УДК 519.644.2:519.651

ФОРМУЛА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МАРКОВА С ДВУМЯ ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

С. Ф. Залёткин[1]

Излагаются некоторые свойства рядов Чебышёва, положенные в основу построения численно-аналитических методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется вычислению коэффициентов Чебышёва с помощью численного интегрирования, для чего выводится квадратурная формула Маркова с двумя фиксированными узлами и весовой функцией, соответствующей ортогональной системе смещенных многочленов Чебышёва первого рода. Описываются свойства частичной суммы ряда Чебышёва с коэффициентами, вычисленными по формуле Маркова.

Ключевые слова: ряды Чебышёва, задача Коши, обыкновенные дифференциальные уравнения, квадратурная формула Маркова.

Введение. Настоящая работа посвящена изучению вопросов, связанных с приближением функций посредством ортогональных разложений по смещенным многочленам Чебышёва первого рода — смещенных рядов Чебышёва. Построение такого приближения заключается в нахождении коэффициентов разложения — коэффициентов Чебышёва. Последние определяются через интегралы от произведения приближаемой функции, весовой функции и ортогональных многочленов — многочленов Чебышёва. Для тех функций, для которых эти интегралы вычисляются в конечном виде, коэффициенты определяются точно. Однако для многих функций вычисление таких интегралов очень громоздко или даже невыполнимо в конечном виде. В этом случае вычисление коэффициентов разложения практически ведется с помощью составления и решения линейных рекуррентных соотношений. Как правило, эти соотношения получают для функций, которые могут быть представлены в виде решения некоторых линейных задач, например линейных дифференциальных или интегральных уравнений. К линейным реккурентным соотношениям приводит также способ неопределенных коэффициентов. Такие методы разложения развиты в работах К. Ланцоша [1], В. К. Дзядыка [2], С. Пашковского [3], Р. В. Хемминга [4] и др.

При составлении рекуррентных соотношений возникают свои трудности, с повышением порядка уравнения или степени многочленов в его коэффициентах усложняются сами соотношения, которые к тому же могут иметь несколько решений.

В настоящей работе предлагается иной подход, основанный на вычислении коэффициентов разложения на ЭВМ с помощью квадратурной формулы высокого порядка точности. Такой подход расширяет множество функций, для которых могут быть практически эффективно построены приближения посредством ортогональных разложений, и делает построение таких приближений более простым. Обсуждаемый круг вопросов включает вычисление коэффициентов Фурье–Чебышёва по формуле численного интегрирования, приближение функции частичной суммой ряда Чебышёва, оценки точности данного приближения.

Статья состоит из шести разделов. В разделе 1 дается вывод формулы численного интегрирования А. А. Маркова для интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

с двумя фиксированными узлами 0 и 1. Здесь получены выражения для абсцисс, коэффициентов и остаточного члена квадратурной формулы. При этом использован подход, отличающийся от способа, примененного при выводе данной формулы в [5] и основанного на использовании квадратурной формулы наивысшей тригонометрической степени точности. Во втором разделе приводится формула Маркова для интегралов вида

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,.$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

В третьем разделе говорится о сходимости квадратурного процесса по формулам Маркова.

В четвертом разделе описывается применение формулы Маркова для приближенного вычисления коэффициентов $a_i^*[f]$ смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$. В пятом разделе изучаются свойства частичной суммы ряда Чебышёва функции $f(x)$ с приближенными коэффициентами, вычисленными по квадратурной формуле Маркова. Доказано, что частичная сумма ряда одновременно является многочленом наилучшего равномерного приближения этой функции $f(x)$ на множестве, состоящем из конечного числа точек, совпадающих с абсциссами квадратурной формулы Маркова. Установлена зависимость между коэффициентами Чебышёва $a_i^*[f]$ и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова.

В шестом разделе приводятся оценки для погрешности приближения функции частичной суммой ее ряда Чебышёва, коэффициенты которого определены по формуле численного интегрирования.

Изложенные в статье вычислительные приемы рассматриваются нами в качестве средства построения численно-аналитических методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения задачи Коши для канонической системы

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \tag{I}$$

$$\begin{cases} y(x_0) \ = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{II}$$

и задачи Коши для нормальной системы

$$y' = f(x, y), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X,$$

$$y(x_0) = y_0$$

могут быть построены на основе рядов Чебышёва и изложенного приближенного способа вычисления коэффициентов Чебышёва. Этим методам посвящена отдельная работа.

1. Формула численного интегрирования Маркова для отрезка [0, 1] с двумя фиксированными узлами $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и весовой функцией $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Остановимся на задаче вычисления определенного интеграла

$$\int\limits_a^b p(x) f(x)\, dx,$$

где $p(x)$ — некоторая фиксированная неотрицательная на $[a, b]$ функция, могущая обращаться в нуль лишь в конечном числе точек, и такая, что интеграл $\int\limits_a^b p(x)|x|^m\, dx$ имеет конечное значение при $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим квадратную формулу, содержащую наперед заданные узлы $a_1, \ldots, a_m$ и имеющую вид

$$\int\limits_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^{m} D_l f(a_l) + R(f). \tag{1}$$

Эта формула содержит параметры A_i, x_i, $i = 1, \ldots, n$, и D_l, $l = 1, \ldots, m$. При любом расположении узлов x_i можно за счет выбора коэффициентов A_i и D_l достигнуть того, чтобы остаточный член $R(f)$ квадратурной формулы (1) обращался в нуль для всех алгебраических многочленов степени не выше $n+m-1$. Для этого достаточно, чтобы она была интерполяционной. Для того чтобы остаточный член $R(f)$ обращался в нуль для многочленов более высокой степени, необходимо специальным образом выбирать узлы x_i. В (1) коэффициенты A_i, D_l и узлы x_i выбирают таким образом, чтобы $R(f)$ обращался в нуль для многочленов возможно более высокой степени.

