

УДК 517.958:519.633.6

О ПРИБЛИЖЕННЫХ УСЛОВИЯХ НА ОТКРЫТОЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

А. Р. Майков¹

При численном моделировании нестационарных процессов в пространственно-неограниченных областях в ряде случаев удается свести исходную задачу к задаче в ограниченной подобласти, поставив некоторые условия на так называемой открытой границе, которая отделяет подобласть от остальной части области. Это позволяет существенно снизить требования к ресурсам вычислительной системы. Один из перспективных подходов к построению таких условий основан на аппроксимации ядер операторов свертки по времени в точных соотношениях, связывающих решение исходной задачи и его производные на открытой границе. С обоснованием корректности получаемых в результате приближенных условий, а также с выбором численных методов и оптимальных параметров для их реализации связан ряд вопросов, требующих аналитического исследования. Эти вопросы рассматриваются в статье на примере модельной задачи.

Ключевые слова: волновое уравнение, уравнение Клейна–Гордона, условия на открытой границе, условия излучения, условия полной прозрачности, искусственные граничные условия.

1. Начально-краевые задачи в неограниченных областях и условия на открытой границе.

Необходимость применения численных методов для решения уравнений и систем уравнений эволюционного типа в неограниченных областях пространства $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) возникает при моделировании физических процессов различной природы. Сеточные методы позволяют использовать при численных расчетах достаточно общие физические модели, не прибегая к не всегда оправданным предположениям о механизмах моделируемых процессов. Однако неограниченность пространственной области (будем называть ее Ω) делает, как правило, невозможной непосредственную реализацию сеточных методов на сетках, покрывающих всю Ω . В тех случаях, когда скорость распространения возмущений в системе конечна, а начальные возмущения и источники локальны, можно, в принципе, использовать сетки с переменным числом ячеек, расширяющиеся вместе с фронтом волны, но требования к ресурсам вычислительной системы при этом нередко оказываются неприемлемо высокими. Во многих случаях, однако, оказывается возможным свести исходную задачу к вспомогательной задаче в некоторой фиксированной ограниченной подобласти $\Omega_0 \in \Omega$, поставив на $S_{\text{open}} = \partial\Omega_0 \setminus \partial\Omega$ те или иные граничные условия. Эту “нефизическую” часть границы Ω_0 называют обычно *фиктивной*, или *открытой*, или *искусственной* границей, а соответствующие условия — *условиями на открытой границе*, или *условиями излучения*, или *безотражательными*, а также *условиями полной прозрачности* либо *искусственными граничными условиями*. Подчеркнем, что при таком подходе решение исходной задачи, поставленной в Ω , может быть отлично от нуля в $\Omega_1 := \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$.

Вопросы постановки условий на открытой границе и построения алгоритмов их численной реализации рассматривались для уравнений и систем уравнений гиперболического типа и для уравнений параболического типа — см. обзоры [20, 21, 25], а также [5, 12, 2, 9, 16]. Значительная часть такого рода исследований относится к случаям, когда в Ω_1 система описывается уравнением вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + \gamma^2 U = 0 \quad (\gamma \geq 0), \quad (1)$$

которое служит линейной моделью для нестационарных волновых процессов в средах различной физической природы с дисперсией ($\gamma > 0$ — уравнение Клейна–Гордона) или без дисперсии ($\gamma = 0$ — волновое уравнение) [19, 18, 11, 2, 15, 25, 24].

Точные условия на открытой границе являются, как правило, нелокальными как по пространственным переменным, так и по времени. По этой причине их непосредственная реализация в численных расчетах приводит к тем же проблемам, что и использование сеток, расширяющихся вместе с фронтом волны (подробнее об этом см. в п. 1.2). На практике вместо точных условий чаще используются те или иные

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Воробьевы горы, 119992, г. Москва; e-mail: a_maikov@phys.msu.ru

приближенные. Известен целый ряд вариантов приближенных условий на открытой границе. Настоящая работа посвящена одному из подходов к построению таких условий. Следуя [24, 21, 23], поясним вкратце его идею.

1.1. Пусть $T \in (0, \infty]$ и $U(\mathbf{x}, t)$ — решение (возможно, слабое) некоторой начально-краевой задачи в $\Omega \times (0, T)$, которую в дальнейшем будем называть задачей I, причем известно, что $U(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет в $\Omega_1 \times (0, T)$ уравнению (1), начальным условиям

$$U(\mathbf{x}, 0)|_{\mathbf{x} \in \Omega_1} = \frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)|_{\mathbf{x} \in \Omega_1} \equiv 0 \quad (2)$$

и линейным однородным граничным условиям с постоянными коэффициентами на $\partial\Omega_1 \setminus S_{\text{откр}}$. Вид уравнений, описывающих $U(\mathbf{x}, t)$ в Ω_0 , уточнять пока не будем, поскольку он существен для обоснования, но не для самой постановки условий на открытой границе.

Предположим, что $\partial\Omega_1$ представляет собой координатную поверхность в одной из систем координат — прямоугольной декартовой (x^1, x^2, x^3) , цилиндрической (ρ, φ, z) или сферической (r, θ, φ) , и что уравнение (1) может быть сведено в Ω_1 методом разделения переменных к последовательности уравнений вида²

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \left(\gamma_j^2 + \frac{\mu_j^2 - 1/4}{x^2} \right) u_j = 0 \quad (x > x_1, \quad t \in (0, T); \quad \gamma_j, \mu_j \geq 0), \quad (3)$$

где $x = x^1$, $x = \rho$ или $x = r$ — “продольная” координата в Ω_1 , $u_j(x, t)$ — коэффициенты разложения соответственно U , $\sqrt{\rho}U$ или rU по подходящей системе собственных функций, связанной в каждом случае с операторами дифференцирования по остальным, “поперечным” координатам. Открытой границе при этом соответствует значение $x = x_1$. Из (2) следует, что

$$u_j(x, 0) = \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (x > x_1). \quad (4)$$

1.2. Пусть $\gamma, \mu \geq 0$ и $x > 0$. Можно показать (см. также п. 2.2), что при условии достаточной гладкости решения (3), (4) и их производные связаны следующими соотношениями:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial u_j}{\partial x}(x_1, t) + \int_0^t \mathcal{K}(t - \tau; x_1, \gamma_j, \mu_j) u_j(x_1, \tau) d\tau = 0, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{K}(t; x_1, \gamma, \mu) := (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \mathfrak{K}(s; x_1, \gamma, \mu) ds \quad (6)$$

и $\mathfrak{K}(s; x, \gamma, \mu)$ — аналитическая при $\text{Im } s > 0$ и непрерывная при $\text{Im } s \geq 0$ функция, заданная при $s > \gamma$ равенством

$$(2\pi)^{1/2} \mathfrak{K}(s; x_1, \gamma, \mu) := \sqrt{s^2 - \gamma^2} \frac{H_{\mu+1}^{(1)}(\sqrt{s^2 - \gamma^2} x)}{H_{\mu}^{(1)}(\sqrt{s^2 - \gamma^2} x)} + i s - \frac{\mu + 1/2}{x},$$

в котором для всех входящих в него многозначных функций берутся значения их главных ветвей. Отметим сразу, что

$$\mathfrak{K}(-s; x_1, \gamma, \mu) = \overline{\mathfrak{K}(s; x_1, \gamma, \mu)} \quad (7)$$

для всех действительных s . Соотношения (5), (6) можно использовать в качестве точных условий на открытой границе при постановке начально-краевой задачи в Ω_0 , дополнив ими исходные условия на “физической” части $\partial\Omega_0$ — поверхности $\partial\Omega_0 \setminus S_{\text{откр}}$. Нелокальный характер условий (5), (6) выражается в том, что в них входят значения решения $U(\mathbf{x}, t)$ и его производных в различных точках открытой границы

²Если $d = 3$ и U удовлетворяет на $\partial\Omega_1 \setminus S_{\text{откр}}$ однородным условиям I, II или III рода, то примерами областей, для которых возможен переход от (1) к (3), служат в прямоугольных декартовых координатах полубесконечный регулярный волновод произвольного сечения, а в цилиндрических и сферических — полубесконечные рупоры; такой областью является и внешность шара $r > r_0$, а также полупространство $x^1 > 0$, если U удовлетворяет в этом полупространстве условиям периодичности по x^2 и по x^3 . Если $d = 2$, то примерами могут служить плоские аналоги перечисленных областей.

и в различные моменты времени $\tau \in [0, t]$. При реализации алгоритмов, основанных на непосредственной дискретизации интеграла свертки в (5), потребовалось бы хранить информацию о решении и его производных на открытой границе на всех предшествующих слоях временной сетки.

