

УДК 519.614.2

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННОЙ С УСТОЙЧИВОСТЬЮ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

А. А. Иванчиков¹

В работе рассмотрены численные методы решения спектральной задачи, связанной с устойчивостью течения Куэтта, — решения уравнений Навье–Стокса в области между двумя бесконечными вращающимися цилиндрами. Дается аналитическое решение дифференциальной спектральной задачи для некоторых частных случаев. В результатах численных расчетов показывается зависимость спектра от числа Рейнольдса, а также связь спектра с устойчивостью течения Куэтта. Приводятся иллюстрации собственных функций.

Ключевые слова: спектральная задача, устойчивость течений вязкой жидкости, уравнения Навье–Стокса, течение Куэтта, вихри Тейлора, метод Арнольди.

Введение. Рассмотрим уравнения Навье–Стокса в области между двумя бесконечными соосными цилиндрами, каждый из которых вращается с постоянной угловой скоростью. Ограничимся лишь решениями, периодическими вдоль оси цилиндра и не зависящими от угла поворота относительно оси. Хорошо известно одно стационарное решение этой задачи — это течение Куэтта. Оно имеет аналитическое выражение и лишь одну отличную от нуля угловую компоненту скорости, зависящую только от r . Известно также, что при достаточно больших значениях числа Рейнольдса существует другое решение стационарной задачи, называемое вихрями Тейлора и имеющее вид наложенных друг на друга торов [15]. Такая картина хорошо согласуется с физическими экспериментами, в которых течение Куэтта с ростом числа Рейнольдса становится неустойчивым и происходит его бифуркация в вихри Тейлора [4].

С устойчивостью течения Куэтта естественным образом связана спектральная задача. Она формулируется для оператора, получающегося линеаризацией уравнений Навье–Стокса в окрестности течения Куэтта.

Областью применения результатов настоящей работы может быть численная стабилизация неустойчивого решения нестационарной задачи, поскольку, как будет показано далее, и при численном моделировании течение Куэтта теряет устойчивость. Задачу стабилизации можно сформулировать как задачу построения таких краевых условий, которые позволили бы при возмущении течения Куэтта не дать решению уйти к вихрям Тейлора и, более того, устремить норму возмущения к нулю. С этой целью предлагается применить алгоритм, подробно рассмотренный в [5]. Его ключевым моментом является численное решение спектральной задачи. Наиболее близкими по содержанию являются работы [2, 7, 8].

В [2] исследуется устойчивость течения Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами. Рассматриваемые решения спектральной задачи принадлежат более широкому классу — функциям, периодическим вдоль оси цилиндра (с периодом T) и относительно угла вращения вокруг оси (с периодом l). Представление решений рядами Фурье сводит задачу к одномерной. Численные эксперименты посвящены построению нейтральных кривых при различных l и при различных отношениях угловых скоростей вращения цилиндров. Нейтральная кривая представляет собой зависимость числа Рейнольдса от T в момент, при котором младшее собственное значение имеет нулевую действительную часть, т.е. соответствует границе устойчивости.

В [7] исследуются методы вычисления младших собственных значений спектральной задачи для линеаризованных уравнений Навье–Стокса в произвольной области. Метод Арнольди используется для нахождения грубого приближения к собственному значению с последующим применением метода обратных итераций к задаче, сдвинутой на это приближение. Борьба в основном идет с плохой обусловленностью системы путем переобусловливания и с высокой размерностью задачи путем распараллеливания.

В [8] решалась похожая спектральная задача в прямоугольной области как с краевыми условиями первого рода, так и с периодическими условиями по одному направлению. В отличие от этой задачи возникли следующие осложнения: увеличение числа компонент вектора скорости, усложнение структуры оператора и его несимметричность. В качестве основного метода применялся метод Арнольди [9], метод

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: Ivanchikov_A@mail.ru

явного вычисления оператора использовался для контроля кратности собственных значений. Результаты работы [8] существенно использовались в численном алгоритме стабилизации с границы неустойчивых решений уравнений Навье–Стокса [5].

Настоящая статья организована следующим образом. В первой части дается формулировка задачи в дифференциальном случае. Затем приводится дискретный аналог всех рассматриваемых в работе уравнений и формулируется метод Арнольди применительно к нашему случаю. Следующим шагом дается аналитическое решение дифференциальной спектральной задачи для $Re = 0$ (что соответствует отсутствию нелинейной части уравнений) и в некоторых других частных случаях. Последняя, основная часть, посвящена численным экспериментам. В ней иллюстрируется сходимость спектра дискретной задачи к спектру дифференциальной при измельчении сетки; поведение спектра при изменении числа Рейнольдса; возникновение неустойчивости при решении нестационарных уравнений Навье–Стокса с увеличением числа Рейнольдса и ее связь со спектром.

1. Постановки задач

1.1. Краевая задача для уравнений Навье–Стокса в цилиндрических координатах. Рассмотрим задачу Навье–Стокса в декартовых координатах в области между двумя бесконечными цилиндрами радиусов r_0, r_1 , периодическую по направлению оси цилиндра:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} + Re \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ -v^1 \sin \phi + v^2 \cos \phi|_{x^2+y^2=r_0^2} = 1, \quad -v^1 \sin \phi + v^2 \cos \phi|_{x^2+y^2=r_1^2} = 0, \\ v^3|_{\partial C} = 0, \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y, z + T), \quad p(x, y, z) = p(x, y, z + T). \end{cases}$$

Пусть внутренний цилиндр вращается с угловой скоростью $1/r_0$, а внешний покоится. Перейдем к цилиндрическим координатам $\{r, \phi, z\}$ и новым компонентам скоростей $\{v^r, v^\phi, v^z\}$:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi, \\ y = r \sin \phi, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{cases} v^1 = v^r \cos \phi - v^\phi \sin \phi, \\ v^2 = v^r \sin \phi + v^\phi \cos \phi, \\ v^3 = v^z. \end{cases}$$

Тогда после стандартных преобразований получим уравнения

$$\begin{cases} -\Delta v^r + \frac{v^r}{r^2} + \frac{2v^\phi}{r^2} + Re \left(\frac{v^\phi v_r^r}{r} - \frac{v^\phi{}^2}{r} + v^r v_r^r + v^z v_z^r \right) + p_r = 0, \\ -\Delta v^\phi + \frac{v^\phi}{r^2} - \frac{2v_r^r}{r^2} + Re \left(\frac{v^\phi v_\phi^\phi}{r} + \frac{v^\phi v^r}{r} + v^r v_r^\phi + v^z v_z^\phi \right) + \frac{p_\phi}{r} = 0, \\ -\Delta v^z + Re \left(\frac{v^\phi v_\phi^z}{r} + v^r v_r^z + v^z v_z^z \right) + p_z = 0, \\ (rv^r)_r + v_\phi^\phi + (rv^z)_z = 0, \\ v^\phi|_{r=r_0} = 1, \quad v^\phi|_{r=r_1} = 0, \quad v^r|_{\partial C} = v^z|_{\partial C} = 0, \\ \mathbf{v}(r, \phi, z) = \mathbf{v}(r, \phi, z + T), \quad p(r, \phi, z) = p(r, \phi, z + T), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\text{где } \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Будем рассматривать только не зависящие от ϕ решения, т.е. $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \phi} = \mathbf{0}$. Для определенности положим $\phi = 0$. Уравнения (1.1) при этих ограничениях примут вид

$$\begin{cases} -\Delta v^r + \frac{v^r}{r^2} + Re \left(-\frac{1}{r} v^\phi{}^2 + v^r v_r^r + v^z v_z^r \right) + p_r = 0, \\ -\Delta v^\phi + \frac{v^\phi}{r^2} + Re \left(\frac{1}{r} v^\phi v^r + v^r v_r^\phi + v^z v_z^\phi \right) = 0, \\ -\Delta v^z + Re (v^r v_r^z + v^z v_z^z) + p_z = 0, \\ (rv^r)_r + (rv^z)_z = 0, \\ v^\phi|_{r=r_0} = 1, \quad v^\phi|_{r=r_1} = 0, \quad v^r|_{\partial \Omega} = v^z|_{\partial \Omega} = 0, \quad \mathbf{v}(r, z) = \mathbf{v}(r, z + T), \quad p(r, z) = p(r, z + T), \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, а вектор скорости $\mathbf{v} = \{v^r(r, z), v^\phi(r, z), v^z(r, z)\}$ определен в плоской области $\Omega = [0, T] \times [r_0, r_1]$ (рис. 1.1). Последняя система является исходной для наших исследований.

