

УДК 538.975

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА МНОГОСЛОЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ТЕОРИИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СЛОЕВ

Т. В. Амочкина¹

В работе предлагается алгоритм синтеза многослойных оптических покрытий, использующий теорию эквивалентных слоев. Алгоритм основан на минимизации оценочной функции на достижимом множестве эквивалентных фазовых толщин и эквивалентных показателей преломления. Алгоритм позволяет синтезировать покрытия со сложными требуемыми спектральными характеристиками, заданными в узкой спектральной области.

Ключевые слова: многослойные оптические покрытия, теория эквивалентных слоев, минимизация функций, спектральные характеристики, оптоэлектроника.

1. Введение. Сложные многослойные оптические покрытия являются важной составной частью современных устройств в оптике и оптоэлектронике [1]. Многослойные оптические покрытия широко используются в системах телекоммуникаций, электронных дисплеях, оптических запоминающих устройствах, полупроводниковых приборах и т.д. Таким образом, постоянно растет потребность в синтезе новых типов оптических покрытий. За последние три десятилетия XX-го века был достигнут значительный прогресс в области развития методов синтеза многослойных оптических покрытий [1–4]. Большинство известных численных методов синтеза основано на минимизации функции, оценивающей разность между требуемой и реальной спектральными характеристиками покрытия. В ходе синтеза, как правило, покрытие оптимизируется по физическим толщинам слоев, показатели преломления слоев остаются без изменений. Это связано с тем, что на практике для синтеза и производства покрытий обычно используется несколько заданных материалов с известными показателями преломления, и эти показатели преломления имеют фиксированные значения. Очевидно, что такое ограничение сужает потенциал методов оптимизации.

Другой подход в задачах синтеза оптических покрытий основан на применении теории эквивалентных слоев [5–9]. Этот подход допускает использование произвольных показателей преломления при решении задач синтеза. Как правило, покрытия, получающиеся при использовании этого подхода, включают в себя слои с произвольными показателями преломления N , которые могут не только не совпадать с заранее заданными показателями преломления, но даже не соответствовать ни одному известному материалу. Такие слои заменяются симметричными комбинациями из трех слоев с заранее заданными высоким и низким показателями преломления [10].

В настоящей работе предлагается новый алгоритм синтеза многослойных оптических покрытий, сочетающий в себе потенциал современных методов оптимизации и подход, основанный на теории эквивалентных слоев. Алгоритм основан на минимизации оценочной функции на специально построенном множестве эквивалентных фазовых толщин слоев Φ и эквивалентных показателей преломления слоев N . Это множество, называемое в дальнейшем достижимым множеством, сформировано таким образом, что любую пару (Φ, N) из этого множества можно представить эквивалентной симметричной трехслойной комбинацией слоев с заранее заданными показателями преломления. Покрытие, которое получается после замены всех пар эквивалентных фазовых толщин и показателей преломления соответствующими трехслойными комбинациями, можно использовать как начальное приближение для последующей оптимизации покрытия по физическим толщинам слоев. Алгоритм может успешно применяться для синтеза покрытий со сложными требуемыми спектральными характеристиками, заданными в узкой спектральной области.

Во втором разделе приводится краткое изложение основ многослойной оптики. Это изложение предназначено для читателей совсем не знакомых или мало знакомых с многослойной оптикой. В третьем разделе исследуются связи между фазовыми толщинами симметричных трехслойных комбинаций и фазовыми толщинами Φ и показателями преломления N соответствующих эквивалентных слоев. В результате этих исследований строится достижимое множество эквивалентных фазовых толщин и показателей преломления, на котором проводится минимизация оценочной функции. В четвертом разделе подробно описывается алгоритм синтеза и демонстрируется его применение к одной из сложных современных задач синтеза. В пятом разделе приводятся выводы.

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: tatiana@srcc.msu.su

2. Основы многослойной оптики. Рассмотрим многослойное покрытие, состоящее из m однородных и изотропных слоев (рис. 1). Ось z направлена от подложки к внешней среде. Слои пронумерованы в том же направлении.

Обозначим физические толщины слоев $d_1, d_2, \dots, d_m$, а их показатели преломления $n_1, n_2, \dots, n_m$. Показатели преломления подложки и внешней среды обозначим соответственно n_s и n_a . Предположим, что все слои непоглощающие, и рассмотрим только случай нормального падения света.

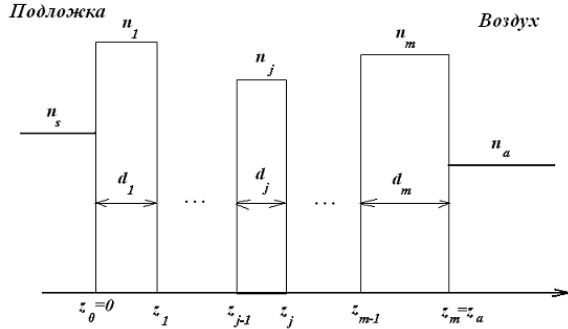


Рис. 1. Многослойное покрытие

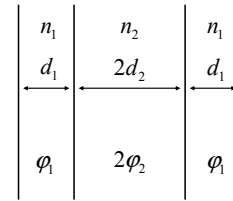


Рис. 2. Симметричная комбинация трех однородных непоглощающих слоев

Матричный метод Абеле [11] ставит каждому слою в соответствие характеристическую матрицу. В

случае нормального падения характеристическая матрица j -го слоя есть $M_j = \begin{pmatrix} \cos \varphi_j & \frac{i}{n_j} \sin \varphi_j \\ in_j \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{pmatrix}$,

где $\varphi_j = \frac{2\pi}{\lambda} n_j d_j$ — фазовая толщина j -го слоя и λ — длина волны падающего света в вакууме.

Произведение характеристических матриц всех слоев $M = M_m M_{m-1} \dots M_1$ известно как характеристическая матрица покрытия: $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$.

Амплитудные коэффициенты пропускания и отражения (t и r соответственно) выражаются через элементы характеристической матрицы покрытия по формулам

$$t = \frac{2n_a}{n_a m_{11} + n_s m_{22} + n_a n_s m_{12} + m_{21}}, \quad r = \frac{n_a m_{11} - n_s m_{22} + n_a n_s m_{12} + m_{21}}{n_a m_{11} + n_s m_{22} + n_a n_s m_{12} + m_{21}}. \quad (1)$$

Уравнения (1) являются основными формулами для вычисления спектральных характеристик многослойного покрытия. Энергетический коэффициент пропускания T и отражения R выражаются через амплитудные коэффициенты по формулам $T = \frac{n_s}{n_a} |t|^2$, $R = |r|^2$.

3. Теория

3.1. Характеристическая матрица и эквивалентные слои. Рассмотрим симметричную комбинацию из трех непоглощающих однородных слоев с физическими толщинами $d_1, 2d_2, d_1$ и показателями преломления n_1, n_2, n_1 (рис. 2).

Характеристическая матрица этой трехслойной комбинации при нормальном падении имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 - p \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 & \frac{i}{n_1} (\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 + q \sin 2\varphi_2) \\ in_1 (\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 - q \sin 2\varphi_2) & \cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 - p \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 \end{pmatrix},$$

где $p = \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right)$, $q = \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right)$ и $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 d_1)$, $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 d_2)$ — фазовые толщины слоев.