Более экономичными оказываются алгоритмы, основанные на аппроксимации ядер $\mathcal{K}^{(j)}(t; x_1, \gamma, \mu)$ функциями вида

$$\tilde{\mathcal{K}}^{(j)}(t; x_1, \gamma, \mu) = \sum_{n=1}^{N^{(j)}} c_n^{(j)}(x_1, \gamma, \mu) e^{-\sigma_n^{(j)}(x_1, \gamma, \mu)t}, \quad (8)$$

где $c_n^{(j)}(x_1, \gamma, \mu)$ и $\sigma_n^{(j)}(x_1, \gamma, \mu)$ — комплексные константы. Рассмотрим в Ω_0 начально-краевую задачу для тех же уравнений и с теми же граничными условиями на $\partial\Omega_0 \setminus S_{\text{open}}$, что и в задаче I, но с приближенными условиями на S_{open} , получающимися из точных заменой $\mathcal{K}^{(j)}$ на $\tilde{\mathcal{K}}^{(j)}$. Будем называть эту новую задачу задачей II и использовать для ее решений обозначения $\tilde{V}$ и $\tilde{v}_j$ вместо U и u_j .

Зададим вспомогательные функции $I_n^{(j)}(t)$ следующим образом: $I_n^{(j)}(t) := c_n^{(j)} \int_0^t e^{-\sigma_n^{(j)}(t-\tau)} \tilde{v}_j(x_1, \tau) d\tau$,

$n = 1, \dots, N^{(j)}$. Тогда, как нетрудно видеть, приближенные условия

$$\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x}(x_1, t) + \int_0^t \tilde{\mathcal{K}}^{(j)}(t-\tau) \tilde{v}_j(x_1, \tau) d\tau = 0 \quad (9)$$

эквивалентны следующим равенствам:

$$\frac{dI_n^{(j)}}{dt} + \sigma_n^{(j)} I_n^{(j)} = c_n^{(j)} \tilde{v}_j(x_1, t), \quad (10)$$

$$I_n^{(j)}(0) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x}(x_1, t) + \sum_{n=1}^{N^{(j)}} I_n^{(j)}(t) = 0. \quad (12)$$

Это делает возможным при численном решении задачи II хранить информацию о значениях $I_n^{(j)}(t)$ только на ближайшем предшествующем слое (или нескольких ближайших слоях) временной сетки вместо того, чтобы хранить значения $u_j(x_1, t)$ на всех слоях, начиная с $t = 0$.

Замечание 1. Условия вида (5), (6), (9) или (10)–(12) могут быть построены не только для самого уравнения (1), но и для моделей, получаемых из него при дискретизации задачи I по пространственным переменным (см., например, [9, 24]).

Замечание 2. Помимо использования (10)–(12) известны также и другие способы “локализации” условий на открытой границе с приближенными ядрами (8) [21]. Подобную “локализацию” можно также осуществить, используя при аппроксимации ядра $\mathcal{K}$ системы функций иного, отличного от $\{e^{-\sigma_n t}\}_{n=1}^N$ вида [24, 23, 21].

1.3. При обосновании корректности приближенных условий вида (9) и построении алгоритмов их численной реализации возникает ряд вопросов, которые применительно к подобным граничным условиям не решались ранее ни в рамках общей теории начально-краевых задач, ни при исследовании более частных задач, связанных с различными физическими моделями. Сформулируем здесь два из них.

1. Следует ли из существования и единственности решения $U(\mathbf{x}, t)$ задачи I, обладающего некоторой гладкостью, существование и единственность решения $\tilde{V}(\mathbf{x}, t)$ задачи II с той же (и если иной, то какой именно) гладкостью?

2. По отношению к норме какого пространства B_{bound} функций, заданных на $(0, T)$, должна строиться аппроксимация ядра $\mathcal{K}$, чтобы из $\|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{B_{\text{bound}}} \rightarrow 0$ следовала сходимость $\tilde{V}$ к U в норме того или иного пространства B функций на $\Omega \times (0, T)$? Отметим сразу, что оценки, связывающие различные нормы свертки вида $(\tilde{\mathcal{K}}(t; x_1, \gamma, \mu) - \mathcal{K}(t; x_1, \gamma, \mu))u(x_1, t)$ с нормами $\tilde{\mathcal{K}}(t; x_1, \gamma, \mu) - \mathcal{K}(t; x_1, \gamma, \mu)$ (см., например, [21]), важны для понимания проблемы, но не могут дать ее исчерпывающего решения, так как равенства (5) и (9) не являются самостоятельными уравнениями, но каждое из них входит в начально-краевую задачу в качестве граничного условия.

От ответа на первый вопрос зависит выбор методов для численного решения уравнений задачи II. Ответ на второй вопрос принципиален для выбора значений коэффициентов $c_n^{(j)}$ и $\sigma_n^{(j)}$ в (8).

Перечисленные вопросы рассматривались в [23] применительно к начально-краевой задаче, поставленной на полупрямой $\Omega \equiv (x_0, \infty)$ для уравнения

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q(x)u = f(x, t), \quad (13)$$

где $Q(x) = \gamma^2 + q(x)$ и

$$\rho(x)|_{x>x_1} = k(x)|_{x>x_1} \equiv 1, \quad q(x)|_{x>x_1} \equiv 0 \quad (14)$$

(роль открытой границы при этом играет точка $x = x_1$). Цель данной работы состоит в том, чтобы обобщить результаты [23], распространив их на случай, когда функция $Q(x)$ в (13) имеет вид

$$Q(x) = \gamma^2 + \frac{\mu^2 - 1/4}{x^2} + q(x). \quad (15)$$

Задача I может сводиться в Ω к последовательности начально-краевых задач для уравнения (13) (подобно тому, как (1) сводится к уравнениям (3)) в тех случаях, когда вся область Ω имеет координатную границу того же типа, что и Ω_1 , а функция U описывается в Ω_0 уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \text{grad} (k \text{ div } U) + (\gamma^2 + q)U = F$$

с коэффициентами ρ , k и q , зависящими только от “продольной” координаты x (см. п. 1.1). Таким образом, начально-краевые задачи для (13)–(15) можно рассматривать как простейшие модельные задачи, исследование которых важно для лучшего понимания общих проблем корректности условий на открытой границе и выбора пространства B_{bound} при аппроксимации ядер $\mathcal{K}^{(j)}$.

2. Постановка модельной начально-краевой задачи. Точные и приближенные условия на открытой границе. Пусть V — некоторая область в $\mathbb{R}^d$, $1 \leq p \leq \infty$ и $m \in \mathbb{N}$. Через $W_p^m(V)$ будем обозначать пространство Соболева, состоящее из всех измеримых функций в V , которые вместе со своими частными производными до порядка m включительно принадлежат $L^p(V)$. Под $W_p^0(V)$ будем понимать само пространство $L^p(V)$. При этом $\|y\|_{W_p^m(V)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha y\|_{L^p(V)}$. Существенную точную верхнюю (нижнюю) грань измеримой функции y с областью определения M условимся обозначать через $\sup_M y$ (соответственно $\inf_M y$).

Через $\mathcal{F}[\cdot]$ будем обозначать как преобразование Фурье, осуществляющее изометрию $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, так и соответствующее преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Для обратных преобразований будем использовать обозначение $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$. Отметим сразу одно из свойств преобразования Фурье, которое будет использоваться в дальнейшем для получения ряда оценок.