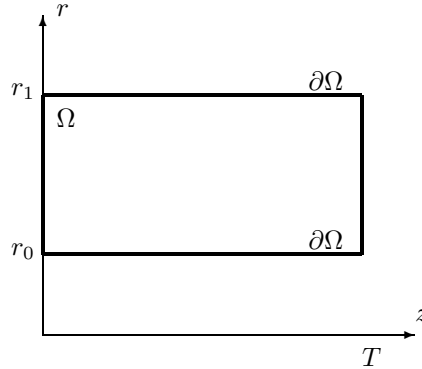


Рис. 1.1. Область Ω

Оператор в (1.2) представим как сумму линейного и нелинейного; тогда получим более компактное представление исходной системы:

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{v}) + \text{Re } \mathbf{N}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \mathbf{G}(p) = \mathbf{0}, \\ \text{div } \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$v^\phi|_{r=r_0} = 1, \quad v^\phi|_{r=r_1} = 0, \quad v^r|_{\partial\Omega} = v^z|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{v}(r, z) = \mathbf{v}(r, z + T), \quad p(r, z) = p(r, z + T).$$

1.2. Линеаризация уравнений Навье–Стокса и спектральная задача. Пусть $\mathbf{w}$ — некоторое решение задачи (1.2). Отнимем и прибавим его в (1.2): $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}$. Переобозначая $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, отбрасывая нелинейные члены по $\mathbf{u}$ и учитывая, что $\mathbf{w}$ — решение, получим

$$\begin{cases} -\Delta u^r + \frac{u^r}{r^2} + \text{Re} \left[-\frac{1}{r} (w^\phi u^\phi + u^\phi w^\phi) + (w^r u_r^r + u^r w_r^r) + (w^z u_z^r + u^z w_z^r) \right] + p_r = 0, \\ -\Delta u^\phi + \frac{u^\phi}{r^2} + \text{Re} \left[\frac{1}{r} (w^\phi u^r + u^\phi w^r) + (w^r u_r^\phi + u^r w_r^\phi) + (w^z u_z^\phi + u^z w_z^\phi) \right] = 0, \\ -\Delta u^z + \text{Re} [(w^r u_r^z + u^r w_r^z) + (w^z u_z^z + u^z w_z^z)] + p_z = 0, \\ (ru^r)_r + (ru^z)_z = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(r, z) = \mathbf{u}(r, z + T), \quad p(r, z) = p(r, z + T), \end{cases}$$

или в более компактном виде

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \text{Re} [\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{N}(\mathbf{w}, \mathbf{u})] + \mathbf{G}(p) = \mathbf{0}, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(r, z) = \mathbf{u}(r, z + T), \quad p(r, z) = p(r, z + T). \end{cases}$$

Полученные уравнения представляют собой линеаризацию нелинейной задачи (1.3) в окрестности решения $\mathbf{w}$. Таким решением является течение Куэтта:

$$\begin{cases} w^r = 0, \\ w^\phi = \frac{r_0}{r_1^2 - r_0^2} \left(\frac{r_1^2}{r} - r \right), \\ w^z = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

При достаточно больших Re задача (1.3) имеет решение, отличное от течения Куэтта, — вихри Тейлора [15]. Спектральная задача, связанная с устойчивостью течения Куэтта, имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \text{Re} [\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{N}(\mathbf{w}, \mathbf{u})] + \mathbf{G}(p) = \lambda \mathbf{u}, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(r, z) = \mathbf{u}(r, z + T), \quad p(r, z) = p(r, z + T). \end{cases} \quad (1.5)$$

Избавившись от нулевых слагаемых, получим

$$\begin{cases} -\Delta u^r + \frac{u^r}{r^2} - \operatorname{Re} \frac{2w^\phi u^\phi}{r} + p_r = \lambda u^r, \\ -\Delta u^\phi + \frac{u^\phi}{r^2} + \operatorname{Re} \left(\frac{w^\phi u^r}{r} + u^r w_r^\phi \right) = \lambda u^\phi, \\ -\Delta u^z + p_z = \lambda u^z, \\ (ru^r)_r + (ru^z)_z = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(r, z) = \mathbf{u}(r, z + T), \quad p(r, z) = p(r, z + T). \end{cases} \quad (1.6)$$

Полученная задача может быть сведена к стандартной спектральной задаче для некоторого компактного оператора, откуда следует дискретность спектра [1, 12]. Ее численное решение составляет основную часть работы.

2. Дискретизация задачи

2.1. Дискретизация стационарной задачи. Алгоритмы решения спектральной задачи (1.5) основаны на многократном решении уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \operatorname{Re} [\mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{N}(\mathbf{w}, \mathbf{u})] + \mathbf{G}(p) = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(r, z) = \mathbf{u}(r, z + T), \quad p(r, z) = p(r, z + T) \end{cases} \quad (2.1)$$

с различными правыми частями $\mathbf{f}$. Перейдем к их дискретизации. По аналогии с [8] в качестве первого аргумента возьмем тот, по которому задача является периодической.

Пусть h_z, h_r — шаги сетки по переменным z, h соответственно и $h_z N_z = T, h_r N_r = r_1 - r_0$. Определим сеточные области в $\Omega = [0, T] \times [r_0, r_1]$:

$$\begin{aligned} \Omega_u &= \{x_{i,j} = (ih_z, r_0 + jh_r) : i = 0, \dots, N_z - 1; j = 1, \dots, N_r - 1\}, \\ \Omega_p &= \left\{ x_{i,j} = \left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h_z, r_0 + \left(j - \frac{1}{2}\right)h_r \right) : i = 1, \dots, N_z; j = 1, \dots, N_r \right\}. \end{aligned}$$

Каждая из дискретных компонент вектора скорости $\mathbf{u} = (u^r, u^\phi, u^z)$ определена на Ω_u , а дискретное давление — на Ω_p . При построении Ω_u были сразу учтены периодичность искомого вектора по z и его нулевые значения на $\partial\Omega$. Теперь неизвестные сеточные функции являются элементами векторных пространств: $\mathbf{u} \in U_\Omega \times U_\Omega \times U_\Omega, p \in P_\Omega$, где $U_\Omega = \{v_{i,j} = v(x_{i,j}) : x_{i,j} \in \Omega_u\}, P_\Omega = \{p_{i,j} = p(x_{i,j}) : x_{i,j} \in \Omega_p\}$. Сеточные аналоги дифференциальных операторов $\mathbf{G}_h : P_\Omega \rightarrow U_\Omega \times U_\Omega \times U_\Omega, \operatorname{div}_h : U_\Omega \times U_\Omega \times U_\Omega \rightarrow P_\Omega, \Delta_h : U_\Omega \rightarrow U_\Omega$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} (\Delta_h v)_{ij} &= \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_z^2} + \frac{1}{r_j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h_r} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_r^2}, \\ (\mathbf{G}_h p)_{ij} &= \left(\frac{p_{i+1,j+1} - p_{i,j+1} + p_{i+1,j} - p_{i,j}}{2h_z}, 0, \frac{p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j} + p_{i,j+1} - p_{i,j}}{2h_r} \right)^T, \\ (\operatorname{div}_h \mathbf{u})_{ij} &= \frac{r_j(u_{i,j}^z - u_{i-1,j}^z) + r_{j-1}(u_{i,j-1}^z - u_{i-1,j-1}^z)}{2h_z} + \frac{r_j(u_{i,j}^r + u_{i-1,j}^r) - r_{j-1}(u_{i,j-1}^r + u_{i-1,j-1}^r)}{2h_r}. \end{aligned}$$

В этих выражениях встречаются значения сеточных функций с неопределенными значениями индексов (i, j) . В этом случае функции доопределяются естественным образом либо за счет условий периодичности $f_{i,j} = f_{i+N_z,j}$ при $i = 0, \pm 1$, либо за счет краевых условий, наложенных на вектор скорости $\mathbf{u}$ при $j = 0, N_2$.

Определим теперь разностные аналоги линейного и нелинейного операторов, входящих в уравне-

ния (2.1): $\mathbf{L}_h : U_\Omega^3 \rightarrow U_\Omega^3$, $\mathbf{N}_h : U_\Omega^3 \times U_\Omega^3 \rightarrow U_\Omega^3$.

$$(\mathbf{L}_h(\mathbf{u}))_{ij} = (\Delta_h \mathbf{u})_{ij} + \begin{pmatrix} -\frac{u_{i,j}^r}{r_j^2} \\ \frac{u_{i,j}^\phi}{r_j^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{N}_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}))_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_j}(w_{i,j}^\phi u_{i,j}^\phi + u_{i,j}^\phi w_{i,j}^\phi) \\ \frac{1}{r_j}(w_{i,j}^\phi u_{i,j}^r + u_{i,j}^\phi w_{i,j}^r) \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} w_{i,j}^r \frac{u_{i,j+1}^r - u_{i,j-1}^r}{2h_r} + u_{i,j}^r \frac{w_{i,j+1}^r - w_{i,j-1}^r}{2h_r} + w_{i,j}^z \frac{u_{i+1,j}^r - u_{i-1,j}^r}{2h_z} + u_{i,j}^z \frac{w_{i+1,j}^r - w_{i-1,j}^r}{2h_z} \\ w_{i,j}^r \frac{u_{i,j+1}^\phi - u_{i,j-1}^\phi}{2h_r} + u_{i,j}^r \frac{w_{i,j+1}^\phi - w_{i,j-1}^\phi}{2h_r} + w_{i,j}^z \frac{u_{i+1,j}^\phi - u_{i-1,j}^\phi}{2h_z} + u_{i,j}^z \frac{w_{i+1,j}^\phi - w_{i-1,j}^\phi}{2h_z} \\ w_{i,j}^r \frac{u_{i,j+1}^z - u_{i,j-1}^z}{2h_r} + u_{i,j}^r \frac{w_{i,j+1}^z - w_{i,j-1}^z}{2h_r} + w_{i,j}^z \frac{u_{i+1,j}^z - u_{i-1,j}^z}{2h_z} + u_{i,j}^z \frac{w_{i+1,j}^z - w_{i-1,j}^z}{2h_z} \end{pmatrix}.$$

