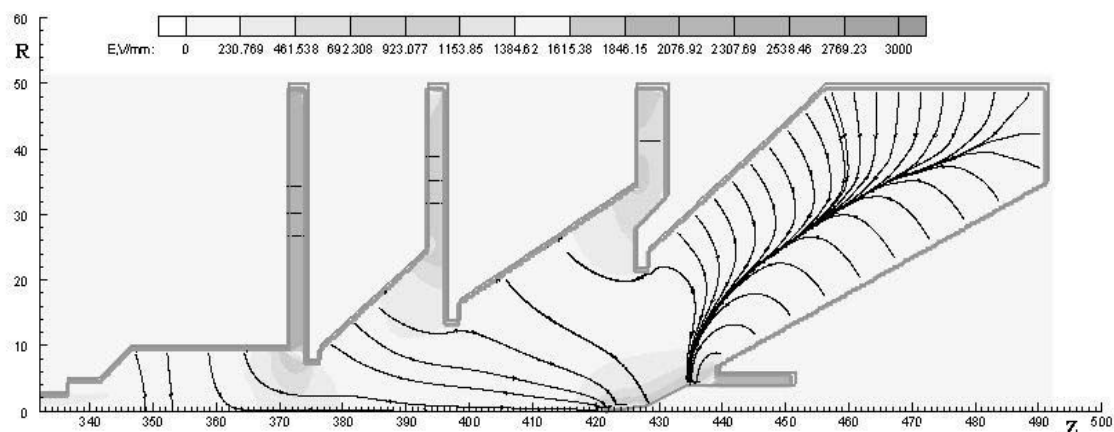


Рис. 7. Самосогласованное электрическое поле в рекуператоре электронов на восьмой итерации по заряду

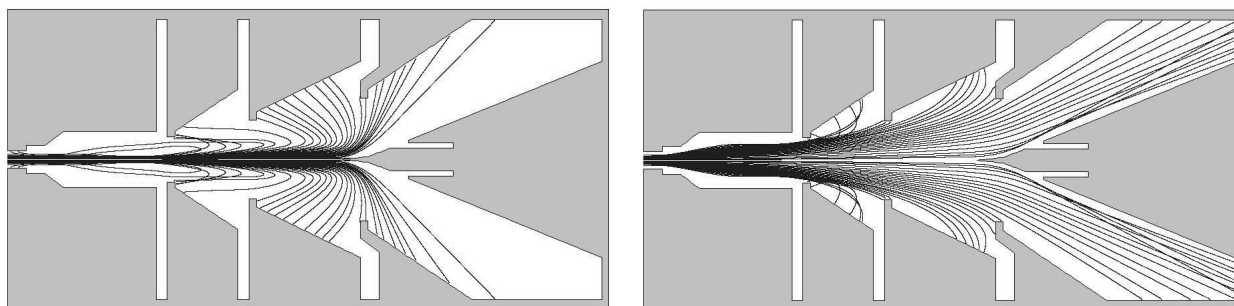


Рис. 8. Траектории частиц в меридиональной плоскости (а — первая итерация по заряду, б — восьмая итерация по заряду)

Грина. С помощью реализованного метода возможно моделирование коллекторов СВЧ-приборов и их оптимизация. Полученные алгоритмы и методики применимы для расчетов широкого класса СВЧ-устройств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лопухин В.М., Родякин В.Е., Сандалов А.Н. Теоретические исследования коллекторных систем // Радиоэлектроника. 1985. **28**, № 10. 22–34.
2. Singh A., Valfells A., Kolander M., Granatstein V.L. Computer aided design of depressed collectors for high power electron tubes // Proc. of AIP Conference. **691**. American Institute of Physics at Melville. New York, 2003.
3. Свешиников А.Г., Якунин С.А. Численные модели бесстолкновительной плазмодинамики // Математическое моделирование. 1989. **1**, № 4. 1–25.
4. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
5. Молоковский С.И., Сушков А.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991.
6. Парфенова А.С., Пикунов В.М. Метод матричной функции Грина в задачах расчета рекуператора электронов ЛБВ // IX Всероссийская конференция “Волновые явления в неоднородных средах”. Звенигород. 24–29 мая 2004. № 4. 14–15. М., 2004.
7. Хокс П., Каспер Э. Основы электронной оптики. М.: Мир, 1993.
8. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
9. Лыгин В.К., Мануилов В.Н., Цимринг Ш.Е. Численный анализ интенсивных протяженных электронных пучков мазеров на циклотронном резонансе // Новые методы расчета электронно-оптических систем. М.: Наука, 1983. 44–50.
10. Белугин В.М., Васильев А.Е., Ветров В.В., Парфенова А.С., Пикунов В.М., Розанов Н.Е. Разработка и тестирование программы расчета коллекторных систем с учетом каскада вторичных электронов. Препринт физического факультета МГУ. № 10. М., 2005.

Поступила в редакцию
07.05.2005