Лемма 2.1. *Отображение $\varphi(s) \mapsto \mathcal{F}[\varphi(s)]$ представляет собой ограниченный оператор, действующий из $W_2^1(\mathbb{R})$ в $L^1(\mathbb{R})$.*

2.1. Пусть заданы константы $\gamma \geq 0$, $\mu \geq 0$, $x_0 > 0$, $x_1 \in (x_0, \infty)$, $\alpha_0 \in [0, \pi)$, $T \in (0, \infty)$, а также функции

$$\rho(x), q(x) \in L^\infty(x_0, \infty) \quad \text{и} \quad k(x) \in W_\infty^1(x_0, \infty), \quad (16)$$

удовлетворяющие условиям (14) и неравенствам

$$\inf_{x \in (x_0, x_1)} k(x) > 0, \quad \inf_{x \in (x_0, x_1)} \rho(x) > 0. \quad (17)$$

Положим

$$L_x \eta := \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \left(\gamma^2 + \frac{\mu^2 - 1/4}{x^2} + q(x) \right) \eta, \quad (18)$$

$$L \eta := \rho(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - L_x \eta, \quad (18)$$

$$l[\eta] := -\frac{\partial \eta}{\partial x} \sin \alpha_0 + \eta \cos \alpha_0. \quad (19)$$

Рассмотрим в $(x_0, \infty) \times (0, T)$ начально-краевую задачу вида

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad (21)$$

$$l[u](x_0, t) = g(t), \quad (22)$$

где

$$f(x, t) \in L^\infty((x_0, \infty) \times (0, T)), \quad g(t) \in C([0, T]), \quad u_0(x) \in C^1([x_0, \infty)), \quad u_1(x) \in C([x_0, \infty)) \quad (23)$$

являются заданными функциями, причем

$$f(x, t)|_{x \geq x_1} = u_0(x)|_{x \geq x_1} = u_1(x)|_{x \geq x_1} = 0. \quad (24)$$

Как известно, решение этой задачи в $W_\infty^m((x_0, \infty) \times (0, T))$ при $m \geq 2$ единственно [7]. Известны также достаточные условия существования таких решений (см. например, [7, 8]). Подчеркнем, однако, что результаты данного раздела не основываются на выполнении каких бы то ни было условий, кроме (16), (17) и самого существования решения $u(x, t) \in W_\infty^m((x_0, \infty) \times (0, T))$.

2.2. Пусть функции $\mathfrak{K}(s; x_1, \gamma, \mu)$ и $\mathcal{K}(t; x_1, \gamma, \mu)$ определены так же, как в п. 1.2; условимся использовать для этих функций обозначения $\mathfrak{K}(s)$ и $\mathcal{K}(t)$ там, где это не вызывает недоразумений. В силу свойств функции Ханкеля [3] $\mathfrak{K}(s)$ непрерывна как функция действительной переменной s при фиксированных x_1, γ, μ и $\mathfrak{K}(s) = O(s^{-1})$ при $s \rightarrow \pm\infty$. Тем самым, $\mathfrak{K}(s) \in L^2(\mathbb{R})$, и функция $\mathcal{K}(t) := \mathcal{F}[\mathfrak{K}(s)]$ принадлежит $L^2(0, \infty)$. Но тогда $\mathcal{K}(t) \in L^1(0, T)$ для любого конечного $T > 0$. Отсюда и из известной теоремы вложения для соболевских пространств видно, что равенство

$$\lambda[u](x_1, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) + \int_0^t \mathcal{K}(t - \tau; x_1, \gamma, \mu) u(x_1, \tau) d\tau \quad (25)$$

при любом $T \in (0, \infty)$ задает ограниченный оператор, действующий из $W_\infty^2((x_0, x_1) \times (0, T))$, а следовательно, и из $W_\infty^m((x_0, x_1) \times (0, T))$ в $C([0, T])$ при любом $m \geq 2$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.2. Если ρ , k и q удовлетворяют условиям (14), f , g , u_0 и u_1 — условиям (23), (24) и функция $u(x, t) \in W_\infty^m((x_0, \infty) \times (0, T))$ является решением (20)–(22), то для всех $t \in (0, T)$ выполнено равенство $\lambda[u](x_1, t) = 0$.

Теорема 2.3. Если выполнены условия (16), (17), а также условия теоремы 2.2, то решение задачи

$$\begin{aligned} Lv(x, t) &= f(x, t), \\ v(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \\ l[v](x_0, t) &= g(t), \\ \lambda[v](x_1, t) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

с теми же f , g , u_0 , u_1 существует и единственно в $W_\infty^m((x_0, x_1) \times (0, T))$, причем $u(x, t) = v(x, t)$ при $x \in [x_0, x_1] \times [0, T]$.

Не приводя здесь доказательств, ограничимся лишь замечаниями о способах, которыми могут быть доказаны теоремы 2.2 и 2.3. При доказательстве первой автор использовал для $u(x, t)$ основанное на формуле Вебера [13] интегральное преобразование по переменной x (аналогично тому, как в [10] в частном случае $\mu = 1/2$ использовалось преобразование Фурье), а при доказательстве второй — закон изменения энергии для уравнения, которому удовлетворяет функция $v_I := x^{-1/2}v$. Неположительность

потока $\int_0^T \frac{\partial v_I}{\partial x}(x_1, t) \frac{\partial v_I}{\partial t}(x_1, t) dt$ доказывается исходя из (26) с помощью теоремы Бохнера–Шварца. Поток $\left(- \int_0^T \frac{\partial v_I}{\partial x}(x_0, t) \frac{\partial v_I}{\partial t}(x_0, t) dt \right)$ неположителен при $\alpha_0 \in [0, \pi/2]$, но может быть положительным при

$\alpha_0 \in (\pi/2, \pi)$, однако в последнем случае для его вклада в баланс энергии имеют место оценки, сходные с использованными в § 5 гл. IV монографии [7]. Это позволяет установить единственность v , после чего остальные части утверждения теоремы 2.3 оказываются очевидными следствиями теоремы 2.2. Отметим также, что обоснование корректности использования (25), (26) в качестве точных условий на открытой границе было проведено иными способами на различном уровне строгости для многих частных случаев задачи (20)–(22) (см., например, обзорную статью [25], а также [15], [24] и [23]).

Перейдем к постановке задачи с приближенными условиями на открытой границе, которые получаются из точных условий (26) заменой $\mathcal{K}(t; x_1, \gamma, \nu)$ на некоторое приближенное ядро $\tilde{\mathcal{K}}(t) \in L^1(0, T)$. Подчеркнем, что все результаты, приводимые в данной работе, имеют место для любых функций $\tilde{\mathcal{K}}(t)$ из $L^1(0, T)$, хотя наибольший практический интерес представляет случай приближенных ядер вида (8) или несколько более общего вида, рассмотренного в [23].

Положим $X := (x_0, x_1)$ и

$$\tilde{\lambda}[u](x_1, t) := \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) + \int_0^t \tilde{\mathcal{K}}(t - \tau)u(x_1, \tau) d\tau. \quad (27)$$

Равенство (27), как и (25), задает при целом $m \geq 2$ и любом конечном положительном T ограниченный оператор $W_\infty^m(X \times (0, T)) \rightarrow C([0, T])$. Задача с приближенными условиями на открытой границе имеет следующий вид:

$$L\tilde{v}(x, t) = f(x, t), \quad (28)$$

$$\tilde{v}(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad (29)$$

$$l[\tilde{v}](x_0, t) = g(t), \quad (30)$$

$$\tilde{\lambda}[\tilde{v}](x_1, t) = 0. \quad (31)$$

Здесь f, u_0, u_1, g те же, что в (20)–(22).

2.3. Положим

$$B^m(T) := \left\{ w(x, t) : w \in W_\infty^m(X \times (0, T)), \quad \frac{\partial^j w}{\partial t^j}(x, 0) = 0 \quad (j = 0, \dots, m-1) \quad l[w](x_0, t) = 0, \right\},$$

$$B_{\text{bound}}^m(T) := \left\{ h(t) : h \in W_\infty^m(0, T), \quad \frac{d^j h}{dt^j}(x, 0) = 0 \quad (j = 0, \dots, m-1) \right\}.$$

Пространства $B_{\text{bound}}^m(T)$ и $B^m(T)$ представляют собой замкнутые подпространства пространств $W_\infty^m(0, T)$ и $W_\infty^m(X \times (0, T))$ соответственно и поэтому являются банаховыми пространствами. Кроме того, оператор A_{imp} взятия следа функции $\varphi(x, t) \mapsto \varphi(x_1, t)$, действующий из $W_\infty^m(X \times (0, T))$ в $W_\infty^{m-1}(0, T)$, компактен и $\|A_{\text{imp}}\| = 1$ для всех $T \in (0, \infty)$. При этом A_{imp} переводит $B^m(T)$ в $B_{\text{bound}}^{m-1}(T)$. Заметим также, что для любого решения $u \in W_\infty^m(X \times (0, T))$ задачи (20)–(22) из (24) следует $u(x_1, t) \in B_{\text{bound}}^{m-1}(T)$.

Пусть $\mathcal{R} \in L^1(0, T)$ и $R\eta(t) := \int_0^t \mathcal{R}(t - \tau)\eta(\tau) d\tau$. Нетрудно видеть, что это равенство задает в $B_{\text{bound}}^m(T)$ ограниченный оператор, причем $\|R\| = \|\mathcal{R}\|_{L^1(0, T)}$ для всех $m \geq 0$ и $T \in (0, \infty)$.