Запишем, наконец, дискретный аналог задачи (2.1):

$$\begin{cases} \mathbf{L}_h(\mathbf{u}) + \text{Re}[\mathbf{N}_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathbf{N}_h(\mathbf{w}, \mathbf{u})] + \mathbf{G}_h(p) = \mathbf{f}, \\ \text{div}_h \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega_u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}_{i+N_z,j}, \quad p_{i,j} = p_{i+N_z,j}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Казалось бы, что число неизвестных в последней системе может не соответствовать числу уравнений, поскольку при двух пространственных переменных у нас присутствуют три компоненты скорости; однако матрица системы является квадратной. В наших численных экспериментах для обращения матрицы использовалась библиотека UMFPACK [3], в которой при решении спектральной задачи наиболее трудоемкие операции — символьной и численной факторизации — выполняются только один раз, а затем система (2.2) многократно решается подстановкой различных правых частей. Для сеточных функций, определенных на Ω_u , зададим скалярное произведение формулой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_h = \sum_{x_{ij} \in G_u} (u_{ij}^r v_{ij}^r + u_{ij}^\phi v_{ij}^\phi + u_{ij}^z v_{ij}^z) h_z h_r.$$

2.2. Дискретизация нестационарной задачи. Опишем теперь процедуру дискретизации для нелинейной нестационарной задачи в области Ω :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \text{Re} \mathbf{N}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{G}(p) = \mathbf{f}, \\ \text{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}(r, z) = \mathbf{u}(r, z + T), \quad p(r, z) = p(r, z + T). \end{cases} \quad (2.3)$$

Пусть $\mathbf{v}^k$ — вектор скорости, а q^k — давление в момент времени $t^k = \tau k$, $k \geq 0$, где τ — шаг по времени. Тогда дискретизацию задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{v}}^{k+1} - \mathbf{v}^k}{\tau} - \mathbf{L}_h\left(\frac{\hat{\mathbf{v}}^{k+1} + \mathbf{v}^k}{2}\right) + \mathbf{G}_h(q^k) + \text{Re} \mathbf{N}_h\left(\frac{3\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^{k-1}}{2}, \frac{\hat{\mathbf{v}}^{k+1} + \mathbf{v}^k}{2}\right) &= \mathbf{f}^{k+1/2}, \\ \text{div}_h \mathbf{G}_h \hat{q}^{k+1} &= -\frac{1}{\tau} \text{div}_h \hat{\mathbf{v}}^{k+1}, \quad \mathbf{v}^{k+1} = \hat{\mathbf{v}}^{k+1} - \tau \mathbf{G}_h \hat{q}^{k+1}, \quad q^{k+1} = q^k + \hat{q}^{k+1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\hat{\mathbf{v}}^{k+1}$ и $\hat{q}^{k+1}$ — промежуточные значения векторной и скалярной функций, используемые для получения $\mathbf{v}^{k+1}$ и q^{k+1} в момент времени t^{k+1} на основе известных ранее $\mathbf{v}^k$, $\mathbf{v}^{k-1}$ и q^k . Схема (2.4) имеет на гладких решениях порядок аппроксимации $O(\tau^2)$, относится к классу известных схем типа Чорина–Темама (Chorin and Temam) [6], хорошо зарекомендовавших себя в вычислительной практике.

В численных экспериментах для реализации шага по времени применялся обобщенный метод минимальных невязок (GMRES) с рестартами [14].

Так как схема для нелинейной задачи является трехслойной, то для полноты описания выпишем требуемую модификацию первого шага:

$$\frac{\hat{\mathbf{v}}^1 - \mathbf{v}^0}{\tau} - \mathbf{L}_h\left(\frac{\hat{\mathbf{v}}^1 + \mathbf{v}^0}{2}\right) + \mathbf{G}_h(q^0) + \text{Re} \mathbf{N}_h\left(\mathbf{v}^0, \frac{\hat{\mathbf{v}}^1 + \mathbf{v}^0}{2}\right) = \mathbf{f}^{1/2}.$$

Здесь начальное давление считается равным нулю ($q^0 = 0$), а первый аргумент в нелинейном члене берется явным образом из начального условия.

3. Алгоритм решения спектральной задачи

3.1. Метод Арнольди. Дадим описание алгоритма Арнольди применительно к задачам типа (1.5). В общем виде этот метод предназначен для решения частичной проблемы собственных значений для несимметричных матриц. Его подробное описание можно найти, например, в [9]. Алгоритм состоит в приведении несимметричного оператора A к форме Хессенберга H_m , т.е. к матрице вида

$$H_m = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,m} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & h_{m,m-1} & h_{m,m} \end{pmatrix},$$

путем ортогонализации крыловской последовательности $q_0, Aq_0, \dots, A^{m-1}q_0$. Размерность матрицы H_m (равная m — числу векторов крыловской последовательности) берется значительно меньшей размерности оператора A . Собственные значения матрицы H_m принимаются за приближения к собственным значениям матрицы A . Пусть $q_0, q_1, \dots, q_{m-1}$ — ортобазис в $\text{span}\{q_0, Aq_0, \dots, A^{m-1}q_0\}$, а Q_m — матрица со столбцами $q_0, q_1, \dots, q_{m-1}$; тогда имеет место соотношение: $H_m = Q_m^* A Q_m$. Собственные векторы $\{x_s\}_{s=1}^m$ матрицы H_m связаны с приближениями к собственным векторам $\{y_s\}_{s=1}^m$ матрицы A отношением $y_s = Q_m x_s$.

Напомним, что применительно к нашей задаче мы определяем оператор L_h^{-1} как оператор, сопоставляющий функции $\mathbf{f}$ решение некоторой краевой задачи для уравнений (2.2). Находим несколько максимальных собственных значений оператора L_h^{-1} методом Арнольди. Тогда обратные к ним величины будут искомыми минимальными собственными значениями оператора L_h . Качество полученных приближений измеряется с помощью невязок

$$\rho_s = |(H_{m+1})_{m+1,m} x_s^m| = \|L_h^{-1} y_s - \lambda_s^{-1} y_s\|, \quad (3.1)$$

где x_s^m — m -я компонента s -го собственного вектора матрицы H_{m+1} , $(H_{m+1})_{m+1,m}$ — $(m+1, m)$ -й элемент матрицы H_{m+1} . Первая часть формулы (3.1) представляет собой теоретическую оценку, поэтому непосредственно невязки вычисляются по формуле

$$\rho_s = \|L_h^{-1} y_s - \lambda_s^{-1} y_s\|. \quad (3.2)$$

Для несимметричного оператора L_h^{-1} нет теоремы, связывающей невязки (3.1) с точностью приближений к собственным значениям. Однако в нашей вычислительной практике они используются за отсутствием других характеристик близости найденных приближений к искомым собственным значениям.

Алгоритм 3.1.