По теореме Герпина [10] любая трехслойная комбинация может быть заменена на произвольной контрольной длине волны λ_0 одним эквивалентным слоем с характеристической матрицей

$$M_e = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \frac{i}{N} \sin \Phi \\ iN \sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix}.$$

Эквивалентный слой обладает на контрольной длине волны λ_0 теми же оптическими свойствами, что и трехслойная симметричная комбинация, если эквивалентная фазовая толщина Φ и эквивалентный показатель преломления N определены следующим образом:

$$\cos \Phi = \cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 - p \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2, \quad (2)$$

$$N = n_1 \sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 - q \sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 + q \sin 2\varphi_2}}. \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать, что показатели преломления n_1 и n_2 фиксированы, а физические толщины слоев d_1 и d_2 меняются таким образом, что фазовые толщины φ_1 и φ_2 меняются в диапазоне от 0 до π . Потребуем также, чтобы эквивалентная фазовая толщина Φ и эквивалентный показатель преломления N были действительными числами. Это означает, что должны быть выполнены следующие условия:

$$|\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 - p \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2| \leq 1, \quad (4)$$

$$\frac{\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 - q \sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 + q \sin 2\varphi_2} \geq 0. \quad (5)$$

3.2. Допустимое множество фазовых толщин. В этом подразделе строится множество фазовых толщин φ_1, φ_2 , удовлетворяющих уравнениям (4) и (5). В дальнейшем будем называть это множество допустимым множеством фазовых толщин. Заметим, что геометрия допустимого множества была детально исследована ван дер Лааном и Франкеней [12]. Результаты данного подраздела совпадают с результатами из [12]. Однако для последующих рассмотрений представим эти результаты в несколько иной форме.

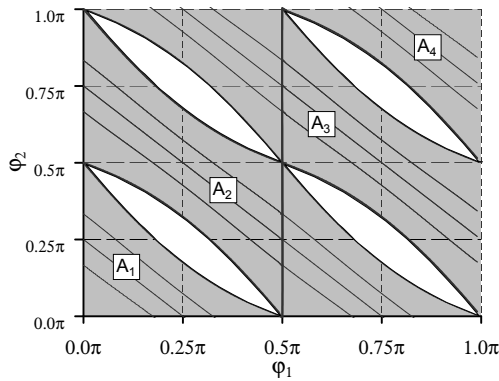


Рис. 3. Линии постоянных значений u на допустимом множестве фазовых толщин φ_1, φ_2

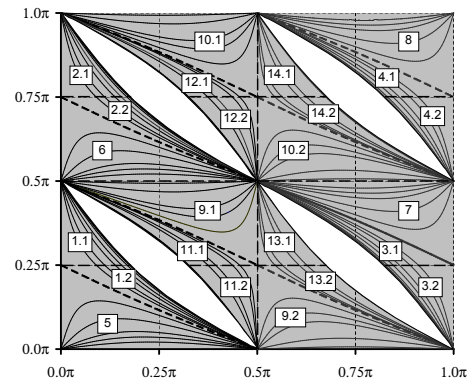


Рис. 4. Линии постоянных значений v на допустимом множестве фазовых толщин φ_1, φ_2

Рассмотрим следующие уравнения:

$$\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 - p \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 = u, \quad (6)$$

$$n_1 \sqrt{\frac{\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 - q \sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 + q \sin 2\varphi_2}} = v, \quad (7)$$

где u и v параметры. Очевидно, что все пары φ_1, φ_2 , удовлетворяющие уравнениям (6), (7) при $u \in [-1, 1]$ и $v \in [0, +\infty)$, образуют допустимое множество. Решения уравнений (6), (7) есть линии уровня эквивалентной фазовой толщины Φ и эквивалентного показателя преломления N . Аналитические решения уравнений (6), (7) помещены в приложении А. Здесь же представлены лишь окончательные результаты в графической форме.

Решения уравнения (6) представляют собой однопараметрическое семейство кривых на плоскости (φ_1, φ_2) . На рис. 3 квадрат $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$ поделен жирными линиями на четыре части в соответствии с решениями уравнения (6) при $u = -1$ и $u = 1$. Тонкие линии на рис. 3 соответствуют решениям уравнения (6) при $u = -0.5$, $u = 0$ и $u = 0.5$. Четыре белые лунки в квадрате $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$ представляют собой так называемые зоны задержки [9]. В зонах задержки не существует действительных решений уравнения (2) относительно эквивалентных фазовых толщин Φ .

Решения уравнения (6), соответствующие всем значениям u из отрезка $[-1, 1]$, заполняют четыре области внутри квадрата $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$. Действительные решения уравнения (2) существуют во всех областях, закрашенных серым цветом и обозначенных на рис. 3 символами A_1, A_2, A_3, A_4 . Объединение этих областей называется допустимым множеством фазовых толщин φ_1, φ_2 .

Решения уравнения (7) представляют собой другое однопараметрическое множество кривых на плоскости (φ_1, φ_2) . Действительные решения уравнения (3) существуют во всех областях, закрашенных серым цветом на рис. 4. Некоторые кривые, соответствующие различным значениям параметра v , показаны на рис. 4. Примечателен тот факт, что кривые, соответствующие всем значениям v из $[0, +\infty]$, заполняют в точности то же множество, что заполняют кривые, соответствующие решениям уравнения (6), т.е. то множество, которое мы назвали допустимым множеством фазовых толщин φ_1 и φ_2 . Этот факт может быть проверен не только численно, но и аналитически. Строгое аналитическое доказательство этого факта вынесено в приложение В. Это доказательство не приводится здесь, чтобы не загромождать изложение.

При (φ_1, φ_2) из зон задержки левая и правая части уравнения (5) принимают отрицательные значения. Границы зон задержки соответствуют значениям $v = 0$ и $v = +\infty$ (т.е. случаю, когда знаменатель в левой части уравнения (5) обращается в нуль). Эти границы показаны на рис. 4 жирными линиями.

На рис. 4 допустимое множество поделено на 24 области, помеченных одиночными номерами (5–8) и двойными номерами (1.1, 1.2 и т.д.). В подразделе 3.4 будет обсуждаться вопрос об отображении допустимого множества на плоскость (Φ, N) . Номера областей на рис. 4 соответствуют номерам аналитических выражений для решений уравнения (7). Эти выражения вынесены в приложение А. На рис. 4 области отделены друг от друга пунктирными линиями.

3.3. Достижимое множество эквивалентных фазовых толщин и показателей преломления. Рассмотрим образ допустимого множества на плоскости эквивалентных фазовых толщин Φ и показателей преломления N . По формуле (3) для каждой пары (φ_1, φ_2) из допустимого множества однозначно определяется значение N эквивалентного показателя преломления. В то же время значение эквивалентной фазовой толщины Φ определяется из уравнения (2) неоднозначно. Ниже будет объяснено, из каких соображений выбирается единственное значение Φ для каждой пары (φ_1, φ_2) из допустимого множества.

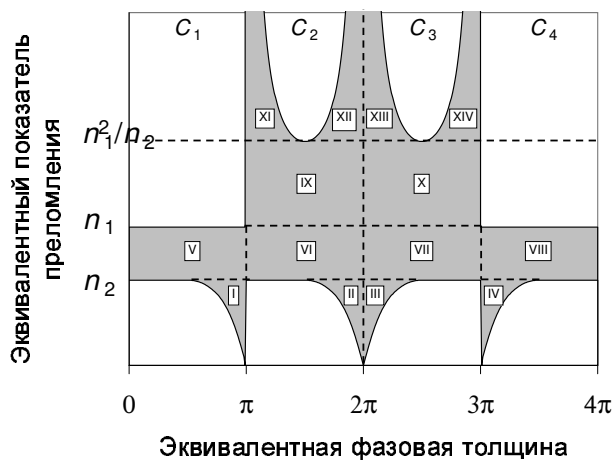


Рис. 5. Достижимое множество

Для каждого значения u из отрезка $[-1, 1]$ существует только одна линия уровня уравнения (6) в каждой из областей, помеченных символами A_1, A_2, A_3 и A_4 на рис. 3. Заметим, что для всех пар (φ_1, φ_2) из области A_1 выполняется условие $0 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq \pi/2$. В области A_2 имеем $\pi/2 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq \pi$, в области A_3 — $\pi \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq 3\pi/2$, в области A_4 — $3\pi/2 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq 2\pi$. Рассмотрим четыре полосы на плоскости (Φ, N) , помеченные символами C_1, C_2, C_3 и C_4 . На плоскости (Φ, N) в полосах C_1, C_2, C_3 и C_4 выполняется $0 \leq N < \infty$ и Φ меняется на отрезках $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$ и $[3\pi, 4\pi]$ соответственно. Эти полосы изображены на рис. 5.