2.4. Положим $\tilde{\varkappa}\eta(t) := \int_0^t [\tilde{\mathcal{K}}(t - \tau) - \mathcal{K}(t - \tau)]\eta(\tau) d\tau$, где $\mathcal{K}$ и $\tilde{\mathcal{K}}$ — ядра интегральных операторов

точного (25) и приближенного (27) условий на открытой границе. Так как $\mathcal{K}, \tilde{\mathcal{K}} \in L^1(0, T)$ (см. п. 2.2), то $\tilde{\varkappa}$ представляет собой частный случай оператора, рассмотренного в предыдущем пункте.

Из теоремы 2.3 следует такое утверждение:

Лемма 2.4. Пусть $u \in W_\infty^m(X \times (0, T))$ — решение (20)–(22). Функция $\tilde{v} \in W_\infty^m(X \times (0, T))$ является решением задачи (28)–(31) в том и только том случае, если $w \equiv \tilde{v} - u$ принадлежит $B^m(T)$ и удовлетворяет равенствам

$$Lw = 0, \quad (32)$$

$$\lambda[w](x_1, t) = -\tilde{\varkappa}w(x_1, t) - \tilde{\varkappa}u(x_1, t). \quad (33)$$

При исследовании задачи (32), (33) потребуется установить ряд свойств функции $\mathfrak{K}$, а также рассмотреть вспомогательную задачу с неоднородными точными условиями на открытой границе

$$Lw = 0, \quad (34)$$

$$\lambda[w](x_1, t) = h(t), \quad (35)$$

где $h(t) \in B_{\text{bound}}^{m-1}(T)$ — некоторая заданная функция. Этому посвящены следующие два раздела статьи. Кроме того, в разделе 3 будет установлена существенная для выбора приближенного ядра $\tilde{\mathcal{K}}(t)$ суммируемость $\mathcal{K}(t)$ на полупрямой $t > 0$.

3. Оценки $\mathfrak{K}(s)$ и суммируемость $\mathcal{K}(t)$. Всюду в данном разделе предполагается, что константы в оценках могут, вообще говоря, зависеть от параметров $x_0, x_1 > 0, \alpha_0, \gamma \geq 0$ и $\mu \geq 0$.

3.1. Следующие две леммы сформулируем, не приводя их доказательств. Отметим лишь, что эти утверждения следуют из хорошо известных аналитических и асимптотических свойств функций Ханкеля (см., например, [3]) и $\sqrt{s^2 - \gamma^2}$, а также (это относится к лемме 3.1) из того, что $H_\mu^{(1)}(z) \neq 0$ при $\text{Im } z \geq 0$.

Лемма 3.1. В полуплоскости $\text{Im } s \geq 0$ функция $\mathfrak{K}(s)$ является непрерывной, аналитической при $s \neq \pm\gamma$, причем для $n = 0, 1, \dots$ имеет место оценка вида $\frac{\partial^n}{\partial s^n} \mathfrak{K}(s) = O\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right)$, равномерная относительно $\arg s \in [0, \pi]$.

Лемма 3.2. Существует такое $\delta_0 > 0$, что функция $\mathfrak{K}(s)$ разлагается при $0 < |s - \gamma| \leq \delta_0$ в ряды следующего вида:

$$\mathfrak{K}(s) = \sum_{r=0}^{[\mu]} b_r (s - \gamma)^r + \sum_{r=0}^{\infty} d_r (s - \gamma)^{\beta_r}, \quad 0 < \mu \notin \mathbb{N}, \quad (36)$$

$$\mathfrak{K}(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^r g_{rm} (s - \gamma)^r \ln^m (s - \gamma), \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (37)$$

$$\mathfrak{K}(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h_{rm} (s - \gamma)^r \frac{1}{\ln^m (s - \gamma)}, \quad \mu = 0. \quad (38)$$

Здесь $[\mu]$ означает целую часть μ ; $\beta_r, b_r, d_r, g_{rm}, h_{rm}$ — константы. При этом $d_0 \neq 0, \beta_r$ — монотонно возрастающая неограниченная последовательность, $\beta_0|_{\gamma>0} = \mu, \beta_0|_{\gamma=0} = 2\mu$. Ряды можно дифференцировать почленно в области сходимости при $s \neq \gamma$ любое число раз. Как сами ряды (36)–(38), так и ряды, получаемые из почленным дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно на любом отрезке вида $0 < \delta \leq |s - \gamma| \leq \delta_0$ и, кроме того, являются асимптотическими для соответствующих функций при $s \rightarrow \gamma$.

3.2. Леммы 3.1 и 2.1 приводят к следующему утверждению:

Теорема 3.3. Для любых $x_1 > 0, \gamma \geq 0$ и $\mu \geq 0$ функция $\mathcal{K}(t) = \mathcal{F}[\mathfrak{K}(s)]$ суммируема на полупрямой $t > 0$.

В самом деле, пусть $\gamma > 0, \delta_0$ — то же, что и в утверждении леммы 2.1, и $\chi(s)$ — любая вещественнозначная бесконечно-дифференцируемая функция на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условиям $\chi(s)|_{s \in [0, 1/2]} \equiv 1$ и $\chi(s)|_{s \geq 1} \equiv 0$. Функции $\mathfrak{K}^{(+\gamma)}, \mathfrak{K}^{(-\gamma)}, \mathfrak{K}^{(\infty)}, \mathcal{K}^{(+\gamma)}, \mathcal{K}^{(-\gamma)}$ и $\mathcal{K}^{(\infty)}$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}^{(\pm\gamma)}(s) &:= \chi(|s \mp \gamma|/\delta_0) \mathfrak{K}(s), \\ \mathfrak{K}^{(\infty)}(s) &:= \left[1 - \chi(|s - \gamma|/\delta_0) - \chi(|s + \gamma|/\delta_0)\right] \mathfrak{K}(s), \\ \mathcal{K}^{(\pm\gamma)}(t) &:= \mathcal{F}[\mathfrak{K}^{(\pm\gamma)}(s)], \quad \mathcal{K}^{(\infty)}(t) := \mathcal{F}[\mathfrak{K}^{(\infty)}(s)]. \end{aligned}$$

При этом, очевидно, $\mathcal{K}(t) = \mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) + \mathcal{K}^{(-\gamma)}(t) + \mathcal{K}^{(\infty)}(t)$. Из леммы 3.1 следует, что $\mathfrak{K}^{(\infty)}(s) \in W_2^1(\mathbb{R})$. Поэтому в силу леммы 2.1 имеем $\mathcal{K}^{(\infty)}(t) \in L^1(0, \infty)$.

Так как $\chi(|-s - \gamma|/\delta_0) = \chi(|s + \gamma|/\delta_0)$, то $\mathfrak{K}^{(-\gamma)}(s) = \overline{\mathfrak{K}^{(+\gamma)}(-s)}$ в силу (7). Поэтому $\mathcal{K}^{(-\gamma)}(t) = \overline{\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t)}$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 3.3 в случае $\gamma > 0$ остается убедиться в том, что $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(0, \infty)$.

Если $\mu = 0$, то функция $\mathfrak{K}(t)$ может быть выражена через интегралы вида

$$J^{(\pm)}(t) := \int_0^\infty \chi(|s'|/\delta_0) \sum_{r=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty h_{rm}(s')^r \frac{1}{\ln^m s'} e^{\mp i s' t} ds'.$$

Асимптотические оценки для $J^{(\pm)}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ можно получить, основываясь на результатах [17] (см. также [14]) и утверждении леммы 3.2; оказывается, что такие рассуждения приводят к оценке

$$\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) = O\left(\frac{1}{t \ln^2 t}\right) \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (39)$$

Так как для любых $\mu \geq 0$ справедливо

$$\mathfrak{K}^{(+\gamma)}(s) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (40)$$

и, следовательно, $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(0, T)$, то из (39) получим, что $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ при $\mu = 0$.