$\mathbf{u}_0$	— начальный вектор крыловской последовательности, $\ \mathbf{u}_0\ _h = 1$;
m	— размерность крыловской последовательности;
v	— число искоемых собственных значений;
$\{l_s\}_{s=1}^m, \{x_s\}_{s=1}^m$	— собственные значения и собственные векторы матрицы H_m ;
$\{\lambda_s\}_{s=1}^v, \{\mathbf{y}_s\}_{s=1}^v$	— искомые собственные значения и собственные векторы;
H_m	— хессенбергова матрица порядка m ;
$\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$	— ортогонализованная крыловская последовательность;
$\mathbf{Q}$	— матрица со столбцами $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$;
L_h^{-1}	— оператор, обратный к оператору Стокса;
$\text{Dgeev}(H_m)$	— функция, возвращающая собственные значения $\{l_s\}_{s=1}^m$ и векторы $\{x_s\}_{s=1}^m$, $\ x_s\ _2 = 1$ матрицы H_m ;
$\text{Choose}(v, \{l_s\}_{s=1}^m, \{\rho_s\}_{s=1}^m)$	— возвращает функцию $\sigma(\cdot)$, указывающую на v максимальных чисел из множества $\{l_s\}_{s=1}^m$ с минимальными невязками;

```

NSymValues ( $m, v, \mathbf{u}_0$ )  $\rightarrow$  ( $\{\lambda_s\}_{s=1}^v, \{\mathbf{y}_s\}_{s=1}^v$ )
 $\mathbf{q}_0 := \mathbf{0}$ 
 $\mathbf{q}_1 := \mathbf{u}_0$  начальный вектор крыловской последовательности
 $\mathbf{u} := L_h^{-1}(\mathbf{q}_1)$  решение задачи Стокса (2.2) с правой частью  $\mathbf{q}_1$ 
for  $i = 1, 2, \dots, m$  вычисление матрицы  $H$ 
  for  $j = 1, 2, \dots, i$ 
     $H_{j,i} := (u^1, q_j^1)_h + (u^2, q_j^2)_h + (u^3, q_j^3)_h$ 
  end for
   $\mathbf{r} := \mathbf{u}$ 
  for  $j = 1, 2, \dots, i$ 
     $\mathbf{r} := \mathbf{r} - H_{j,i} \cdot \mathbf{q}_j$ 
  end for
   $\beta := \sqrt{(r^1, r^1)_h + (r^2, r^2)_h + (r^3, r^3)_h}$ 
   $H_{i+1,i} := \beta, \quad \mathbf{q}_{i+1} := \mathbf{r}/\beta$ 
   $\mathbf{u} := L_h^{-1}(\mathbf{q}_{i+1})$  решение задачи Стокса (2.2) с правой частью  $\mathbf{q}_{i+1}$ 
end for
 $(\{l_s\}_{s=1}^m, \{x_s\}_{s=1}^m) := \mathbf{Dgeev}(H_m)$  вычисление собственных значений и векторов матрицы  $H_m$ 
for  $i = 1, 2, \dots, m$ 
   $\rho_s := \beta \cdot x_s^m$  вычисление невязок
end for
 $(\sigma) := \mathbf{Choose}(v, \{l_s\}_{s=1}^m, \{\rho_s\}_{s=1}^m)$  выбор наилучших  $v$  приближений к собственным значениям из спектра матрицы  $H$ 
for  $s = 1, 2, \dots, v$ 
   $\lambda_s := 1/l_{\sigma(s)}, \quad \mathbf{y}_s := \mathbf{Q}x_{\sigma(s)}$ 
end for
end NSymValues

```

В качестве функции $\mathbf{Dgeev}(H)$ использовалась одноименная функция из библиотеки LAPACK [11].

Заметим, что хотя вычисляемая в процессе алгоритма матрица H_m вещественная, ее спектр может быть комплексным; поэтому, начиная с момента вычисления спектра H_m , арифметика становится, вообще говоря, комплексной.

Алгоритм (3.1) вычисляет по одному собственному вектору из каждого собственного подпространства, соответствующего одному из v младших собственных значений. Однако нам требуется построить базис в каждом таком подпространстве. В [8] использовался метод Ланцоша с рестартами с ортогонализацией крыловской последовательности к собственным векторам, вычисленным на предыдущих шагах. В нашем случае несимметричного оператора и метода Арнольди подобный подход себя не оправдал. Требуемый результат дает вариант метода Арнольди с ортогонализацией начального вектора $\mathbf{u}_0$ только к одному собственному вектору при каждом его рестарте.

3.2. Явный метод. Этот метод состоит в явном вычислении оператора L_h^{-1} . Если брать в качестве правой части $\mathbf{f}$ в (2.2) последовательно единичные векторы e_i с единственной отличной от нуля i -й компонентой, то можно вычислить столбцы матрицы L_h^{-1} по формуле $(L_h^{-1})_i = L_h^{-1}e_i, i = 1, \dots, \dim(L_h^{-1})$. Спектр несимметричной матрицы L_h^{-1} теперь может быть получен с помощью QR -алгоритма. В нашем случае также использовалась библиотека LAPACK [11].

4. Аналитическое решение спектральной задачи в некоторых частных случаях. Далее будут использоваться некоторые соотношения из теории бесселевых функций, которые можно найти в [10]. Приведем лишь самые основные.

Функции Бесселя $J_m(r), Y_m(r)$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$u_{rr}^z + \frac{1}{r} u_r + \left(1 - \frac{m^2}{r^2}\right) u = 0.$$

Модифицированные функции Бесселя $I_m(r), K_m(r)$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$u_{rr}^z + \frac{1}{r} u_r - \left(1 + \frac{m^2}{r^2}\right) u = 0.$$

Как видно, оба уравнения содержат параметр m , от которого зависят и функции Бесселя.

4.1. Решение спектральной задачи при $\text{Re} \neq 0$, $u^r = 0$, $u^\phi = 0$. Положим в (1.6) $u^r = 0$, $u^\phi = 0$; тогда первое и второе уравнения удовлетворяются автоматически, а из уравнения дивергенции получаем $u_z^z = 0$. В результате третье уравнение примет вид

$$-u_{rr}^z - \frac{1}{r} u_r^z = \lambda u^z, \quad u^z|_{r_0} = u^z|_{r_1} = 0. \quad (4.1)$$

Это — уравнение Бесселя с нулевым параметром. Его решение имеет вид $u^z = \alpha J_0(\sqrt{\lambda}r) + \beta Y_0(\sqrt{\lambda}r)$, где α и β — произвольные коэффициенты, $J_0(x)$, $Y_0(x)$ — функции Бесселя. Из краевых условий (4.1) найдем α и β :

$$\alpha J_0(\sqrt{\lambda}r_j) + \beta Y_0(\sqrt{\lambda}r_j) = 0, \quad j = 0, 1. \quad (4.2)$$

Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\beta = \gamma\alpha$. Разделив первое уравнение в (4.2) на второе, получим уравнение для определения λ :

$$J_0(\sqrt{\lambda}r_0)/J_0(\sqrt{\lambda}r_1) = Y_0(\sqrt{\lambda}r_0)/Y_0(\sqrt{\lambda}r_1). \quad (4.3)$$

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$u^z(z, r) = J_0(\sqrt{\lambda}r) + \gamma Y_0(\sqrt{\lambda}r),$$

где $\gamma = -J_0(\sqrt{\lambda}r_0)/Y_0(\sqrt{\lambda}r_0)$.

Уравнение (4.3) задает бесконечную серию собственных значений $\lambda_i^z > 0$, $i = 1, 2, \dots$. Несколько минимальных корней этого уравнения приведены в табл. 4.1 для $r_0 = \pi/2$, $r_1 = 3\pi/2$.

Таблица 4.1

Несколько корней уравнения (4.3)

λ_1^z	λ_2^z	λ_3^z
0.971761	3.968210	8.967211

Таблица 4.2

Несколько корней уравнения (4.8)

m	$\lambda_1^\phi(m)$	$\lambda_2^\phi(m)$	$\lambda_3^\phi(m)$
0	1.084233	4.095413	9.098408
1	2.084233	5.095413	10.098408
2	5.084233	8.095413	13.098408

4.2. Решение спектральной задачи при $\text{Re} = 0$, $u^r = 0$, $u^z = 0$. При $\text{Re} = 0$ из (1.6) видно, что задача распадается на две независимые задачи — одна для u^ϕ , другая для u^r , u^z . Конечно, возможен случай, когда какое-то собственное значение первой задачи совпадет с собственным значением второй, и тогда мы получим решение с отличными от нуля тремя компонентами u^r , u^ϕ , u^z . Но от этого задачи не перестают быть независимыми.

Рассмотрим первый случай. Положим $\text{Re} = 0$, $u^r = 0$, $u^z = 0$; тогда в (1.6) останется только второе уравнение:

$$-u_{rr}^\phi - \frac{1}{r} u_r^\phi - u_{zz}^\phi + \frac{1}{r^2} u^\phi = \lambda u^\phi, \quad u^\phi|_{r_0} = u^\phi|_{r_1} = 0, \quad u^\phi(z, r) = u^\phi(z + T, r). \quad (4.4)$$

Положим $T = 2\pi$; тогда 2π -периодическая по первому аргументу функция представима рядом Фурье

$$u^\phi(z, r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m^\phi(r) \exp(imz). \quad (4.5)$$

Коэффициенты $u_m^\phi(r)$ разложения переобозначим теми же символами. Подставляя (4.5) в (4.4), получим спектральную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\frac{(ru_r^\phi)_r}{r} + m^2 u^\phi + \frac{u^\phi}{r^2} = \lambda u^\phi, \quad u^\phi|_{r=r_0} = u^\phi|_{r=r_1} = 0. \quad (4.6)$$

Мы пришли к уравнению Бесселя. Его решение имеет вид $u^\phi = \alpha J_1(\mu r) + \beta Y_1(\mu r)$, где α и β — произвольные коэффициенты, $\mu = \sqrt{\lambda - m^2}$, $J_1(x)$, $Y_1(x)$ — функции Бесселя. Для определения α и β воспользуемся краевыми условиями (4.6):

$$\alpha J_1(\mu r_j) + \beta Y_1(\mu r_j) = 0, \quad j = 0, 1. \quad (4.7)$$

Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\beta = \gamma\alpha$. Разделив первое уравнение (4.7) на второе, получим уравнение, определяющее собственные значения:

$$J_1(\mu r_0)/J_1(\mu r_1) = Y_1(\mu r_0)/Y_1(\mu r_1). \quad (4.8)$$

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$u^\phi(z, r) = (J_1(\mu r) + \gamma Y_1(\mu r)) \exp(imz), \quad (4.9)$$

где $\gamma = -J_1(\mu r_0)/Y_1(\mu r_0)$, $\mu = \sqrt{\lambda - m^2}$. Действительные функции $\operatorname{Re}(u^\phi)$ и $\operatorname{Im}(u^\phi)$ образуют базис в двумерных собственных подпространствах при $m > 0$.