Установим следующее соответствие между областями A_1, A_2, A_3 и A_4 на рис. 3 и полосами C_1, C_2, C_3 и C_4 на рис. 5. Пусть для пар (φ_1, φ_2) , принадлежащих области A_1 , Φ принимает значение из полосы C_1 , для пар (φ_1, φ_2) , принадлежащих области A_2 , — из полосы C_2 и т.д. Таким образом мы выделяем единственное значение Φ для каждой пары (φ_1, φ_2) из допустимого множества. Образ допустимого множества на плоскости (Φ, N) , полученный таким способом, будем называть достижимым множеством. Достижимое множество показано на рис. 5 серым цветом.

Верхняя и нижняя границы достижимого множества содержат прямолинейные и криволинейные

участки. Для описания предлагаемого алгоритма синтеза необходимы аналитические формулы для границ. Получение аналитических формул для границ вынесено в приложение С, здесь представлен лишь конечный результат. Для определенности формулы, описывающие верхнюю $N_u(\Phi)$ и нижнюю $N_l(\Phi)$ границы, приводятся для случая, когда $n_1 > n_2$, т.е. для случая, когда внешние слои трехслойной комбинации имеют высокий показатель преломления, а внутренний слой имеет низкий показатель преломления (см. рис. 2). Выражения для $N_u(\Phi)$ и $N_l(\Phi)$ могут быть записаны в следующей форме:

$$N_u(\Phi) = \begin{cases} n_1 & \text{при } \Phi \in [0, \pi] \cup [3\pi, 4\pi] \\ n_1 \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 - \cos^2 \Phi} + q}{\sqrt{p^2 - \cos^2 \Phi} - q}} & \text{при } \Phi \in [\pi, 3\pi], \end{cases} \quad (8)$$

$$N_l(\Phi) = \begin{cases} n_2 & \text{при } \Phi \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2] \cup [5\pi/2, 3\pi] \cup [7\pi/2, 4\pi], \\ n_1 \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 - \cos^2 \Phi} - q}{\sqrt{p^2 - \cos^2 \Phi} + q}} & \text{при } \Phi \in [\pi/2, \pi] \cup [3\pi/2, 5\pi/2] \cup [3\pi, 3\pi/2], \quad n_1 > n_2. \end{cases} \quad (9)$$

3.4. Отображение допустимого множества на достижимое множество. Рассмотрим подробно свойства отображения допустимого множества на достижимое множество. Для определенности будем рассматривать случай $n_1 > n_2$. Для изучения свойств отображения удобно представить достижимое множество как объединение 24-х областей. Каждая из этих областей состоит из пар (φ_1, φ_2) , где φ_1, φ_2 удовлетворяют уравнению (7). Номера областей совпадают с номерами решений, приведенных в приложении А. Решения уравнения (7) записаны в виде зависимостей φ_2 от φ_1 . Каждая из областей допустимого множества отображается на одну область достижимого множества. Области, на которые поделено достижимое множество, помечены римскими цифрами.

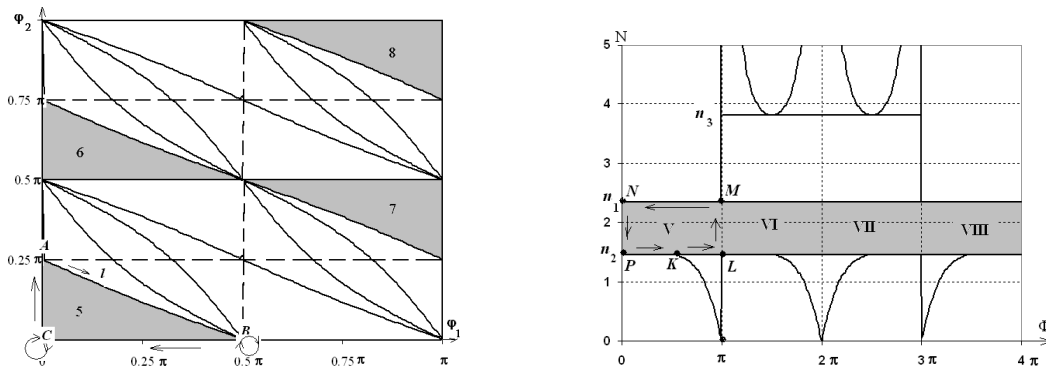


Рис. 6, 7. Иллюстрация свойств отображения допустимого множества на достижимое множество

Существует взаимно однозначное соответствие между четырьмя областями из допустимого множества и четырьмя областями из достижимого множества. А именно, области из допустимого множества с номерами 5–8 отображаются на области V–VIII из достижимого множества соответственно. Остальные 20 областей из допустимого множества, помеченные двойными номерами на рис. 4, отображаются на оставшиеся 10 областей из достижимого множества (рис. 5) так, что для каждой области из достижимого множества есть две области из допустимого множества, которые на нее отображаются. Области 1.1 и 1.2 отображаются на область I, области 2.1 и 2.2 — на область II и т.д. Иными словами, у каждой из 10 областей достижимого множества есть два прообраза из допустимого множества.

Рассмотрим подробно, как именно происходит отображение границ областей допустимого множества в границы областей достижимого множества.

Сначала остановимся на однозначном отображении областей допустимого множества на области достижимого множества. Эти области изображены отдельно на рис. 6 и 7. Все четыре области из допустимого множества имеют одинаковую криволинейную форму, а соответствующие им области достижимого множества представляют собой прямоугольники. Таким образом, достаточно рассмотреть отображение границ, например, области 5 на область V. Остальные отображения происходят по аналогии. Процесс отображения приведен в табл. 1, содержащей шесть колонок: в первой колонке указан путь по границе области 5, во второй колонке указан соответствующий ему путь по границе области V (рис. 6 и 7), в третьей

Таблица 1

Однозначное отображение границы области 5 допустимого множества
на границу области V достижимого множества

Граница области 5 допустимого множества	Граница области V достижимого множества	φ_1	φ_2	Φ	N
AB	KL	$[0; \pi/2]$	$\varphi_2^{(2.5)}$ при $v = n_2$	$[\pi/2; \pi]$	n_2
B	LM	$\pi/2$	0	π	$[n_2; n_1]$
BC	MN	$[\pi/2; 0]$	0	$[\pi; 0]$	n_1
C	NP	0	0	0	$[n_1; n_2]$
CA	PK	0	$[0; \pi/4]$	$[0; \pi/2]$	n_2

колонке указан диапазон изменения фазовой толщины φ_1 , в четвертой колонке показана соответствующая зависимость φ_2 , указанная либо явно, либо в соответствии с номерами решений из приложения А, в пятой и шестой колонках приведены диапазоны изменения эквивалентной толщины Φ и эквивалентного показателя преломления N . Границу области 5 удобно разбить на два отрезка, две точки и один криволинейный участок, в то время как границу множества V удобно представить состоящей из пяти отрезков. При таком разбиении легко представить обход границы области 5 и соответствующий ему обход границы области V. На рис. 6 и 7 эти обходы показаны стрелками.

Рассмотрим теперь, как осуществляется отображение границ, когда две области из допустимого множества отображаются в одну область из достижимого множества. Области допустимого множества изображены на рис. 8 и 9, а соответствующие им области достижимого множества — на рис. 10. На рис. 8 и 9 изображено по 10 областей, все они имеют форму криволинейного треугольника. Соответствующие им области из достижимого множества являются либо криволинейными треугольниками (области I–IV, XIII, XIV), либо прямоугольниками (области IX, X). На рис. 8, 9 и 10 направления обхода показаны стрелками. Границы областей допустимого и достижимого множеств разбиты удобным образом на отрезки, точки и кривые, как и в случае однозначного отображения. В табл. 2 и 3 приведен процесс отображения в деталях. Колонки имеют тот же смысл, что и в случае однозначного отображения.