В случае $\mu \in \mathbb{N}$ из леммы 3.2 следует, что $\frac{\partial}{\partial s} \mathfrak{K}(s) = O(\ln(s - \gamma))$ при $s \rightarrow \gamma$ (чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать соответствующий ряд почленно). Отсюда и из (40) получим $\mathfrak{K}^{(+\gamma)}(s) \in W_2^1(\mathbb{R})$, поэтому $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ в силу леммы 2.1. Рассмотрим случай $0 < \mu \notin \mathbb{N}$. Положим

$$S_1(s) := \sum_{r=0}^{[\mu]} b_r (s - \gamma)^r, \quad S_2(s) := \sum_{\beta_r < 1} d_r (s - \gamma)^{\beta_r}, \quad S_3(s) := \sum_{\beta_r \geq 1} d_r (s - \gamma)^{\beta_r}.$$

Из (36) видно, что $\mathfrak{K}(s) = S_1(s) + S_2(s) + S_3(s)$. Суммы $S_1(s)$ и $S_2(s)$ являются конечными; следовательно, ряд $S_3(s)$ обладает всеми свойствами ряда (36), перечисленными в формулировке леммы 3.2, и поэтому $\mathcal{F}[\chi(|s - \gamma|/\delta_0) S_3(s)] \in L^1(0, \infty)$ устанавливается аналогично тому, как было доказано $\mathcal{K}(t) \in L^1(0, \infty)$ в случае $\mu \in \mathbb{N}$ (см. выше). Суммируемость $\mathcal{F}[\chi(|s - \gamma|/\delta_0) S_1(s)]$ следует из теоремы Пэли–Винера. Чтобы доказать суммируемость $\mathcal{F}[\chi(|s - \gamma|/\delta_0) S_2(s)]$ на полупрямой $(0, \infty)$, достаточно заметить, что эта функция суммируема на $(0, T)$ для любого конечного T (поскольку $\chi(|s - \gamma|/\delta_0) S_2(s) \in L^2(\mathbb{R})$), и что $\mathcal{F}[\chi(|s - \gamma|/\delta_0) (s - \gamma)^{\beta_r}] = O(t^{-\beta_r - 1})$ при $t \rightarrow +\infty$ (см., например, [14]). Итак, $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(0, \infty)$ и в случае $0 < \mu \notin \mathbb{N}$. Тем самым утверждение теоремы 3.3 доказано для $\gamma > 0$. Случай $\gamma = 0$ может быть рассмотрен сходным образом, однако с тем отличием, что для представления $\mathfrak{K}$ вместо двух функций $\mathfrak{K}^{(\pm\gamma)}$ потребуется одна функция аналогичного вида.

4. Задача с неоднородными точными условиями на открытой границе. Из теоремы 2.3 следует, что задача (34), (35) не может иметь в $B^m(T)$ более одного решения, если коэффициенты $\rho(x)$, $k(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям (14), (16) и (17). Теперь эти условия необходимо усилить с тем, чтобы гарантировать существование решений (34), (35) с нужными для исследования задачи (32), (33) свойствами.

4.1. Прежде всего, потребуем, чтобы вместо (16) имело место

$$\rho(x), k(x) \in {}^2([x_0, x_1]), \quad q(x) \in C([x_0, x_1]). \quad (41)$$

Условия (14) и (17) по-прежнему будем предполагать выполненными. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy}{dx} \right) + (s^2 \rho(x) - Q(x)) y = 0, \quad (x > x_0), \quad (42)$$

$$y(x_0, s) = \sin \alpha_0, \quad \frac{dy}{dx}(x_0, s) = \cos \alpha_0, \quad (43)$$

где $Q(x)$ имеет вид (15), α_0 то же, что и в (19). В силу (17) и (41) классическое решение $y(x, s)$ этой задачи Коши заведомо существует для всех $s \in \mathbb{C}$. Кроме того,

$$\frac{\partial^{j+m} y}{\partial s^j \partial x^m} \in C([x_0, x_1] \times \mathbb{C}) \quad (j \geq 0, \quad m = 0, 1, 2) \quad (44)$$

и $y(x, s)$ представляет собой целую функцию s при любом фиксированном $x \geq x_0$. Положим

$$\Lambda[\eta](x, s) := \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, s) - i s \eta(x, s) + (2\pi)^{1/2} \mathfrak{K}(s) \eta(x, s).$$

Еще одно новое условие, налагаемое на $\rho(x)$, $k(x)$ и $q(x)$, имеет следующий вид:

$$\Lambda[y](x_1, s) \neq 0 \quad \text{при} \quad s \in [0, \gamma] \quad \text{и} \quad s = ip \quad (p > 0). \quad (45)$$

Замечание 1. Из (14) следует, что при $s \neq \pm\gamma$ равенство

$$\Lambda[y](x_1, s) = 0 \quad (46)$$

могло бы выполняться в том и только том случае, когда

$$y(x, s)|_{x>x_1} = C(s) \sqrt{x} H_\mu^{(1)}(\sqrt{s^2 - \gamma^2} x), \quad (47)$$

где $C(s) \neq 0$ — некоторая константа и для многозначных функций берутся их главные ветви. Если $\operatorname{Im} s > 0$, то $y(x, s)$ вида (47) экспоненциально убывает при $x \rightarrow \infty$ и, как следует из (42) и (43), должна удовлетворять равенству

$$\int_{x_0}^{\infty} k \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|^2 dx + \int_{x_0}^{\infty} Q |y|^2 dx + \frac{\sin 2\alpha_0}{2} k(x_0) = s^2 \int_{x_0}^{\infty} \rho |y|^2 dx.$$

Отсюда видно, что (46) не может иметь места при $\arg s \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Если $s \in \mathbb{R}$, то решение (42) и (43) принимает только действительные значения и поэтому равенство (47) (а вместе с ним и (46)) не может выполняться при $|s| > \gamma$. Заметим также, что из (45) и (7) следует выполнение $\Lambda[y](x, s) \neq 0$ при $s \in [-\gamma, 0)$. Из всего сказанного видно, что (45) является достаточным условием необращения $\Lambda[y](x_1, s)$ в нуль во всей полуплоскости $\operatorname{Im} s \geq 0$.

Замечание 2. Физический смысл условия (45) может быть выражен требованием отсутствия резонансов в системе с локальными источниками, описываемой уравнением (20) и граничным условием (22).

4.2. Пусть выполнены условия (41), (17) и (45). Положим

$$\widehat{G}_{\text{open}}(x, s) := \frac{y(x, s)}{\sqrt{2\pi} \Lambda[y](x_1, s)}. \quad (48)$$

С помощью стандартных замены переменной

$$\xi(x) := \int_{x_0}^x \left[\frac{\rho(x')}{k(x')} \right]^{1/2} dx' \quad (49)$$

и подстановки $y(x, s) = (k(x) \rho(x))^{-1/4} z(\xi(x), s)$ задача (42), (43) сводится к задаче Коши для уравнения вида

$$z'' + [s^2 - Q_1(\xi)]z = 0 \quad (50)$$

с $Q_1(\xi) \in C([x_0, x_1])$. Нетрудно получить (см., например, [13]) оценки для $z(\xi, s)$ и $z'(\xi, s)$ при $\operatorname{Im} s \geq 0$ и $|s| \rightarrow \infty$. Вместе с оценкой леммы 3.1 для $\mathfrak{K}$ это приводит к следующему результату: $\widehat{G}_{\text{open}}(x, s) = O(s^{-1})$ при $\operatorname{Im} s \geq 0$ и $s \rightarrow \infty$ равномерно относительно $x \in [x_0, x_1]$ и $\arg s \in [0, \pi]$. Кроме того, из сказанного в п. 4.1 и леммы 3.1 видно, что функция $\widehat{G}_{\text{open}}(x, s)$ является аналитической при $\operatorname{Im} s > 0$ для любого фиксированного x и непрерывной по совокупности переменных при $x \in [x_0, x_1]$ и $\operatorname{Im} s \geq 0$. Поэтому, во-первых, $\widehat{G}_{\text{open}}(x, s) \in L^2(X \times \mathbb{R})$ и $\sup_{x \in X} \|\widehat{G}_{\text{open}}(x, s)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$; во-вторых, функция

$$G_{\text{open}}(x, t) := \mathcal{F}[\widehat{G}_{\text{open}}(x, s)] \quad (51)$$

обращается в нуль при $t < 0$, причем $G_{\text{open}}(x, t) \in L^2(X \times (0, \infty))$ и $\sup_{x \in X} \|G_{\text{open}}(x, t)\|_{L^2(0, \infty)} < \infty$.

4.3. Обозначим через $\mathcal{G}$ подмножество $L^1(X \times \mathbb{R})$, состоящее из таких функций: $G(x, t) : G(x, t)|_{t<0} = 0$ и $\sup_{x \in X} \|G(x, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \equiv C_G < \infty$. Норму $\|G\|$ такой функции в $\mathcal{G}$ зададим равной C_G .