Уравнение (4.8) задает для каждого целого $m > 0$ бесконечную серию собственных значений $\lambda_i^\phi(m) > m^2$, $i = 1, 2, \dots$. Несколько минимальных корней этого уравнения для $r_0 = \pi/2$ и $r_1 = 3\pi/2$ приведены в табл. 4.2, в которой каждая строка получается сдвигом первой на квадрат целого числа.

Каждая строка получается сдвигом первой на квадрат целого числа.

4.3. Решение спектральной задачи при $\operatorname{Re} \neq 0$, $u^\phi \neq 0$, $u_z^\phi = 0$. Положим $u^r = 0$, $u^z = 0$; тогда уравнение дивергенции (1.6) удовлетворяется автоматически. Из третьего уравнения следует, что p не зависит от z . Поскольку w^ϕ зависит только от r , то из первого уравнения, которое будет иметь вид $2\operatorname{Re} w^\phi u^\phi / r = p_r$, получаем, что u^ϕ не зависит от z . И наконец, из второго уравнения следует

$$-u_{rr}^\phi - \frac{1}{r} u_r^\phi + \frac{1}{r^2} u^\phi = \lambda u^\phi, \quad u^\phi|_{r_0} = u^\phi|_{r_1} = 0.$$

А эта задача нами уже фактически рассмотрена в случае $\operatorname{Re} = 0$, $u^r = 0$, $u^z = 0$, надо лишь в (4.6) положить $m = 0$. Соответствующие собственные значения приведены в первой строке табл. 4.2, а собственные функции даются выражением (4.9) при $m = 0$.

4.4. Решение спектральной задачи при $\operatorname{Re} = 0$, $u^\phi = 0$. Положим $\operatorname{Re} = 0$, $u^\phi = 0$ и рассмотрим общий случай $u^r \neq 0$, $u^z \neq 0$, $\mathbf{u} = \{u^r, u^z\}$. Задача (1.6) примет вид

$$\begin{cases} -u_{rr}^r - \frac{u_r^r}{r} - u_{zz}^r + \frac{u^r}{r^2} + p_r = \lambda u^r, \\ -u_{rr}^z - \frac{u_r^z}{r} - u_{zz}^z + p_z = \lambda u^z, \\ (ru^r)_r + (ru^z)_z = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(z, r) = \mathbf{u}(z + T, r), \quad p(z, r) = p(z + T, r). \end{cases} \quad (4.10)$$

Положим $T = 2\pi$; тогда 2π -периодические по первому аргументу функции представимы рядами Фурье

$$\mathbf{u}(z, r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}_m(r) \exp(imz), \quad p(z, r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p_m(r) \exp(imz). \quad (4.11)$$

Коэффициенты $u_m^r(r)$, $u_m^z(r)$, $p_m(r)$ разложения переобозначим теми же символами. Подставляя (4.11) в (4.10), получим спектральную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{(ru_r^r)_r}{r} + m^2 u^r + \frac{u^r}{r^2} + p_r = \lambda u^r, \\ -\frac{(ru_r^z)_r}{r} + m^2 u^z + im p = \lambda u^z, \\ (ru^r)_r + im ru^z = 0, \\ \mathbf{u}|_{y=r_0} = \mathbf{u}|_{y=r_1} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Пусть $m \neq 0$. Из третьего уравнения (4.12) подставим u_r^r в первое, а u^z — во второе:

$$\begin{cases} -\frac{(u^r + im ru^z)_r}{r} + (m^2 - \lambda)u^r + \frac{u^r}{r^2} + p_r = 0, \\ -\frac{(ru_r^z)_r}{r} + (m^2 - \lambda)\frac{(ru^r)_r}{im r} + im p = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Первое уравнение (4.13) умножим на r , продифференцируем по r и сложим со вторым, умноженным на $im r$. Еще раз учитывая уравнение дивергенции, получим

$$(rp_r)_r + rm^2 p = 0. \quad (4.14)$$

Общее решение уравнения (4.14) имеет вид $p = A I_0(mr) + B K_0(mr)$, где A и B — произвольные коэффициенты, а $I_n(x)$, $K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Подставив это решение в первые два уравнения (4.12), получим

$$\begin{cases} -\frac{(ru_r^r)_r}{r} + (m^2 - \lambda)u^r + \frac{u^r}{r^2} + m(A I_1(mr) - B K_1(mr)) = 0, \\ -\frac{(ru_r^z)_r}{r} + (m^2 - \lambda)u^z + im(A I_0(mr) + B K_0(mr)) = 0. \end{cases}$$

Каждое уравнение представляет собой уравнение Бесселя с правой частью. Их решения имеют вид

$$\begin{cases} u^r = \alpha^1 J_1(\mu r) + \beta^1 Y_1(\mu r) + \frac{m}{\lambda} (A I_1(mr) - B K_1(mr)), \\ u^z = \alpha^2 J_0(\mu r) + \beta^2 Y_0(\mu r) + \frac{im}{\lambda} (A I_0(mr) + B K_0(mr)), \end{cases} \quad (4.15)$$

где α^i и β^i , $i = 1, 2$ — произвольные коэффициенты, $\mu = \sqrt{\lambda - m^2}$, а $J_n(x)$, $Y_n(x)$ — функции Бесселя. Для определения α^i и β^i воспользуемся краевыми условиями (4.12):

$$\begin{cases} \alpha^1 J_1(\mu r_j) + \beta^1 Y_1(\mu r_j) + \frac{m}{\lambda} (A I_1(mr_j) - B K_1(mr_j)) = 0, \\ \alpha^2 J_0(\mu r_j) + \beta^2 Y_0(\mu r_j) + \frac{im}{\lambda} (A I_0(mr_j) + B K_0(mr_j)) = 0, \quad j = 0, 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Пусть $\alpha^i(A, B, \lambda, m)$, $\beta^i(A, B, \lambda, m)$, $i = 1, 2$, — решение (4.16). Подставим (4.15) в третье уравнение (4.12):

$$(\mu \alpha^1 - im \alpha^2) J_0(\mu r) + (\mu \beta^1 - im \beta^2) Y_0(\mu r) = 0.$$

Так как $J_0(\mu r)$, $Y_0(\mu r)$ — независимы, то для определения λ приходим к системе

$$\begin{cases} \mu \alpha^1(A, B, \lambda, m) - im \alpha^2(A, B, \lambda, m) = 0, \\ \mu \beta^1(A, B, \lambda, m) - im \beta^2(A, B, \lambda, m) = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Поскольку A и B входят в однородные уравнения (4.17) линейно, а сами уравнения должны удовлетворяться при произвольных значениях A и B , то единственно возможный случай, когда имеет место равенство $B = \gamma A$, где γ находится из линейного уравнения

$$\mu \alpha^1(A, \gamma A, \lambda, m) - im \alpha^2(A, \gamma A, \lambda, m) = \mu \beta^1(A, \gamma A, \lambda, m) - im \beta^2(A, \gamma A, \lambda, m),$$

которое от A не зависит. Пусть $\tilde{\gamma} = \gamma(\lambda, m)$ — его решение. Для $i = 1, 2$ обозначим $\tilde{\alpha}^i = \alpha^i(A, \tilde{\gamma} A, \lambda, m)$, $\tilde{\beta}^i = \beta^i(A, \tilde{\gamma} A, \lambda, m)$. Тогда собственные значения определяются любым из уравнений (4.17):

$$\mu \tilde{\alpha}^1 - im \tilde{\alpha}^2 = 0. \quad (4.18)$$

Выражения для $\tilde{\alpha}^i$ и $\tilde{\beta}^i$ линейны и однородны по A , поэтому решение (4.18) от A не зависит. Теперь можно дать выражения для собственных функций исходной задачи (4.10):

$$\begin{cases} u^r(z, r) = \left(\tilde{\alpha}^1 J_1(\mu r) + \tilde{\beta}^1 Y_1(\mu r) + A \frac{m}{\lambda} (I_1(mr) - \tilde{\gamma} K_1(mr)) \right) \exp(imz), \\ u^z(z, r) = \left(\tilde{\alpha}^2 J_0(\mu r) + \tilde{\beta}^2 Y_0(\mu r) + A \frac{im}{\lambda} (I_0(mr) + \tilde{\gamma} K_0(mr)) \right) \exp(imz), \end{cases}$$

где λ определяется уравнением (4.18). Собственные подпространства двумерны, их базис может быть составлен из двух действительных векторов $\{\text{Re}(u^z), \text{Re}(u^r)\}$ и $\{\text{Im}(u^z), \text{Im}(u^r)\}$.