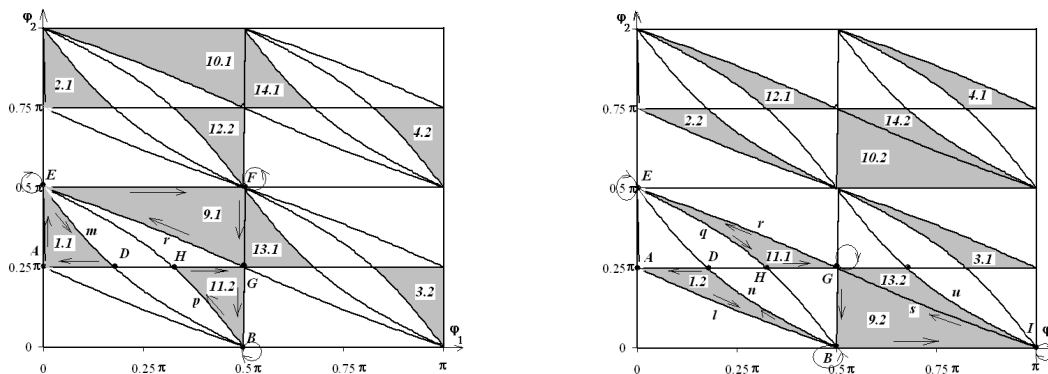


Рис. 8, 9. Иллюстрация свойств отображения допустимого множества на достижимое множество

Из приведенных рисунков и таблиц видно, что отображение устроено довольно любопытно. При отображении отрезок может переводиться в отрезок, точку или кривую, кривая может переходить в отрезок, кривую или точку, точка может переходить в отрезок или кривую. Точки допустимого множества, которые переводятся в отрезок или кривую, или точки достижимого множества, являющиеся образами отрезка или кривой, будем называть особыми точками отображения. Особые точки отображения соответствуют вырожденным случаям, возникающим при замене трехслойной комбинации эквивалентным слоем.

Из материала данного подраздела можно заключить, что только те эквивалентные слои, показатель преломления которых N лежит в промежутке между n_2 и n_1 , могут быть однозначно заменены симметричными комбинациями трех слоев. Все слои, у которых эквивалентный показатель преломления N либо меньше n_2 , либо больше n_1 , могут быть заменены двумя трехслойными симметричными комбинациями. В последующих разделах обсуждается, как можно использовать эту неоднозначность при применении алгоритма синтеза.

4. Алгоритм синтеза

Таблица 2

Отображение границ областей 1.1, 9.1, 11.2 допустимого множества
в границы областей I, IX и XI достижимого множества

Границы областей допустимого множества	Границы областей достижимого множества	φ_1	φ_2	Φ	N
Область 1.1	Область I				
AE	KL	0	$[\pi/4; \pi/2]$	$[\pi/2; \pi]$	n_2
E	LR	0	$\pi/2$	π	$[n_2; 0]$
EmD	R	$[0; \Psi_0]$	$\varphi_2^{(1.1)}$ при $v = 0$	π	0
DA	RK	$[\Psi_0; 0]$	$\pi/4$	$[\pi; \pi/2]$	N_l
Область 9.1	Область IX				
EF	ML	$[0; \pi/2]$	$\pi/2$	$[\pi; 2\pi]$	n_1
F	LS	$\pi/2$	$\pi/2$	2π	$[n_1; n_3]$
FG	ST	$\pi/2$	$[\pi/2; \pi/4]$	$[2\pi; 3\pi/2]$	n_3
GE	TU	$[\pi/2; 0]$	$\varphi_2^{(9.1)}$ при $v = n_3$	$[3\pi/2; \pi]$	n_3
E	UM	0	$\pi/2$	π	$[n_3; n_1]$
Область 11.2	Область XI				
GB	TU	$\pi/2$	$[\pi/4; 0]$	$[3\pi/2; \pi]$	n_3
B	UV	$\pi/2$	0	π	$[n_3; +\infty)$
BH	V	$[\pi/2; \Psi_\infty]$	$\varphi_2^{(11.1)}$ при $v = +\infty$	π	$+\infty$
HG	VT	$[\Psi_\infty; \pi/2]$	$\pi/4$	$[\pi; 3\pi/2]$	N_u

Таблица 3

Отображение границ областей 1.2, 9.2, 11.1 допустимого множества
в границы областей I, IX и XI достижимого множества

Границы областей допустимого множества	Границы областей достижимого множества	φ_1	φ_2	Φ	N
Область 1.2	Область I				
AlB	KL	$[0; \pi/2]$	$\varphi^{(1.2)}$ при $v = n_2$	$[\pi/2; \pi]$	n_2
B	LR	$\pi/2$	0	π	$[n_2; 0]$
BnD	R	$[\pi/2; \Psi_0]$	$\varphi^{(1.2)}$ при $v = 0$	π	0
DA	RK	$[\Psi_0; 0]$	$\pi/4$	$[\pi; \pi/2]$	N_l
Область 9.2	Область IX				
CI	ML	$[\pi/2; \pi]$	0	$[\pi; 2\pi]$	n_1
I	LS	π	0	2π	$[n_1; n_3]$
IG	ST	$[\pi; \pi/2]$	$\varphi^{(9.2)}$ при $v = n_3$	$[2\pi; 3\pi/2]$	n_3
GC	TU	$\pi/2$	$[\pi/4; 0]$	$[3\pi/2; \pi]$	n_3
C	UM	$\pi/2$	0	π	$[n_3; n_1]$
Область 11.1	Область XI				
GE	TU	$[\pi/2; 0]$	$\varphi^{(13.2)}$ при $v = n_3$	$[3\pi/2; \pi]$	n_3
E	UV	0	$\pi/2$	π	$[n_3; +\infty)$
EH	V	$[0; \Psi_\infty]$	$\varphi^{(13.2)}$ при $v = +\infty$	π	$+\infty$
HG	VT	$[\Psi_\infty; \pi/2]$	$\pi/4$	$[\pi; 3\pi/2]$	N_u

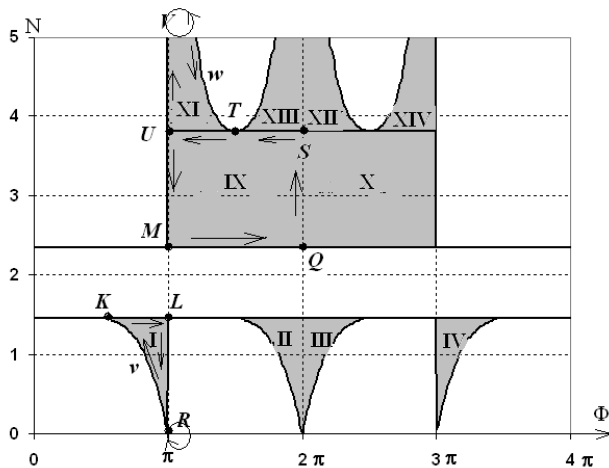


Рис. 10. Иллюстрация свойств отображения допустимого множества на достижимое множество

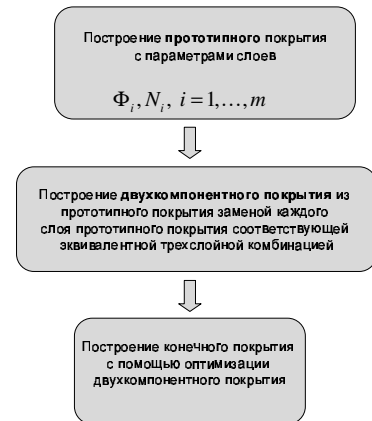


Рис. 11. Схема алгоритма синтеза

4.1. Постановка задачи синтеза. Метод улучшения покрытия. В этом подразделе приводится формулировка задачи синтеза многослойных оптических покрытий и описывается один из существующих методов ее решения для читателей, недостаточно знакомых с многослойной оптикой.

Задача синтеза многослойного оптического покрытия состоит в том, чтобы найти такое число слоев покрытия, их толщины и показатели преломления, чтобы покрытие обладало требуемой спектральной характеристикой. В дальнейшем мы будем считать число слоев m , показатели преломления n_j и толщины слоев d_j при $j = 1, \dots, m$ параметрами задачи синтеза.

Предположим, что число слоев m и показатели преломления n_j известны. Следовательно, в ходе синтеза меняться могут только толщины слоев.