Лемма 4.1. Пусть выполнены условия (41), (17) и (45), функция $\xi(x)$ задана равенством (49) и $\xi_1 := \xi(x_1)$. Тогда $G_{\text{open}}(x, t) \in \mathcal{G}$ и имеют место следующие представления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m G_{\text{open}}}{\partial x^m} &= \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} [G_{m;\text{sing}}(x, t) + G_{m;\text{reg}}(x, t)] \quad (m = 1, 2), \\ \frac{\partial G_{\text{open}}}{\partial t} &= G_{3;\text{sing}}(x, t) + G_{3;\text{reg}}(x, t), \end{aligned}$$

где $G_{m;\text{reg}}(x, t) \in \mathcal{G}$ для любого $m = 1, 2, 3$, а $G_{m;\text{sing}}(x, t)$ задается равенством вида

$$G_{m;\text{sing}}(x, t) = A_m^-(x)\delta(t - (\xi_1 - \xi(x))) + A_m^+(x)\delta(t - (\xi_1 + \xi(x)))$$

с некоторыми функциями $A_m^\pm(x) \in C([x_0, x_1])$.

Не останавливаясь на технических деталях, поясним, как может быть доказано утверждение леммы 4.1. Равенство $G_{\text{open}}(x, t)|_{t < 0} = 0$ было установлено в п. 4.2. Пусть $\gamma > 0$. Функции $\widehat{G}_{\text{open}}^{(\pm\gamma)}$, $\widehat{G}_{\text{open}}^{(\infty)}$, $G_{\text{open}}^{(\pm\gamma)}$ и $G_{\text{open}}^{(\infty)}$ построим с помощью $\chi(|s - \gamma|/\delta_0)$ по $\widehat{G}_{\text{open}}$ в точности так, как в п. 3.2 по $\mathfrak{K}$ были построены $\mathfrak{K}^{(\pm\gamma)}$, $\mathfrak{K}^{(\infty)}$, $\mathcal{K}^{(\pm\gamma)}$ и $\mathcal{K}^{(\infty)}$. Из (7) и (42), (43) следует, что $G_{\text{open}}^{(-\gamma)}(x, t) = \overline{G_{\text{open}}^{(+\gamma)}(x, t)}$, поэтому, как и в случае $\mathcal{K}$, достаточно рассмотреть $G_{\text{open}}^{(+\gamma)}$ и $G_{\text{open}}^{(\infty)}$. Обратимся сначала к $G_{\text{open}}^{(+\gamma)}$.

Функцию $\widehat{G}_{\text{open}}^{(+\gamma)}(x, s) := \chi(|s - \gamma|/\delta_0)\widehat{G}_{\text{open}}(x, s)$ представим в виде $\widehat{G}_{\text{open}}^{(+\gamma)} = \widehat{G}_{\text{open}}^{(+\gamma;\Lambda)} \cdot \widehat{G}_{\text{open}}^{(+\gamma;y)}$, где

$$\widehat{G}_{\text{open}}^{(+\gamma;\Lambda)}(s) := \frac{\chi(|s - \gamma|/\delta_0)}{\Lambda[y](x_1, s)}, \quad \widehat{G}_{\text{open}}^{(+\gamma;y)}(x, s) := \chi\left(\frac{|s - \gamma|}{2\delta_0}\right)y(x, s).$$

Так как $\Lambda[y](x_1, \gamma) \neq 0$ в силу (45), то $\widehat{G}_{\text{open}}^{(+\gamma;\Lambda)}(s)$ разлагается в δ_0 -окрестности γ в ряды такого же вида и с теми же свойствами, как (36)–(38), поэтому (см. п. 3.2)

$$G_{\text{open}}^{(+\gamma;\Lambda)} \in L^1(0, \infty). \quad (52)$$

Из (44) следует, что функции $\frac{\partial^m}{\partial x^m} \widehat{G}_{\text{open}}^{(+\gamma;y)}(m = 0, 1, 2)$, $(-is)\widehat{G}_{\text{open}}^{(+\gamma;y)}$, а также их частные производные по s непрерывны по совокупности переменных в $[x_0, x_1] \times \mathbb{R}$ и что для каждой из них $\sup_{x \in X} \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ конечен.

Вместе с леммой 2.1, (52) и неравенством Юнга это приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} G_{\text{open}}^{(+\gamma)} \in \mathcal{G}, \quad (m = 0, 1, 2), \quad \frac{\partial}{\partial t} G_{\text{open}}^{(+\gamma)} \in \mathcal{G}. \quad (53)$$

Перейдем к функции $G_{\text{open}}^{(\infty)}(x, t)$. Исследование асимптотики решения (50) и его производных $\frac{\partial^{j+n} z}{\partial s^j \partial x^n}$ ($j = 0, 1; n = 0, 1, 2$) вместе с хорошо известными асимптотическими оценками для функций Ханкеля [3] позволяет установить, что

$$\frac{\partial^m \widehat{G}_{\text{open}}^{(\infty)}}{\partial x^m} = \frac{(-is)^{m-1}}{\sqrt{2\pi}} [A_m^- e^{is(\xi_1 - \xi(x))} + A_m^+ e^{is(\xi_1 + \xi(x))} + \widehat{G}_m^{(\infty)}(x, t)] \quad (m = 1, 2), \quad (54)$$

$$(-is)\widehat{G}_{\text{open}}^{(\infty)}(x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [A_3^- e^{is(\xi_1 - \xi(x))} + A_3^+ e^{is(\xi_1 + \xi(x))}] + \widehat{G}_3^{(\infty)}(x, s), \quad (55)$$

где коэффициенты $A_m^\pm(x)$ и $A_m^\pm(x)$ ($m = 1, 2, 3$) задаются следующим образом:

m	$2A_m^-$	$2A_m^+$
1	$\rho^{1/4} k^{-3/4}$	$\mp \rho^{1/4} k^{-3/4}$
2	$\rho^{3/4} k^{-5/4}$	$\pm \rho^{3/4} k^{-5/4}$
3	$k^{-1/4} \rho^{-1/4}$	$\pm k^{-1/4} \rho^{-1/4}$

Верхний знак в таблице относится к случаю $\sin \alpha_0 \neq 0$, нижний — к случаю $\sin \alpha_0 = 0$. При этом $\widehat{G}_m^{(\infty)}(x, s) \in C([x_0, x_1], \mathbb{R})$ и

$$\sup_{x \in X} \|\widehat{G}_m^{(\infty)}(x, s)\|_{W_2^1(\mathbb{R})}, \quad \sup_{x \in X} \|\widehat{G}_{\text{open}}^{(\infty)}(x, s)\|_{W_2^1(\mathbb{R})} < \infty. \quad (56)$$

Из (54)–(56), леммы 2.1, а также из (53) следует справедливость утверждения леммы 4.1 в случае $\gamma > 0$. Случай $\gamma = 0$ рассматривается аналогично.

4.4. Пусть $h(t) \in L^\infty(0, T)$ и $G(x, t) \in \mathcal{G}$, тогда, как следует из определения $\mathcal{G}$, интеграл

$$\int_0^t G(x, t - \tau) h(\tau) d\tau \equiv V(x, t)$$

задает в $X \times (0, T)$ существенно ограниченную функцию, причем

$$\|V\|_{L^\infty(X \times (0, T))} \leq \|G\| \|h\|_{L^\infty(0, T)}. \quad (57)$$

Ту же функцию $V(x, t)$ можно получить, задав свертку $\{G(x, t)\}_{\text{ext}} * [\delta(x) \cdot \{h(t)\}_{\text{ext}}]$, в которой

$$\{G(x, t)\}_{\text{ext}} := \begin{cases} G(x, t), & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1], \end{cases} \quad \{h(t)\}_{\text{ext}} := \begin{cases} h(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$$

а точка обозначает прямое произведение обобщенных функций. Все сказанное о $V(x, t)$ является следствием общеизвестных свойств суммируемых функций и обобщенных функций (см., например, [4, 6]).

Далее через C будем обозначать различные, вообще говоря, константы, которые могут зависеть от $x_0, x_1, \alpha_0, \gamma, \mu, \rho, k, q$, но не зависят от T .

Лемма 4.2. Пусть выполнены условия (41), (17), (45) и $G_{\text{open}}(x, t)$ — та же, что в (51). Тогда для любой $h(t) \in B_{\text{bound}}^1(T)$ функция

$$w(x, t) := \int_0^t G_{\text{open}}(x, t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (58)$$

принадлежит $W_\infty^2(X \times (0, T))$, причем $\|w\|_{W_\infty^2(X \times (0, T))} \leq C \|h\|_{W_\infty^1(0, T)}$.

Для доказательства леммы 4.2 достаточно убедиться в том, что свертка

$$W(x, t) = \{G_{\text{open}}(x, t)\}_{\text{ext}} * [\delta(x) \cdot \{h(t)\}_{\text{ext}}],$$

а также ее слабые производные до второго порядка включительно принадлежат $L^\infty(X \times (0, T))$, и оценить их нормы в этом пространстве. Поясним сначала, как это можно сделать для $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$.