Уравнение (4.18) задает для каждого целого $m > 0$ бесконечную серию собственных значений $\lambda_i^{z,r}(m) > m^2$, $i = 1, 2, \dots$. Приведем несколько его минимальных корней для $r_0 = \pi/2$, $r_1 = 3\pi/2$ (табл. 4.3), а также собственную функцию (точнее, векторное поле $\{\text{Re}(u^z), \text{Re}(u^r)\}$), соответствующую $\lambda_2^{z,r}(2)$ (рис. 4.1).

Для численного решения уравнений (4.3), (4.8), (4.18), построения векторного поля (рис. 4.1) и манипуляций с символьными выражениями использовался пакет Maple 9.0 [13].

Таблица 4.3
Несколько корней уравнения (4.18)

m	$\lambda_1^{z,r}(m)$	$\lambda_2^{z,r}(m)$
1	3.850252	8.659467
2	5.961958	10.715415
3	10.644072	15.002023

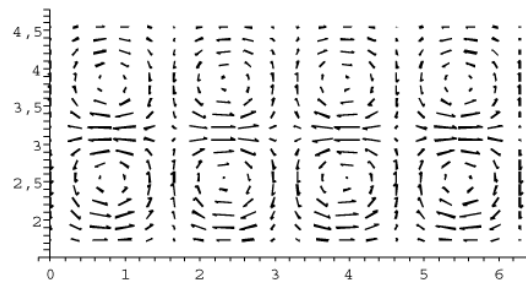


Рис. 4.1. Собственная функция, соответствующая $\lambda_2^{z,r}(2)$

5. Численные эксперименты

5.1. Решение спектральной задачи на разных сетках. Для всех численных расчетов зафиксируем область $\Omega = [0, 2\pi] \times [\pi/2, 3\pi/2]$, полагая $r_0 = \pi/2$, $r_1 = 3\pi/2$, $T = 2\pi$ (рис. 1.1). Размерность пространства Крылова в методе Арнольди возьмем равной 100.

Таблица 5.1
Расчет спектральной задачи на разных сетках при $\text{Re} = 0$

Ω_u	32×32	64×64	128×128	$\infty \times \infty$	
$N \setminus \rho_i$	1.13^{-14}	5.17^{-15}	1.80^{-14}		
1	0.971115	0.971599	0.971720	0.971761	λ_1^z
2	1.083581	1.084070	1.084193	1.084233	$\lambda_1^\phi(0)$
3	2.080372	2.083267	2.083992	2.084233	$\lambda_1^\phi(1)$
4	3.839067	3.847454	3.849552	3.850252	$\lambda_1^{z,r}(1)$
5	3.956016	3.965159	3.967447	3.968210	λ_2^z
6	4.083211	4.092360	4.094650	4.095413	$\lambda_1^\phi(0)$
7	5.032440	5.071236	5.080981	5.084233	$\lambda_1^\phi(2)$
8	5.080002	5.091557	5.094449	5.095413	$\lambda_1^\phi(1)$
9	5.926148	5.975461	5.987831	5.981958	$\lambda_1^{z,r}(2)$
10	8.032070	8.079525	8.091438	8.095413	$\lambda_1^\phi(2)$
11	8.615160	8.648377	8.656694	8.659467	$\lambda_2^{z,r}(1)$
12	8.903785	8.951322	8.963237	8.967211	λ_3^z
13	9.035004	9.082549	9.094465	9.098408	$\lambda_3^\phi(0)$
14	9.826339	10.019200	10.067940	10.084233	$\lambda_1^\phi(4)$
15	10.031796	10.081746	10.094265	10.098408	$\lambda_3^\phi(1)$
16	10.366238	10.574061	10.626534	10.644072	$\lambda_1^{z,r}(3)$
17	10.616577	10.690658	10.709222	10.715415	$\lambda_2^{z,r}(2)$
18	12.825968	13.027489	13.078397	13.095413	$\lambda_1^\phi(3)$
19	12.983864	13.069714	13.091254	13.098408	$\lambda_3^\phi(2)$
20	14.675450	14.919897	14.981461	15.002023	$\lambda_2^{z,r}(3)$

Результаты решения задачи (1.6) на различных сетках при $\text{Re} = 0$ методом Арнольди приведены в табл. 5.1. Для $\text{Re} = 0$ задача полностью решена аналитически. Ее спектр получается объединением трех серий собственных значений: λ^z , λ^ϕ , $\lambda^{z,r}$ (табл. 4.1, 4.2, 4.3). В табл. 5.1 можно наблюдать, как собственные значения дискретной задачи сходятся к собственным значениям дифференциальной задачи (приведенным в столбце $\infty \times \infty$) при измельчении сетки. В последнем столбце приведены типы собственных функций, а во второй строке — максимальные значения невязок для каждой серии соответствующих собственных функций, рассчитанных по формуле (3.2).

Нас интересует получение с высокой точностью решения дискретной спектральной задачи. Мерой близости приближенного и точного решений дискретной задачи в данном, симметричном, случае являются невязки, а они, как видно из табл. 5.1, предельно малы, что дает основание считать полученный результат

вполне удовлетворительным. Если бы мы задались целью получить хорошие приближения собственных значений и функций дифференциальной задачи, то эта цель тоже была бы достигнута.

5.2. Решение спектральной задачи при разных числах Рейнольдса. Для всех следующих расчетов зафиксируем сетку $\Omega_u = 32 \times 32$.

Таблица 5.2

Собственные значения спектральной задачи при различных Re на сетке 32×32

Re	0.0	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0	64.0
$N \setminus \rho_i$	1.13^{-14}	2.97^{-14}	1.53^{-15}	7.78^{-16}	1.18^{-15}	4.17^{-14}	4.73^{-15}
1	0.9711	0.9711	0.9711	0.9711	0.7789	-1.1911	-6.0548
2	1.0835	1.0835	1.0835	1.0835	0.9711	-0.0849	-5.4008
3	2.0803	2.0465	1.9515	1.6359	1.0835	0.9711	-2.8564
4	3.8390	3.8721	3.9560	3.9560	2.7422	1.0835	0.9711
5	3.9560	3.9560	3.9652	4.0753	3.9560	3.9438	1.0835
6	4.0832	4.0832	4.0832	4.0832	4.0832	3.9547	1.3567
7	5.0324	4.9238	4.6811	4.2822	$4.8572 - 0.2242i$	3.9560	1.7933
8	5.0800	5.0723	5.0490	4.9486	$4.8572 + 0.2242i$	4.0832	2.6774
9	5.9261	6.0342	6.2767	6.9381	7.1299	5.2252	3.9560
10	8.0320	8.0026	7.9160	7.5487	7.3202	6.4237	4.0832
11	8.6151	8.6226	8.6451	8.6236	7.5315	8.9037	4.2247
12	8.9037	8.9037	8.9037	8.7342	8.9037	8.9246	7.6498
13	9.0350	9.0350	9.0350	8.9037	9.0350	9.0350	8.6118
14	9.8263	9.6481	9.3295	9.0350	9.0923	9.7021	8.9037
15	10.0317	10.0294	10.0225	9.9938	9.8561	$9.8360 - 0.5258i$	9.0350
16	10.3662	10.5441	10.7290	11.0336	11.3649	$9.8360 + 0.5258i$	9.5918
17	10.6165	10.6454	10.8649	$11.8292 - 0.1229i$	$12.1558 - 0.3679i$	10.0111	9.9356
18	12.8259	12.7662	12.6009	$11.8292 + 0.1229i$	$12.1558 + 0.3679i$	12.1388	10.5164
19	12.9838	12.9733	12.9417	12.8132	12.4320	13.2323	11.3779
20	14.6754	14.7345	14.8954	14.9517	13.3818	14.5259	12.0496

Проследим, как меняется спектр при изменении числа Рейнольдса. Результаты расчетов приведены в табл. 5.2. С ростом числа Рейнольдса задача становится все более несимметричной — в спектре появляются комплексные собственные значения. Появление значений с отрицательной действительной частью и увеличение их количества с ростом числа Рейнольдса также является ожидаемым результатом и соответствует росту неустойчивости течения Куэтта. Приведенные в табл. 5.2 для каждого Re невязки лишь на один-два порядка отличаются от машинной точности и говорят в пользу того, что результат является более чем удовлетворительным.

Приведем функции тока нескольких первых собственных функций для $Re = 32$. Функция тока ψ , построенная по компонентам u^z, u^r , находится из уравнения $\psi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_r - \frac{1}{r^2} \psi + \psi_{zz} = u_r^z - u_z^r, \psi|_{\partial\Omega} = 0, \psi(r, z) = \psi(r, z + T)$. Это уравнение можно получить, исходя из следующего определения: $(r\psi)_z = ru^r, (r\psi)_r = ru^z$.