Пусть требуемой спектральной характеристикой является энергетический коэффициент отражения. Обозначим требуемый коэффициент отражения $\tilde{R}(\lambda)$. А. В. Тихонравовым доказано [13], что в общем случае не существует покрытия, спектральная характеристика которого в точности совпадала бы с $\tilde{R}(\lambda)$. Следовательно, можно искать лишь покрытия, спектральные характеристики которых в каком-то смысле близки к $\tilde{R}(\lambda)$.

Введем вектор X физических толщин слоев: $X = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$. Теперь можно рассматривать этот вектор как элемент m -мерного евклидова пространства.

Так как число слоев и показатели преломления фиксированы, коэффициент отражения зависит только от толщин слоев, т.е. от вектора X . Обозначим коэффициент отражения покрытия, определяемого вектором X , через $R(X, \lambda)$.

Очевидно, что невозможно вычислить $R(X, \lambda)$ для всех λ из заданной спектральной области. Введем в заданной спектральной области сетку длин волн. Пусть число точек сетки равно L . Обозначим точки сетки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$.

Существует много способов оценить близость коэффициента отражения покрытия и требуемого коэффициента отражения. Один из наиболее распространенных способов состоит в оценке взвешенного среднеквадратичного отклонения коэффициента отражения покрытия и заданного коэффициента отражения на сетке по длинам волн [14]:

$$F(X) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left[\frac{R(X, \lambda_j) - \tilde{R}(\lambda_j)}{\Delta R_j} \right]^2. \quad (10)$$

Величины ΔR_j в (10) называют допусками, функцию $F(X)$ называют оценочной функцией. Ясно, что оценочная функция полностью определяется вектором X . Зачастую удобно положить все допуски равными 0.01. В этом случае $F^{1/2}(X)$ представляет собой среднеквадратичное отклонение коэффициента отражения от требуемого коэффициента отражения в процентах.

Введение оценочной функции позволяет сформулировать задачу синтеза как задачу оптимизации. Оптимизация оценочной функции является одним из самых распространенных на сегодняшний день подходов к проблеме синтеза многослойных оптических покрытий.

Процедура синтеза, впервые предложенная Филиппом Баумайстером [15] и известная как метод улучшения покрытия, представляет собой ключевой элемент многих современных методов синтеза. Суть процедуры улучшения покрытия состоит в минимизации оценочной функции в пространстве толщин слоев. Начальное приближение в процессе такой оптимизации называется стартовым покрытием.

Основная проблема, возникающая в процессе применения метода улучшения покрытия, связана с невыпуклостью оценочной функции. Вообще говоря, оценочная функция имеет огромное число локальных минимумов. Таким образом, можно говорить только лишь о сходимости процесса оптимизации к локальному минимуму, ближайшему к стартовому покрытию. Покрытие, при котором оценочная функция имеет локальный минимум, принято называть результирующим покрытием. Решение большого числа практических задач показывает, что метод улучшения покрытия эффективен только лишь при выборе хорошего стартового покрытия. К сожалению, для многих задач синтеза хорошие стартовые покрытия не известны. Особенно проблема выбора стартового покрытия актуальна для задач синтеза со сложными требуемыми характеристиками, заданными в узких спектральных областях. Подробное описание метода улучшения покрытия можно найти в [9].

В настоящей работе предлагается новый алгоритм синтеза двухкомпонентных многослойных покрытий при нормальном падении света. Двухкомпонентные покрытия — это покрытия, состоящие из слоев с чередующимися высоким n_H и низким n_L показателями преломления.

Предлагаемый алгоритм состоит из трех главных шагов, показанных на рис. 11: построение прототипного покрытия, получение из него двухкомпонентного покрытия и получение из последнего результирующего покрытия методом улучшения. Ниже эти шаги рассматриваются подробно.

4.2. Построение прототипного покрытия. Назовем прототипным покрытие, параметры слоев которого — эквивалентные фазовые толщины и эквивалентные показатели преломления. Пусть прототипное покрытие имеет m_e слоев. Обозначим параметры i -го слоя Φ_i, N_i и введем $2m_e$ -мерный вектор параметров прототипного покрытия: $Y = \{\Phi_1, N_1, \dots, \Phi_{m_e}, N_{m_e}\}$.

Как и выше, обозначим требуемый коэффициент отражения через $\tilde{R}(\lambda)$, а отражение прототипного покрытия, задаваемого вектором Y , — через $R(Y, \lambda)$.

Для оценки близости коэффициента отражения прототипного покрытия и требуемого коэффициента отражения введем оценочную функцию по аналогии с формулой (10) следующим образом:

$$F_e(Y) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left[\frac{R(Y, \lambda_j) - \tilde{R}(\lambda_j)}{\Delta R_j} \right]^2. \quad (11)$$

Построим прототипное покрытие с помощью оптимизации оценочной функции (11). Отличие этой задачи оптимизации от стандартной задачи оптимизации метода улучшения покрытия состоит в следующем. Процесс оптимизации оценочной функции при построении прототипного покрытия идет не только по эквивалентным фазовым толщинам слоев, но и по эквивалентным показателям преломления. Эквивалентные показатели преломления могут принимать любые значения от нуля до бесконечности. Однако допускаются не все комбинации эквивалентных фазовых толщин и показателей преломления. Требуется, чтобы все пары (Φ_i, N_i) принадлежали достижимому множеству (область, закрашенная серым цветом на рис. 5). Оптимизационные задачи с такими дополнительными требованиями обычно называются задачами оптимизации с ограничениями.

В вычислительной математике предлагаются различные методы для решения задач оптимизации с ограничениями. В нашем алгоритме мы используем метод штрафных функций [16]. Для того чтобы все пары (Φ_i, N_i) , $i = 1, \dots, m_e$, принадлежали достижимому множеству, вводится штрафная функция

$$P(Y) = \sum_{i=1}^{m_e} \left[\left(\max\{N_i - N_u(\Phi_i), 0\} \right)^2 + \left(\max\{N_l(\Phi_i) - N_i, 0\} \right)^2 \right], \quad (12)$$

где функции N_u и N_l определены соотношениями (8) и (9).

4.3. Получение двухкомпонентного покрытия из прототипного покрытия. На втором шаге все слои полученного на первом шаге прототипного покрытия заменяются соответствующими симметричными трехслойными комбинациями. Процесс замены проиллюстрирован на рис. 12. Из-за отсутствия взаимно однозначного соответствия между допустимым и достижимым множествами такая замена может быть сделана многими способами.

Напомним, что для пары (Φ, N) из достижимого множества существует только один прообраз из допустимого множества, если эта пара принадлежит областям V–VIII на рис. 5. Если пара (Φ, N) лежит

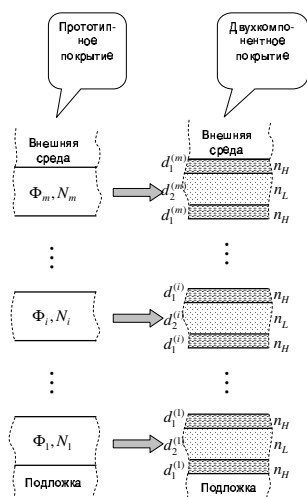


Рис. 12. Замена прототипного покрытия на двухкомпонентное покрытие:
 $d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_1^{(m)}, d_2^{(m)}$ — толщины слоев, полученные в результате замены прототипного покрытия на двухкомпонентное

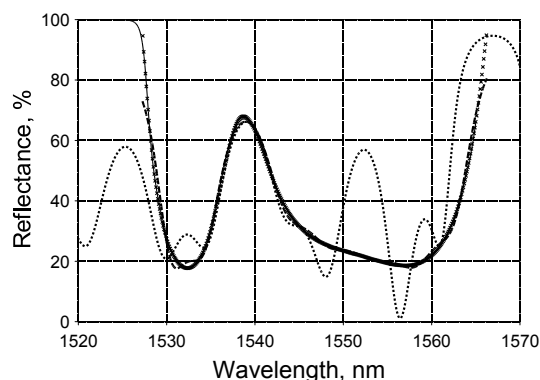


Рис. 13. Решение контекстной задачи

в областях I–IV или IX–XIV, то для этой пары существует два прообраза из допустимого множества, изображенного на рис. 4; следовательно, существуют две возможные трехслойные эквивалентные комбинации. Таким образом, одно прототипное покрытие может порождать целое семейство двухкомпонентных покрытий. Конкретнее, число возможных двухкомпонентных покрытий, порождаемое одним прототипным покрытием, может принимать значения от 1 до 2^{m_e} . В частности, если все пары (Φ_i, N_i) принадлежат областям V–VIII, то такому прототипному покрытию соответствует только одно двухкомпонентное покрытие. Если же все пары (Φ_i, N_i) прототипного покрытия принадлежат областям I–IV и IX–XIV, то такое покрытие порождает 2^{m_e} двухкомпонентных покрытий. При практическом применении алгоритма, как правило, пары прототипного покрытия попадают во все области с I по XIV, т.е. возможное число двухкомпонентных покрытий больше единицы, но меньше 2^{m_e} . В заключении обсуждается практическая выгода от такой неединственности.