Так как $h(0) = 0$ согласно определению $B_{\text{bound}}^m(T)$, то

$$\frac{d}{dt} \{h(t)\}_{\text{ext}} = \{h_1(t)\}_{\text{ext}} + h(T)\delta(t), \quad (59)$$

где $h_1 = \frac{dh}{dt} \in L^\infty(0, T)$. Кроме того,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{G_{\text{open}}\}_{\text{ext}} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_{\text{open}} \right\}_{\text{ext}} + G', \quad (60)$$

где $G' \equiv G'(x, t)$ — некоторая обобщенная функция с носителем на объединении прямых $\{x_0\} \times \mathbb{R}$ и $\{x_1\} \times \mathbb{R}$.

Положим

$$I_{\text{sing}}(x, t) := G_{2;\text{sing}}(x, t) * [\delta(x) \cdot \{h_1(t)\}_{\text{ext}}], \quad I_{\text{reg}}(x, t) := G_{2;\text{reg}}(x, t) * [\delta(x) \cdot \{h_1(t)\}_{\text{ext}}]$$

(здесь $G_{2;\text{sing}}$ и $G_{2;\text{reg}}$ те же, что в формулировке леммы 4.1). Из (59), (60) и утверждения леммы 4.1 в силу общеизвестных правил дифференцирования свертки обобщенных функций следует, что в $X \times (0, T)$

выполнено равенство $\frac{\partial^2}{\partial x^2} W = I_{\text{sing}} + I_{\text{reg}}$. Так как

$$A_k^\pm(x) \delta(t - (\xi_1 \pm \xi(x))) * [\delta(x) \cdot \{h_1(t)\}_{\text{ext}}] = \begin{cases} A_k^\pm(x) h_1(t - (\xi_1 \pm \xi(x))) \sqrt{1 + \left[\frac{d\xi}{dx}(x)\right]^2}, & \text{если } x_0 \leq x \leq x_1 \text{ и } \xi \pm \xi(x) \leq t \leq T + \xi \pm \xi(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то из леммы 4.1 следует, что $I_{\text{sing}} \in L^\infty(X \times (0, T))$ и что для некоторого $C < \infty$

$$\|I_{\text{sing}}\|_{L^\infty(X \times (0, T))} \leq C \|h_1\|_{L^\infty(0, T)} \leq C \|h\|_{W_\infty^1(0, T)}$$

равномерно относительно $T \in (0, \infty)$. Оценка такого же вида для I_{reg} следует из (57) и того, что в силу леммы 4.1 $G_{2;\text{reg}}(x, t) \in \mathcal{G}$. Таким образом, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \in L^\infty(X \times (0, T))$ и

$$\left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\|_{L^\infty(X \times (0, T))} \leq C \|h\|_{W_1^\infty(0, T)}. \quad (61)$$

Оценки вида (61) для других частных производных w устанавливаются аналогично. Для завершения доказательства леммы 4.2 остается заметить, что $G_{\text{open}} \in \mathcal{G}$, и поэтому в силу (57)

$$\|w\|_{L^\infty(X \times (0, T))} \leq \|G_{\text{open}}\| \|h\|_{W_1^\infty(0, T)}.$$

Из (42), (43) и (48) следует, что $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению (34) почти всюду на $X \times (0, T)$ и граничным условиям $l[w](x_0, t) = 0$ и (35) при всех $t \in (0, T)$. В этом нетрудно убедиться, используя обычную технику преобразования Фурье обобщенных функций. Также нетрудно видеть, что $w(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям $w(x, 0) = 0$ и $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0$. Таким образом, справедлива

Лемма 4.3. *В условиях и обозначениях леммы 4.2 функция $w(x, t)$ принадлежит пространству $B^2(T)$ и является решением (34), (35).*

4.5. Пусть $m \geq 3$, $h \in B_{\text{bound}}^{m-1}(T)$, функция $w(x, t)$ задается равенством (58) и $w^{(n)} \equiv \frac{\partial^n w}{\partial t^n}$. Рассуждения, аналогичные использованным при обосновании утверждений Лемм 4.2 и 4.3, показывают, что

$$w^{(n)} \in B^2(T), \quad (62)$$

$$Lw^{(n)} = 0, \quad (63)$$

$$\|w^{(n)}\|_{W_\infty^2(X \times (0, T))} \leq C \left\| \frac{\partial^n h}{\partial t^n} \right\|_{W_1^\infty(0, T)} \leq C \|h\|_{W_\infty^{m-1}(0, T)} \quad (64)$$

для всех $n \leq m - 2$. Предположим теперь, что в дополнение к (41), (17) и (45) выполнены условия

$$\rho(x), q(x) \in W_\infty^{m-2}(X), \quad k(x) \in W_\infty^{m-1}(X). \quad (65)$$

Тогда если $j \leq m - 1$ и $w^{(n)}, w^{(n+1)} \in W_\infty^j(X \times (0, T))$, то $w^{(n)} \in W_\infty^{j+1}(X \times (0, T))$ и

$$\|w^{(n)}\|_{W_\infty^{j+1}(X \times (0, T))} \leq C \left(\|w^{(n)}\|_{W_\infty^j(X \times (0, T))} + \|w^{(n+1)}\|_{W_\infty^j(X \times (0, T))} \right). \quad (66)$$

В сказанном нетрудно убедиться, продифференцировав (63) $j - 1$ раз по x и выразив из полученного равенства $\frac{\partial^{j+1}}{\partial x^{j+1}} w^{(n)}$ через производные ρ, k, q , а также через $D^\alpha w^{(n)}$ и $D^\alpha w^{(n+1)}$ с $|\alpha| \leq j$. Благодаря (66) и (64) последовательно получим

$$\begin{aligned} w^{(n)} &\in W_\infty^3(X \times (0, T)), & \|w^{(n)}\|_{W_\infty^3(X \times (0, T))} &\leq C \|h\|_{W_\infty^{m-1}(X \times (0, T))} & (n = 0, \dots, m - 3); \\ w^{(n)} &\in W_\infty^4(X \times (0, T)), & \|w^{(n)}\|_{W_\infty^4(X \times (0, T))} &\leq C \|h\|_{W_\infty^{m-1}(X \times (0, T))} & (n = 0, \dots, m - 4); \\ &\dots\dots\dots \\ w^{(0)} &\equiv w \in W_\infty^m(X \times (0, T)), & \|w^{(n)}\|_{W_\infty^m(X \times (0, T))} &\leq C \|h\|_{W_\infty^{m-1}(X \times (0, T))}. \end{aligned}$$

Выполнение начальных условий $\frac{\partial^j w}{\partial x^j}(x, 0) = 0$ ($j = 0, \dots, m - 1$) является очевидным следствием (62). Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.4. *Пусть $m \geq 2$, $h(t) \in B_{\text{bound}}^{m-1}(T)$, и выполнены условия (41), (17), (45), а при $m \geq 3$ также (65). Тогда для каждого $T \in (0, \infty)$ равенство (58) задает ограниченный оператор A_{open} , сопоставляющий функции $h \in B_{\text{bound}}^{m-1}(T)$ решение (34), (35), и такой, что $B_{\text{bound}}^{m-1}(T) \rightarrow B^m(T)$. При этом $\sup_{T>0} \|A_{\text{open}}\| < \infty$.*

5. Существование, единственность и оценки решения задачи с приближенными условиями на открытой границе. Из теоремы 4.4, а также из свойств операторов A_{imp} и $\tilde{\mathcal{K}}$ (см. п. 2.3), следует, что при любом $T < \infty$ оператор $A \equiv A_{\text{open}} \tilde{\mathcal{K}} A_{\text{imp}} : B^m(T) \rightarrow B^m(T)$ компактен, причем

$$\|A\| \leq C \|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0, T)} \quad (67)$$

равномерно относительно T . Здесь, как и выше, через $\mathcal{K}$ и $\tilde{\mathcal{K}}$ обозначены ядра интегральных операторов точных и приближенных условий на открытой границе (см. п. 2.2). Рассмотрим уравнение вида

$$w + Aw = \varphi, \quad (68)$$

где $\varphi \in B^m(T)$ — некоторая заданная функция. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и (67) оператор A является сжимающим в $B^m(X \times (0, T_0))$ по крайней мере для некоторого $T_0 \in (0, T]$. Следовательно, (68) не может иметь в $B^m(T)$ более одного решения. Вместе с компактностью A это приводит, как следует из альтернативы Фредгольма, к существованию решения (68). Итог сказанному подводит

Лемма 5.1. *Если $m \geq 2$, а ρ , k и q удовлетворяют условиям теоремы 4.4, то для любого $T > 0$, любых $\tilde{\mathcal{K}} \in L^1(0, T)$ и $\varphi \in B^m(T)$ решение (68) в $B^m(T)$ существует и единственно.*

Кроме того, из (67) следует существование такого $\varepsilon > 0$, что

$$\|w\|_{W_\infty^m(X \times (0, T))} \leq C \|\varphi\|_{W_\infty^{m-1}(0, T)} \quad (69)$$

для любого T и любого решения (68), если только $\|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0, T)} < \varepsilon$. В этом можно убедиться с помощью метода сжимающих отображений.