На рис. 5.4 и 5.8 изображены нулевые функции тока, их происхождение станет понятным из дальнейшего. Как видно, решения на рис. 5.1–5.12 являются периодическими. Их сдвиг определяется сдвигом начального вектора метода Арнольди.

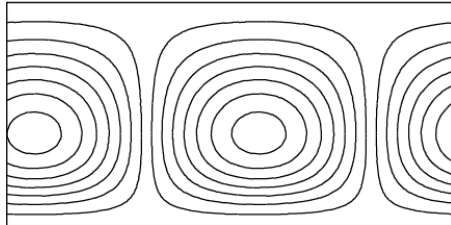
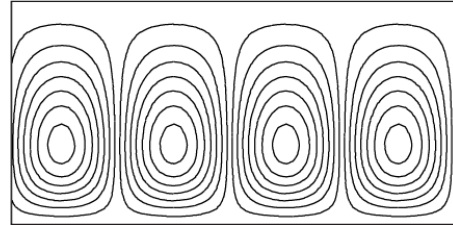
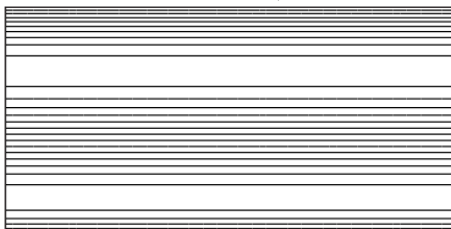
Сама табл. 5.2 не несет никакой информации о типах соответствующих собственных функций. Этот пробел восполняет табл. 5.3. Каждой собственной функции припишем тип вида $m \times n$, где m означает количество вихрей вдоль оси z , n — вдоль оси r у соответствующей функции тока. Для лучшего представления можно сопоставить столбец табл. 5.3, соответствующий $Re = 32$, с рис. 5.1–5.12. Поясним связь введенного типа с имеющимися аналитическими решениями при $Re = 0$. Серии λ_i^z (табл. 4.1) соответствуют функции типа $0 \times i, i > 0$, серии $\lambda_i^\phi(m)$ (табл. 4.2) — функции типа 0×0 , а серии $\lambda_i^{z,r}(m)$ (табл. 4.3) — функции типа $2m \times i, m > 0, i > 0$.

В спектре выделяются две особых серии собственных значений, которые постоянны и не зависят от числа Рейнольдса. Первая серия имеет только u^z нулевую компоненту, зависящую только от r (ей

Таблица 5.3

Изменение типов собственных функций в зависимости
от числа Рейнольдса

$N \backslash \text{Re}$	0.0	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0	64.0
1	0×2	0×2	0×2	0×2	2×1	2×1	4×1
2	0×0	0×0	0×0	0×0	0×2	4×1	2×1
3	0×0	2×1	2×1	2×1	0×0	0×2	6×1
4	2×1	2×1	0×1	0×1	4×1	0×0	0×2
5	0×1	0×1	2×1	4×1	0×1	2×2	0×0
6	0×0	0×0	0×0	0×0	0×0	6×1	4×2
7	0×0	4×1	4×1	2×1	2×1	0×1	2×2
8	0×0	2×1	2×1	2×1	2×1	0×0	8×1
9	4×1	4×1	4×1	4×1	6×1	4×2	0×1
10	0×0	4×2	4×2	4×2	4×1	2×1	0×0
11	2×2	2×2	2×2	6×1	4×1	0×2	6×2
12	0×2	0×2	0×2	2×2	0×2	6×2	2×2
13	0×0	0×0	0×0	0×2	2×2	0×0	4×3
14	0×0	6×1	6×1	0×0	2×2	4×1	0×2
15	0×0	2×2	2×2	2×2	2×2	2×2	0×0
16	6×1	6×1	4×2	4×2	6×2	2×2	8×2
17	4×2	4×2	6×1	6×2	4×2	8×1	10×1
18	0×0	6×2	6×2	6×2	4×2	4×1	2×1
19	0×0	4×3	4×3	4×3	6×1	4×2	6×3
20	6×2	6×2	6×2	8×1	8×1	6×1	2×1

Рис. 5.1. ψ_1 Рис. 5.2. ψ_2 Рис. 5.3. ψ_3 Рис. 5.4. ψ_4

соответствуют собственные функции типа $0 \times m$ и плоскопараллельные течения). Вторая серия имеет только u^ϕ ненулевую компоненту, зависящую только от r (ей соответствуют собственные функции типа 0×0 и нулевая функция тока). Как первая, так и вторая серия вычислены аналитически (табл. 4.1 и первая строка табл. 4.2). Собственные функции общего вида имеют тип $m \times n$, $m > 0$, $n > 0$ и u^z , u^r компоненты, отличные от нуля; при $\text{Re} > 0$ компонента u^ϕ также отлична от нуля. Отрицательная часть спектра появляется только за счет смещения собственных значений, соответствующих функциям общего вида.

Что касается кратности, то собственные значения типа $m \times n$, $m > 0$, $n > 0$ имеют кратность два, даже

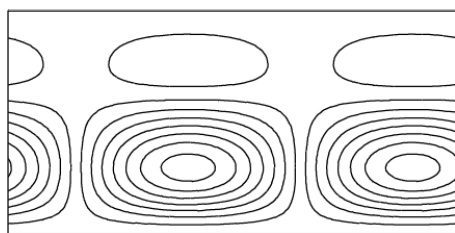


Рис. 5.5. ψ_5

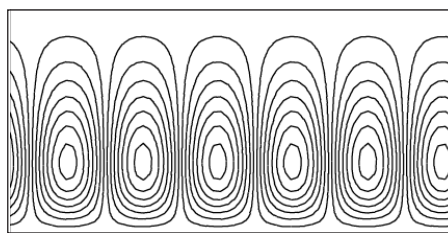


Рис. 5.6. ψ_6

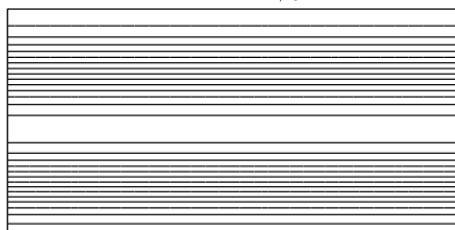


Рис. 5.7. ψ_7

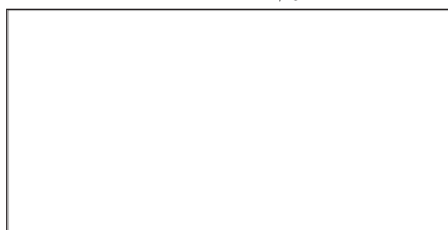


Рис. 5.8. ψ_8

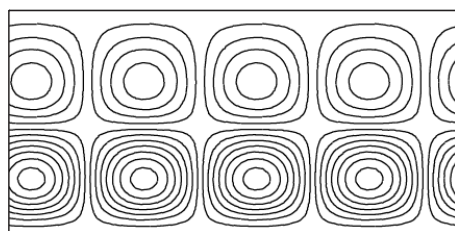


Рис. 5.9. ψ_9

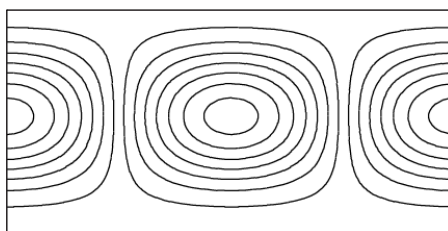


Рис. 5.10. ψ_{10}

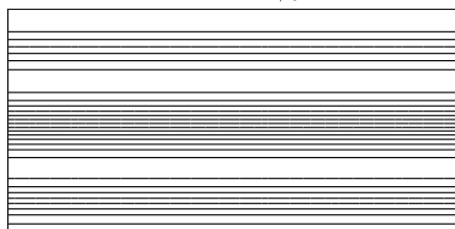


Рис. 5.11. ψ_{11}

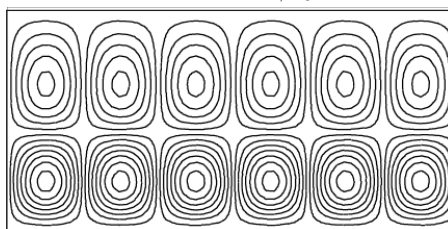


Рис. 5.12. ψ_{12}

если они комплексные. Остальные являются однократными. Данные о кратности получены решением задачи явным методом.