Предположим теперь, что выполнена замена прототипного покрытия одним из возможных двухкомпонентных покрытий. Легко видеть, что число слоев двухкомпонентного покрытия m равно $2m_e + 1$, так как соседние слои с одинаковыми показателями преломления n_H склеиваются (рис. 12).

Введем теперь m -компонентный вектор X , координаты которого — физические толщины полученного двухкомпонентного покрытия. Пусть теперь, как и в подразделе 4.1, $R(X, \lambda)$ — коэффициент отражения двухкомпонентного покрытия. Тогда на контрольной длине волны λ_0 получим, что $R(X, \lambda_0) = R(Y, \lambda_0)$, так как трехслойные комбинации двухкомпонентного покрытия и соответствующие слои прототипного покрытия эквивалентны на этой длине волны. Однако на других длинах волн $\lambda \neq \lambda_0$ и $R(X, \lambda)$, и $R(Y, \lambda)$ отличаются, потому что на других длинах волн трехслойные комбинации двухкомпонентного покрытия имеют другие эквивалентные слои, отличные от (Φ_i, N_i) . Это явление известно как дисперсия эквивалентных фазовых толщин и показателей преломления [9]. В результате влияния дисперсии коэффициент отражения двухкомпонентного покрытия может намного хуже приближать требуемый коэффициент отражения, чем коэффициент отражения прототипного покрытия.

4.4. Улучшение двухкомпонентного покрытия. Последний шаг нашего алгоритма фактически представляет собой стандартную процедуру улучшения покрытия, кратко описанную в подразделе 4.1. Чтобы компенсировать влияние дисперсии эквивалентных фазовых толщин и эквивалентных показателей преломления, оценочная функция (10) минимизируется по физическим толщинам слоев. Оптимизация проводится с помощью модифицированного квазиньютоновского метода первого порядка (DLS) [16].

4.5. Пример применения алгоритма. Продемонстрируем работу предложенного алгоритма на конкретном примере. В качестве требуемой характеристики возьмем коэффициент отражения, заданный в узкой спектральной области $\lambda \in [1526, 1566]$ нм. Требуемый коэффициент отражения показан на рис. 13 крестиками. Оптические элементы с такими коэффициентами отражения используются в устройствах,

называемых эрбиумовыми усилителями и применяемых, например, в системах телекоммуникаций. Задача синтеза покрытия с таким коэффициентом отражения была предложена в качестве контекстной [17, 18] на конференции 2001 г., организованной Оптическим обществом США. Трудность задачи состоит в том, что требуемая спектральная характеристика представляет собой довольно сложную кривую, заданную в узкой (всего 30 нм) спектральной области.

Для решения задачи были взяты материалы с показателями преломления $n_H = 2.35$ и $n_L = 1.45$, контрольная длина волны 1539 нм, число слоев прототипного покрытия $m_e = 35$.

В соответствии со схемой алгоритма сначала была минимизирована оценочная функция (11) по эквивалентным фазовым толщинам слоев и эквивалентным показателям преломления 35-слойного покрытия и получено прототипное покрытие. Все допуски ΔR_j в формуле (11) были положены равными 0.01. Коэффициент отражения полученного прототипного покрытия показан на рис. 13 пунктирной линией. Значение оценочной функции получилось равным 2.78. На втором шаге прототипное покрытие было заменено на соответствующее двухкомпонентное покрытие. Коэффициент отражения 71-слойного двухкомпонентного покрытия показан на рис. 13 точечной линией. На длине волны 1539 нм коэффициенты отражения прототипного и двухкомпонентного покрытий совпадают, на остальных же длинах волн они отличаются, причем отличия тем больше, чем дальше длина волны от контрольной длины волны 1539 нм. Значение оценочной функции после замены получилось равным 16.52.

В соответствии с третьим шагом алгоритма полученное двухкомпонентное покрытие было улучшено с помощью программного комплекса OptiLayer [19] методом DLS. Конечное покрытие состоит из 65 слоев, так как толщины некоторых слоев обратились в нуль в процессе оптимизации. Коэффициент отражения конечного покрытия показан на рис. 13 сплошной линией. Значение оценочной функции для конечного покрытия получилось равным 0.48, что даже лучше, чем значение целевой функции для прототипного покрытия.

5. Выводы. В работе предложен новый алгоритм синтеза многослойных оптических покрытий, сочетающий в себе достоинства метода эквивалентных слоев и метода оптимизации с ограничениями. Алгоритм был успешно применен для решения задач синтеза со сложными спектральными характеристиками, заданными в узкой спектральной области. Другие проведенные эксперименты показывают, что алгоритм можно с успехом применять и для решения задач синтеза, в которых спектральные характеристики заданы также и в широких спектральных областях.

Центральной частью предложенного алгоритма является замена прототипного покрытия, состоящего из эквивалентных фазовых толщин и показателей преломления, двухкомпонентным покрытием с чередующимися высоким и низким показателями преломления. В работе показано, что этот процесс замены в общем случае неоднозначен. Однако эта неоднозначность может быть выгодно использована.

Производя замену прототипного покрытия на двухкомпонентное разными способами и улучшая потом полученные покрытия, можно получать целые семейства покрытий, являющихся решениями задачи синтеза. Затем из полученного семейства покрытий могут выбираться те покрытия, которые наиболее удобны в смысле технологий производства. Автоматическая процедура такого выбора является целью дальнейших исследований.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. В. Тихонравову и доктору физико-математических наук М. К. Трубецкову за помощь и поддержку при написании статьи.

Приложение А. Рассмотрим аналитические выражения для всех возможных решений уравнений (6) и (7). Ниже приведены эти выражения только для случая $n_1 > n_2$, т.е. для случая, когда внешние слои в трехслойной комбинации (рис. 2) имеют высокий показатель преломления, а внутренний слой имеет низкий показатель преломления.

Уравнение (6) можно переписать в следующем виде:

$$a \cos 2\varphi_2 + b \sin 2\varphi_2 = c, \quad (\text{A1})$$

где

$$\begin{aligned} a &= a(\varphi_1) = \frac{\cos 2\varphi_1}{\sqrt{\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 \varphi_1}}, & b &= b(\varphi_1) = \frac{p \sin 2\varphi_1}{\sqrt{\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 \varphi_1}}, \\ c &= c(\varphi_1) = \frac{u}{\sqrt{\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 \varphi_1}}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Существует восемь различных решений $(\varphi_2)_i$ уравнения (A1):

$$\begin{aligned} (\varphi_2)_1 &= \frac{\arccos c - \arccos a}{2} + \pi, & (\varphi_2)_2 &= (\varphi_2)_1 - \frac{\pi}{2}, \\ (\varphi_2)_3 &= \frac{-\arccos c - \arccos a}{2} + \pi, & (\varphi_2)_4 &= (\varphi_2)_3 - \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ (\varphi_2)_5 &= \frac{-\arccos(-c) - \arccos(-a)}{2} + \pi, & (\varphi_2)_6 &= (\varphi_2)_5 + \frac{\pi}{2}, \\ (\varphi_2)_7 &= \frac{\arccos(-c) - \arccos(-a)}{2}, & (\varphi_2)_8 &= (\varphi_2)_7 + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{aligned} \quad (A3)$$