Пусть $u(x, t) \in W_\infty^m(X \times (0, T))$ — решение исходной модельной задачи (20)–(22). Положим значение $\varphi_u(x, t) := A_{\text{орен}} \tilde{\mathcal{K}} u(x_1, t)$. Как следует из сказанного в п. 2.3 и теоремы 4.4, $\varphi_u \in B^m(T)$ и

$$\|\varphi_u\|_{W_\infty^m(X \times (0, T))} \leq C \|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0, T)} \|u\|_{W_\infty^m(X \times (0, T))}.$$

Заметим теперь, что в силу единственности в $B^m(T)$ решения (34), (35) (см. п. 4.1) и теоремы 4.4 задача (32) и (33) эквивалентна уравнению (68) с $\varphi = \varphi_u$. В свою очередь, задача с приближенными условиями на открытой границе (31) эквивалентна (32), (33) (Лемма 2.4). Вместе с леммой 5.1 и оценкой (69) это приводит к следующему результату.

Теорема 5.2. *Пусть $m \geq 2$, коэффициенты ρ , k , q оператора (18) удовлетворяют условиям (41), (17), (14), а при $m \geq 3$ — также и условиям (65). Тогда*

1) *если при некотором $T > 0$ функции f , g , u_0 , u_1 удовлетворяют (23), (24) и существует решение $u \in W_\infty^m(X \times (0, T))$ задачи (20)–(22), то для любой $\tilde{\mathcal{K}} \in L^1(0, T)$ решение $\tilde{u}$ соответствующей задачи с приближенными условиями на открытой границе существует в $W_\infty^m(X \times (0, T))$, причем эта задача не имеет в $W_\infty^2(X \times (0, T))$ решений, отличных от $\tilde{u}$;*

2) *при $\|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0, T)} \rightarrow 0$ имеет место равномерная относительно $T \in (0, \infty)$ оценка*

$$\|\tilde{u} - u\|_{W_\infty^m(X \times (0, T))} = O\left(\|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0, T)} \|u\|_{W_\infty^m(X \times (0, T))}\right).$$

Замечание. Можно показать [26], что утверждение, аналогичное теореме 5.2, справедливо и для решений задачи (20)–(22) из $W_2^m(X \times (0, T))$.

6. Заключительные замечания. Как уже было отмечено в п. 1.2, наибольший интерес для численного моделирования представляет частный случай приближенных ядер

$$\tilde{\mathcal{K}}(t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{i\sigma_n t}, \quad (70)$$

где $c_n, \sigma_n \in \mathbb{C}$. Из теоремы 5.2 видно, что использование в (27) этих ядер (а следовательно, и использование равенств вида (10)–(12) либо эквивалентных им соотношений в качестве условий на открытой границе) приводит к появлению относительной ошибки порядка $\|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0, T)}$ в решении модельной задачи и его производных. Если же аппроксимация $\mathcal{K}$ функциями вида (70) строится так, что $\|\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0, \infty)} \rightarrow 0$, то величина относительной ошибки будет гарантирована независимо от величины временного интервала, на котором решается модельная задача. Возможность построения таких аппроксимаций следует из того, что линейная оболочка системы функций $\{e^{-i\sigma t}\}_{\text{Im } \sigma > 0}$ образует в $L^1(0, \infty)$ плотное подпространство [1].

В условиях теоремы 5.2 задача (28)–(31) всегда имеет (и притом единственное) решение $\tilde{u}$, обладающее той же гладкостью, что и решение исходной задачи (20)–(22). Поэтому, во-первых, при численном решении задачи с приближенными условиями вида (10)–(12) дискретизация уравнения (28), начальных

условий (29) и граничного условия (30) может осуществляться теми же способами, что и при численном решении (20)–(22). Во-вторых, известная гладкость $\tilde{v}$ на открытой границе обеспечивает возможность контролировать ошибки, связанные с дискретизацией самих соотношений вида (10)–(12).

Изложенное позволяет надеяться на возможность такой реализации приближенных условий (10)–(12), что вносимая ими относительная ошибка будет находиться на уровне ошибок, связанных с дискретизацией задачи для любой величины временного интервала, на котором задача решается численно, и для всех решений исходной задачи. Возможность обобщения сформулированных результатов (прежде всего, теоремы 5.2) на важные для приложений случаи, когда не выполнено условие (45) и/или ρ , k , q не обладают гладкостью (41), и на пространственно-многомерный случай требует дополнительного исследования.

Автор выражает свою глубокую признательность А. Г. Свешникову за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и ряд важных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
2. Бобылев Ю.В., Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Свешников А.Г. Нестационарные парциальные условия излучения в задачах релятивистской сильноточной плазменной СВЧ-электроники // Физика плазмы. 1999. **25**, № 7. 615–620.
3. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
5. Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Нусинович Г.С., Сергеев А.С. Установление автоколебаний в электронных СВЧ генераторах с дифракционным выводом излучения // Изв. ВУЗов, Сер. “Радиофизика”. 1986. **29**, № 1. 106–114.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
8. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: ГИТТЛ, 1953.
9. Майков А.Р., Свешников А.Г. Условия излучения для дискретных аналогов нестационарных уравнений Максвелла в случае неоднородной среды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. **35**, № 3. 412–426.
10. Майков А.Р., Свешников А.Г., Якунин С.А. Разностная схема для нестационарных уравнений Максвелла в волноводных системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. **26**, № 7. 850–863.
11. Сиренко Ю.К., Шестопалов В.П., Яшина Н.П. Новые методы динамической линейной теории открытых волноводных резонаторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1997. **37**, № 7. 869–877.
12. Уреев М.В. Граничные условия для уравнений Максвелла в случае произвольной зависимости от времени // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1997. **37**, № 12. 1489–1497.
13. Тутчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
14. Федоряк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
15. Alpert B., Greengard L., Hagstrom T. Nonreflecting boundary conditions for the time-dependent wave equations // J. Comput. Phys. 2002. **180**. 270–296.
16. Arnold A., Ehrhardt M. Discrete transparent boundary conditions for wide angle parabolic equation in underwater acoustics // J. Comput. Phys. 1998. **145**. 611–638.
17. Armstrong J.A., Bleistei N. Asymptotic expansions of integrals with oscillatory kernels with logarithmic singularities // SIAM J. Math. Anal. 1980. **11**, N 2. 300–307.
18. Givoli, D., Neta, B. High-order non-reflecting boundary conditions for dispersive waves // Wave Motion. 2003. **37**. 257–271.
19. Givoli, D., Neta, B. High-order Higdon non-reflecting boundary conditions for the shallow water equations // Naval Postgraduate School. Monterey, CA. 2002. NPS-MA-02-001.
20. Hagstrom T. Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves // Acta Numerica. 1999. **6**. 47–106.
21. Hagstrom T. New results on absorbing layers and radiation boundary conditions // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. 2003. **31**. 1–42.
22. Van Joolen V., Givoli D., Neta B. High-order non-reflecting boundary conditions for dispersive waves in Cartesian, cylindrical and spherical coordinate systems // Int. J. of Computational Fluid Dynamics. 2003. **17**, N 4. 263–274.
23. Maikov A.R., Sveshnikov A.G. On rigorous and approximate nonstationary partial radiation conditions // Journal of Communications Technology and Electronics. 2000. **45**, Suppl. 2. 196–211.
24. Sofronov I.L. Non-reflecting inflow and outflow in wind tunnel for transonic time-accurate simulation // J. Math. Anal. Appl. 1998. **221**. 92–115.
25. Tsynkov, S. V. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // Appl. Numer. Math. 1998. **27**. 465–532.
26. Майков А.Р. О приближенных условиях на открытой границе для одного класса гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики (в печати).

Поступила в редакцию
27.10.2005