Более подробное исследование части промежутка $\text{Re} = 16.0, \dots, 32.0$, на котором появляется отрицательная часть спектра, приведено в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Пара младших собственных значений спектральной задачи при различных Re на сетке 32×32

$N \backslash \text{Re}$	20.0	21.0	22.0	23.0	24.0	25.0	26.0
1	0.304643	0.183512	0.061555	-0.061154	-0.184551	-0.308581	-0.433197
2	0.971115	0.971115	0.971115	0.971115	0.971115	0.971115	0.971115

Эта таблица устанавливает точную (по числу Рейнольдса) границу появления отрицательных собственных значений и, тем самым, обозначает примерную границу неустойчивости течения Куэтта.

5.3. Решение уравнений Навье–Стокса при разных числах Рейнольдса. Перейдем к решению уравнений Навье–Стокса (2.3) в области Ω на временном промежутке $[0, t]$ с условиями $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{w}|_{\partial\Omega}$, $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}(r, z) = \mathbf{u}(r, z + T)$, $p(r, z) = p(r, z + T)$, где $\mathbf{w}$ — течение Куэтта (1.4), $\tilde{\mathbf{u}}$ — возмущение, равное нулю на границе Ω_u и имеющее норму порядка 10^{-3} , $\Omega = [0, 2\pi] \times [\pi/2, 3\pi/2]$, $t = 100.0$. Таким образом, в качестве начального условия возьмем возмущенное течение Куэтта. Шаг по времени в схеме (2.4) равен 0.01, сеточная область, как и прежде, $\Omega_u = 32 \times 32$.

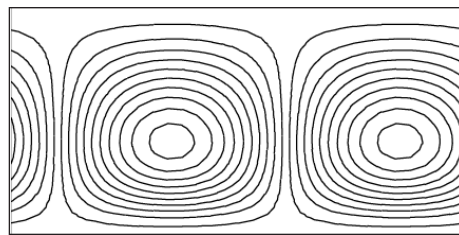
В табл. 5.5 показана эволюция по времени нормы функции тока решения.

Таблица 5.5

$\|\psi(t)\|$ решения уравнений Навье–Стокса при различных числах Рейнольдса

$t \backslash \text{Re}$	22.0	23.0	24.0	25.0	26.0	32.0
10.0	$3.38 \cdot 10^{-16}$	$1.31 \cdot 10^{-16}$	$3.62 \cdot 10^{-16}$	$7.02 \cdot 10^{-16}$	$1.76 \cdot 10^{-13}$	$9.50 \cdot 10^{-12}$
20.0	$1.23 \cdot 10^{-16}$	$8.80 \cdot 10^{-17}$	$8.13 \cdot 10^{-15}$	$3.59 \cdot 10^{-13}$	$1.34 \cdot 10^{-11}$	$1.42 \cdot 10^{-6}$
30.0	$4.99 \cdot 10^{-17}$	$3.84 \cdot 10^{-17}$	$9.29 \cdot 10^{-14}$	$7.89 \cdot 10^{-12}$	$1.03 \cdot 10^{-9}$	$2.12 \cdot 10^{-1}$
40.0	$7.07 \cdot 10^{-17}$	$6.29 \cdot 10^{-17}$	$2.29 \cdot 10^{-13}$	$1.73 \cdot 10^{-10}$	$7.89 \cdot 10^{-8}$	$1.35 \cdot 10^0$
50.0	$6.29 \cdot 10^{-17}$	$6.28 \cdot 10^{-17}$	$1.41 \cdot 10^{-12}$	$3.82 \cdot 10^{-9}$	$6.05 \cdot 10^{-6}$	$1.35 \cdot 10^0$
60.0	$8.31 \cdot 10^{-17}$	$4.27 \cdot 10^{-17}$	$9.01 \cdot 10^{-12}$	$8.43 \cdot 10^{-8}$	$4.63 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^0$
70.0	$7.24 \cdot 10^{-17}$	$4.24 \cdot 10^{-17}$	$5.74 \cdot 10^{-11}$	$1.85 \cdot 10^{-6}$	$3.54 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^0$
80.0	$4.53 \cdot 10^{-17}$	$8.55 \cdot 10^{-17}$	$3.65 \cdot 10^{-10}$	$4.08 \cdot 10^{-5}$	$9.46 \cdot 10^{-1}$	$1.35 \cdot 10^0$
90.0	$7.05 \cdot 10^{-17}$	$4.94 \cdot 10^{-17}$	$2.32 \cdot 10^{-9}$	$9.00 \cdot 10^{-4}$	$9.75 \cdot 10^{-1}$	$1.35 \cdot 10^0$
100.0	$6.95 \cdot 10^{-17}$	$5.80 \cdot 10^{-17}$	$1.48 \cdot 10^{-8}$	$1.98 \cdot 10^{-2}$	$9.75 \cdot 10^{-1}$	$1.35 \cdot 10^0$

Мы видим, что значения $\text{Re} = 22.0, 23.0$ принадлежат области устойчивости, решение в этом случае имеет вид течения Куэтта, а начиная с $\text{Re} = 24.0$ норма функции тока возрастает с течением времени. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса темпы роста $\|\psi\|$ также увеличиваются. Сопоставив эти результаты с табл. 5.4, можно заметить, что переход из устойчивой в неустойчивую область должен происходить при переходе от $\text{Re} = 22.0$ к $\text{Re} = 23.0$. Это несоответствие объясняется тем, что спектральная задача решается для линеаризованных уравнений. Нелинейность приводит к смещению области устойчивости. Таким образом, полученные результаты вполне соответствуют ожидаемым — с ростом Re неустойчивость течения Куэтта проявляется примерно с появлением собственных значений с отрицательной вещественной частью в спектре соответствующей спектральной задачи, а при дальнейшем росте Re неустойчивость увеличивается. Приведем функцию тока решения при $\text{Re} = 32, t = 100.0$.

Рис. 5.13. Решение уравнений Навье–Стокса при $\text{Re} = 27, t = 100.0$

Изображенное на рис. 5.13 течение имеет вид классических вихрей Тейлора. Решение, которое в начальный момент времени представляло собой слабо возмущенное течение Куэтта, со временем эволюционировало в вихри Тейлора.

Закключение. Итак, нами получены все необходимые результаты для осуществления численной стабилизации: установлен метод вычисления нижней части спектра (как собственных значений, так и функций) с высокой точностью; показана связь отрицательности спектра с возникновением неустойчивости течения Куэтта при решении нестационарной задачи. Для ряда случаев получено решение дифференциальной задачи, которое имеет самостоятельное значение.

Данная работа имеет такое же отношение к вопросу численной стабилизации с границы течения Куэтта, как [8] — к стабилизации нулевого решения уравнений Навье–Стокса. И если вопрос стабилизируемости последнего в неустойчивом случае был положительно решен в [5], то возможность стабилизации неустойчивого течения Куэтта остается открытым.

Конечно, воспользовавшись разложением в ряд Фурье, можно было свести спектральную задачу к одномерной. Тут сыграли роль следующие факторы: уже хорошо зарекомендовавшая себя в [8] техника для решения подобных задач и приемлемые вычислительные затраты. На сетке 32×32 весь процесс Арнольди (при размерности крыловской последовательности $m = 100$) занимает время порядка двух минут на современной ЭВМ (с процессором Pentium 4–2400 МГц). Еще одним фактором является усложнение вычислительной технологии стабилизации: мы были бы вынуждены сначала перейти от двумерной задачи к одномерной, а затем обратно.

Все результаты статьи были получены с помощью разработанного автором на C++ программного комплекса с использованием библиотек LAPACK [11] и UMFPACK [3]; визуализация результатов выполнена с помощью пакета, разработанного на Java. Решение трансцендентных уравнений, возникших при получении аналитических решений, было бы сильно затруднено без использования системы символьных вычислений Maple 9.0 [13].

Автор благодарит проф. Е. В. Чижонкова за постановку задачи и обсуждение многих проблем, возникших при ее решении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05–01–00511).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1989.
2. *Бабенко К.И. и др.* Об устойчивости и бифуркации течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. Препринт ИПМ АН СССР. № 99. М., 1981.
3. *Davis T.A.* UMFPACK (<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack>).
4. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
5. *Chizhonkov E.V., Ivanchikov A.A.* On numerical stabilization of solutions of Stokes and Navier-Stokes equations by the boundary conditions // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. **19**, № 6. 477–494.
6. *Chorin A.* Numerical simulation of the Navier–Stokes equations // Math. Comp. 1968. **22**. 745–762.
7. *Graham I.G., Spence A., Vainikko E.* Parallel iterative methods for Navier–Stokes equations and application to eigenvalue computation // Concurrency and Computation: Practice and Experience. 2003. **15**. 1151–1168.
8. *Иванчиков А.А.* Численное решение некоторых спектральных задач для уравнений Стокса // Вычисл. методы и программирование. 2003. **4**, № 2. 58–74.
9. *Икрамов Х.Д.* Несимметричная проблема собственных значений. М.: Наука, 1991.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.
11. LAPACK (<http://www.netlib.org/lapack>).
12. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
13. Maple (<http://www.maplesoft.com>).
14. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Comput. 1986. **7**. 856–869.
15. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

Поступила в редакцию
17.05.2005