После простых алгебраических преобразований уравнение (7) переписывается в следующей форме:

$$a \cos 2\varphi_2 + b \sin 2\varphi_2 = 0, \quad (A4)$$

где, если $0 \leq v < +\infty$, то

$$\begin{aligned} a &= a(\varphi_1) = \frac{(n_1^2 - v^2) \sin 2\varphi_1}{\sqrt{\sin^2 2\varphi_1 (n_1^2 - v^2)^2 + (p \cos 2\varphi_1 (n_1^2 - v^2) - q(n_1^2 + v^2))^2}}, \\ b &= b(\varphi_1) = \frac{p(n_1^2 - v^2) \cos 2\varphi_1 - q(n_1^2 + v^2)}{\sqrt{\sin^2 2\varphi_1 (n_1^2 - v^2)^2 + (p \cos 2\varphi_1 (n_1^2 - v^2) - q(n_1^2 + v^2))^2}}, \end{aligned} \quad (A5)$$

и, если $v = +\infty$, то

$$a = a(\varphi_1) = \frac{\sin 2\varphi_1}{\sqrt{\sin^2 2\varphi_1 + (p \cos 2\varphi_1 - q)^2}}, \quad b = b(\varphi_1) = \frac{p \cos 2\varphi_1 + q}{\sqrt{\sin^2 2\varphi_1 + (p \cos 2\varphi_1 - q)^2}}. \quad (A6)$$

Введем для удобства следующие функции:

$$f_1(\varphi_1) = f_1(a(\varphi_1)) = \frac{\arccos a}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad f_2(\varphi_1) = f_2(a(\varphi_1)) = -\frac{\arccos a}{2} + \frac{\pi}{4}. \quad (A7)$$

Уравнение (A4) имеет 24 различных решения, соответствующих разным промежуткам изменения параметров v и φ_1 . Ниже эти решения обозначены одиночными и двойными номерами. Каждое решение определяет область на рис. 4. Решения разбиты на четыре группы в соответствии с промежутками изменения параметра v :

$$\left[\begin{aligned} \varphi_2^{(1.1)} &= f_1(\varphi_1), & \varphi_2^{(2.1)} &= f_1(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_1 &\in [0, \Psi_v], \\ \varphi_2^{(1.2)} &= f_2(\varphi_1), & \varphi_2^{(2.2)} &= f_2(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_1 &\in \left[\Psi_v, \frac{\pi}{2}\right], \\ \varphi_2^{(3.1)} &= f_2(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_2^{(4.1)} &= f_2(\varphi_1) + \pi, & \varphi_1 &\in \left[\frac{\pi}{2}, \pi - \Psi_v\right], \\ \varphi_2^{(3.2)} &= -f_2(\varphi_1), & \varphi_2^{(4.2)} &= f_1(\varphi_1), & \varphi_1 &\in [\pi - \Psi_v, \pi], \end{aligned} \right. \quad 0 \leq v \leq n_2, \quad (A8)$$

$$\left[\begin{aligned} \varphi_2^{(5)} &= f_2(\varphi_1), & \varphi_2^{(6)} &= f_2(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_1 &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \varphi_2^{(7)} &= f_2(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_2^{(8)} &= f_2(\varphi_1) + \pi, & \varphi_1 &\in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \end{aligned} \right. \quad n_2 < v \leq n_1; \quad (A9)$$

$$\left[\begin{aligned} \varphi_2^{(9.1)} &= f_2(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_2^{(10.1)} &= f_2(\varphi_1) + \pi, & \varphi_1 &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \varphi_2^{(9.2)} &= f_2(\varphi_1), & \varphi_2^{(10.2)} &= f_2(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_1 &\in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \end{aligned} \right. \quad n_1 \leq v \leq \frac{n_1^2}{n_2}; \quad (A10)$$

$$\left[\begin{aligned} \varphi_2^{(11.1)} &= f_2(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_2^{(12.1)} &= f_2(\varphi_1) + \pi, & \varphi_1 &\in [0, \Psi_v], \\ \varphi_2^{(11.2)} &= -f_2(\varphi_1), & \varphi_2^{(12.2)} &= f_1(\varphi_1), & \varphi_1 &\in \left[\Psi_v, \frac{\pi}{2}\right], \\ \varphi_2^{(13.1)} &= f_1(\varphi_1), & \varphi_2^{(14.1)} &= f_1(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_1 &\in \left[\frac{\pi}{2}, \pi - \Psi_v\right], \\ \varphi_2^{(13.2)} &= f_2(\varphi_1), & \varphi_2^{(14.2)} &= f_2(\varphi_1) + \frac{\pi}{2}, & \varphi_1 &\in [\pi - \Psi_v, \pi] \end{aligned} \right. \quad \frac{n_1^2}{n_2} < v \leq +\infty. \quad (A11)$$

В уравнениях (A8) – (A11)

$$\Psi_v = \frac{1}{2} \arccos \frac{q(n_1^2 + v^2)}{p(n_1^2 - v^2)} \quad \text{при} \quad 0 \leq v < +\infty, \quad \Psi_v = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{q}{p}\right) \quad \text{при} \quad v = +\infty. \quad (\text{A12})$$

Приложение В. В этом приложении аналитически доказывается, что решения уравнений (4) и (5) заполняют одну и ту же область на плоскости φ_1, φ_2 . Для этого достаточно показать, что границы областей совпадают. Граница множества решений уравнения (4) состоит из восьми кривых. Эти кривые определяются по формулам (A2), (A3), где параметр u принимает значения 1 и -1 . Граница множества решений уравнения (5) состоит из 16 кривых. Эти кривые определяются по формулам (A5) – (A12) при $v = 0$ и $v = +\infty$. Очевидно, чтобы доказать, что две какие-либо кривые совпадают, нужно проверить, что их аналитические выражения совпадают. Для краткости докажем совпадение только двух линий. Остальные доказательства проводятся по аналогии. Рассмотрим кривую, задающую верхнюю границу области A_1 на рис. 3, и кривую, задающую верхнюю границу области 1.1 на рис. 4. Первая кривая соответствует $u = 1$ (т.е. $\cos \Phi = 1$) и задается четвертым выражением из (A2). Вторая кривая соответствует значению $v = 0$ (т.е. $N = 0$) и задается первым из выражений из (A8). Следовательно, нужно доказать равенство двух функций

$$h_1(\varphi_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\arccos c + \arccos a}{2}, \quad a = \frac{\cos 2\varphi_1}{\sqrt{\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 2\varphi_1}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 2\varphi_1}}, \quad \varphi_1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$h_2(\varphi_1) = \frac{1}{2} \arccos a + \frac{\pi}{4}, \quad a = \frac{\sin 2\varphi_1}{\sqrt{\sin^2 2\varphi_1 + (p \cos 2\varphi_1 - q)^2}}, \quad \varphi_1 \in [0; \Psi_0], \quad \Psi_0 = \frac{1}{2} \arccos \frac{q}{p}.$$

Сравним $\cos 2h_1(\varphi_1)$ и $\cos 2h_2(\varphi_1)$. Так как значения обеих функций h_1 и h_2 расположены в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$, то из равенства косинусов будет вытекать равенство самих функций. Выполнив простые тригонометрические преобразования, получим

$$\begin{aligned} \cos 2h_1 &= \cos(\pi - \arccos c - \arccos a) = -\cos(\arccos c + \arccos a) = \sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - c^2} - ac = \\ &= \sqrt{1 - \frac{\cos^2 2\varphi_1}{\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 2\varphi_1}} \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 2\varphi_1}} - \frac{\cos 2\varphi_1}{\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 2\varphi_1} = \\ &= \frac{pq \sin^2 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_1}{\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 2\varphi_1}, \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

$$\begin{aligned} \cos 2h_2 &= \cos\left(\arccos a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\arccos a) = -\sqrt{1 - a^2} = -\sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\varphi_1}{\sin^2 2\varphi_1 + (p \cos 2\varphi_1 - q)^2}} = \\ &= -\frac{|p \cos 2\varphi_1 - q|}{\sqrt{\sin^2 2\varphi_1 + (p \cos 2\varphi_1 - q)^2}} = \frac{q - p \cos 2\varphi_1}{\sqrt{\sin^2 2\varphi_1 + (p \cos 2\varphi_1 - q)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Заметим, что подмодульное выражение в (B2) раскрывается со знаком “+”, так как из (A8) и (A12) следует, что $0 \leq \varphi_1 \leq \Psi_0 = \frac{1}{2} \arccos \frac{q}{p}$.

Покажем, что правые части выражений (B1) и (B2) совпадают. Числитель и знаменатель выражения в правой части (B1) можно записать в виде

$$pq \sin^2 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_1 = pq(1 - \cos^2 2\varphi_1) - \cos 2\varphi_1 = (p + q \cos 2\varphi_1)(p - q \cos 2\varphi_1), \quad (\text{B3})$$

$$\cos^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 2\varphi_1 = 1 - \sin^2 2\varphi_1 + p^2 \sin^2 2\varphi_1 = 1 + (p^2 - 1) \sin^2 2\varphi_1 = 1 + q^2 \sin^2 2\varphi_1. \quad (\text{B4})$$

Подкоренное выражение в знаменателе (B2) записывается в форме

$$\begin{aligned} \sin^2 2\varphi_1 + (p \cos 2\varphi_1 - q)^2 &= (1 + q^2) + (p^2 - 1) \cos^2 2\varphi_1 - 2pq \cos 2\varphi_1 = \\ &= p^2 + q^2 \cos^2 2\varphi_1 - 2pq \cos 2\varphi_1 = (p - q \cos 2\varphi_1)^2. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Тогда знаменатель правой части (B2) преобразуется к виду

$$\sqrt{\sin^2 2\varphi_1 + (p \cos 2\varphi_1 - q)^2} = |p - q \cos 2\varphi_1| = p - q \cos 2\varphi_1. \quad (\text{B6})$$

Последний переход справедлив, так как $p \geq q \geq q \cos 2\varphi_1$. Подставим теперь выражения (B3) – (B6) в (B1) и в (B2) и, сделав элементарные преобразования, получим, что $\cos 2h_1 = \cos 2h_2$, что и требовалось доказать.

Приложение С. Формулы, задающие аналитические выражения для криволинейных участков границ достижимого множества в (8) и (9), могут быть получены следующим образом. Пусть криволинейные участки границ состоят из точек $(\widetilde{\Phi}_i, \widetilde{N}_i)$. Представим себе, что проведена прямая $\widetilde{N}_i$ (рис. 5). Тогда $\widetilde{\Phi}_i$ представляет собой минимально (максимально) возможное значение Φ при фиксированном $N = \widetilde{N}_i$. Таким образом, нужно найти экстремумы функции

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \arccos(\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 - p \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2) \quad (C1)$$

при ограничении $\widetilde{N}_i = v$:

$$n_1 \frac{\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 - q \sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 + p \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 + q \sin 2\varphi_2} = v^2. \quad (C2)$$

Проверим, что пары (φ_1, φ_2) , где $\varphi_1 = \Psi_v$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$, являются искомыми. Возьмем какое-либо решение уравнения (C2), например решение $\varphi_2^{(1.1)}(\varphi_1)$, $\varphi_1 \in [0; \Psi_v]$ из (A8). Когда параметр v пробегает отрезок $[0; n_2]$, образы кривых $\varphi_2^{(1.1)}$ заполняют область I на достижимом множестве (рис. 5). Подставив это решение в (C1), получим зависимость Φ от одной переменной φ_1 :

$$\Phi = \arccos \left(\frac{q(n_1^2 + v^2) \cos 2\varphi_1 - (n_1^2 - v^2)p}{\sqrt{\sin^2 2\varphi_1 (n_1^2 - v^2)^2 + (p \cos 2\varphi_1 (n_1^2 - v^2) - q(n_1^2 + v^2))^2}} \right). \quad (C3)$$

Таким образом, задача на условный экстремум (C1), (C2) сводится к задаче нахождения экстремума функции одной переменной (C3) на отрезке $\varphi_1 \in [0; \Psi_v]$. Нетрудно показать, что функция (C3) монотонно убывает на отрезке $[0; \Psi_v]$, а ее производная в точке Ψ_v обращается в нуль; следовательно в точке $\varphi_1 = \Psi_v$ функция (C3) имеет минимум. Здесь мы опускаем выкладки, так как они являются довольно громоздкими. Подставим теперь $\varphi_1 = \Psi_v$ в выражение для $\varphi_2^{(1.1)}$ и получим, что $\varphi_2 = \pi/4$.

Чтобы теперь вычислить аналитические выражения для нижней границы области I достижимого множества, подставим $\varphi_2 = \pi/4$ в соотношения (2), (3) и получим выражения

$$\cos \Phi = -p \sin 2\varphi_1, \quad N = n_1 \sqrt{\frac{p \cos 2\varphi_1 - q}{p \cos 2\varphi_2 + q}}. \quad (C4)$$

Исключая из системы (C4) параметр φ_1 , приходим к выражению (9) для нижней границы области I. Аналитические выражения для других криволинейных участков границ достижимого множества могут быть получены по аналогии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kaiser N., Pulker H.K. Optical Interference Coatings. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
2. Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K., DeBell G. Application of the needle optimization technique to the design of optical coatings // Appl. Opt. 1996. **35**. 5493–5508.
3. Sullivan B.T. and Dobrowolski J.A. Implementation of a numerical needle method for thin-film design // Appl. Opt. 1996. **35**. 5484–5492.
4. Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K., Amotchkina T.V., Kokarev M.A. Key role of the coating total optical thickness in solving design problems // SPIE Proceedings 2003. **5250**. 312–321.
5. Epstein L.I. The design of optical filters // J. Opt. Soc. Am. 1952. **42**. 806–810.
6. Thelen A. Equivalent layers in multilayer filters // J. Opt. Soc. Am. 1966. **56**. 1533–1538.
7. Ohmer M.C. Design of three-layer equivalent films // J. Opt. Soc. Am. 1978. **68**. 137–139.
8. Macleod H.A. Thin film optical filters. New York: McGraw-Hill, 1986.
9. Thelen A. Design of optical interference coatings. New York: McGraw-Hill, 1988.
10. Herpin A. Calcul du pouvoir reflecteur d'un systeme stratifie quelconque // C. R. Acad. Sci. 1947. **225**. 182–183.
11. Abeles F. Recherches sur la propagation des ondes electromagnetique sinusoidales dans les milieux stratifies // Ann. de Physique. 1950. **5**. 596–640.
12. Laan C.J., Frankena H.J. Equivalent layers: another way to look at them // Appl. Opt. 1995. **34**. 681–687.
13. Тихонравов А.В. О принципиально достижимой точности решения задач синтеза // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1982. **22**, № 6. 1421–1433.

14. *Furman S., Tikhonravov A.V.* Basics of optics of multilayer systems. Gif-sur-Yvette: Edition Frontieres, 1992.
15. *Baumeister P.* Design of multilayer filters by successive approximations // J. Opt. Soc. Am. 1958. **48**. 955–958.
16. *Himmelblau D.M.* Applied nonlinear programming. New York: McGraw-Hill, 1972.
17. *Tilsch M., Hulse C.A., Hendrix K.D., Sargent R.B.* Design and demonstration of a thin-film based gain equalization filter for C-band EDFAs // Proceedings of the National Fiber Optics Engineering Conference (NFOED) / D. Thorp, J. Petitt, D. Klemisch, F. Kapron, and J. Varachi, Eds. Chicago, 1999. **11**. 390–395.
18. *Thelen A., Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K., Tilsch M., Brauneck U.* Topical meeting on optical interference coatings (OIC '2001): design contest results // Appl. Opt. 2002. **41**. 3022–3038.
19. *Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K.* OptiLayer thin film software // <http://www.optilayer.com>

Поступила в редакцию
20.06.2005