Обозначим

$$\Omega(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_m), \quad \omega(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Справедлива следующая теорема из [6].

Теорема. *Для того чтобы квадратурная формула*

$$\int\limits_a^b p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^{m} D_l f(a_l) \tag{2}$$

была точной для многочленов степени $2n+m-1$, необходимо и достаточно, чтобы формула была интерполяционной и чтобы многочлен $\omega(x)$ был ортогонален на отрезке $[a,b]$ с весом $p(x)\Omega(x)$ к любому многочлену $q(x)$ степени, не превосходящей $n-1$.

Доказательство теоремы приведено в [6].

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ производную порядка $2n+m$, то остаточный член $R(f)$ будет равен [6]:

$$R(f)=\int\limits_a^b p(x)\Omega(x)\omega^2(x)\,\frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!}\,dx,\quad a<\xi<b. \tag{3}$$

Из теоремы следует, что для того чтобы построить квадратурную формулу (1) (или (2)) при любом n, надо построить многочлен $\omega(x)$, ортогональный на отрезке $[a,b]$ с весом $p(x)\Omega(x)$ ко всем многочленам степени не выше $n-1$.

Рассмотрим квадратурную формулу частного вида, а именно формулу численного интегрирования А. А. Маркова.

Случай, когда единственным фиксированным узлом является левый конец интервала интегрирования, т.е. $m=1$, $a_1=a$, исследован в работе [7]. Теперь обсудим вариант квадратурной формулы с двумя фиксированными узлами, в качестве которых возьмем концы интервала интегрирования, т.е. $m=2$, $a_1=a$, $a_2=b$. Теперь формула (1) запишется в виде

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)\,dx=D_1f(a)+D_2f(b)+\sum_{i=1}^n A_if(x_i)+R(f). \tag{4}$$

Алгебраическая степень точности этой формулы равна $2n+1$. Многочлен $\omega(x)$ будет принадлежать системе многочленов, ортогональных на отрезке $[a,b]$ с весом $(x-a)(x-b)p(x)$. Обозначим через $\Pi_n(x)$, $n=0,1,\,\dots$, данную систему многочленов. Для определенности будем считать их нормированными. Пусть α_n — старший коэффициент многочлена

$$\Pi_n(x)=\alpha_nx^n+\,\cdots\,.$$

Тогда для коэффициентов A_i, D_1 и D_2 справедливы формулы (см. (9.2.10) и (9.2.11) в [6]):

$$\begin{aligned}A_i&=-\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n\Pi_n'(x_i)\Pi_{n+1}(x_i)(x_i-a)(x_i-b)}=\\&=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}\Pi_n'(x_i)\Pi_{n-1}(x_i)(x_i-a)(x_i-b)},\quad i=1,2,\,\dots\,,n,\end{aligned} \tag{5}$$

$$D_1=\frac{1}{\Pi_n(a)(a-b)}\int\limits_a^b p(x)\Pi_n(x)(x-b)\,dx, \tag{6}$$

$$D_2=\frac{1}{\Pi_n(b)(b-a)}\int\limits_a^b p(x)\Pi_n(x)(x-a)\,dx. \tag{7}$$

Предположим, что

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{8}$$

и отрезок $[a,b]$ совпадает с отрезком $[0,1]$. Квадратурная формула Маркова (4) принимает вид

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}=D_1f(0)+D_2f(1)+\sum_{i=1}^n A_if(x_i)+R(f). \tag{9}$$

Построим систему многочленов, ортогональную на отрезке $[0,1]$ с весом

$$\rho(x)=p(x)x(1-x)=\sqrt{x(1-x)}\,. \tag{10}$$

1.1. Система многочленов, ортогональная на отрезке $[0,1]$ с весом $\sqrt{x(1-x)}$. Многочленами, ортогональными на отрезке $[0,1]$ с весом (10), являются смещенные многочлены Чебышёва второго рода (см., например, § 5, теорему 5.2 на стр. 53 в [3]), определяемые формулой

$$U_n^*(x) = U_n(2x-1), \quad x \in [0,1], \quad n = 0, 1, \dots , \tag{11}$$

где $U_n(y)$ — многочлены Чебышёва второго рода, которые при $y \in (-1,1)$ могут быть записаны через тригонометрические и обратные им функции в следующем виде:

$$U_n(y) = \frac{\sin\bigl((n+1)\arccos y\bigr)}{\sin(\arccos y)} = \frac{\sin\bigl((n+1)\arccos y\bigr)}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y = 2x-1. \tag{12}$$

Старший коэффициент многочлена $U_n(y)$ равен 2^n, а старший коэффициент смещенного многочлена $U_n^*(x)$

$$\alpha_n = 2^{2n}. \tag{13}$$

1.2. Абсциссы формулы Маркова. Узлами формулы Маркова являются корни многочлена $\Pi_n(x)$. Многочлен $\Pi_n(x)$ только множителем отличается от многочлена $U_n^*(x)$. Из тригонометрического представления (12) ортогонального многочлена $U_n(y)$ имеем, что нули многочлена Чебышёва второго рода $U_n(y)$ равны

$$y_i = \cos\frac{i\pi}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots , n. \tag{14}$$

Отсюда следует, что корни многочлена $\Pi_n(x)$ (т.е. корни смещенного многочлена Чебышёва $U_n^*(x)$), а значит, и абсциссы x_i, $i = 1, 2, \dots , n$, квадратурной формулы Маркова (9) будут такими:

$$x_i = \frac{1+y_i}{2} = \frac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots , n. \tag{15}$$

1.3. Коэффициенты формулы Маркова. Коэффициент D_1 квадратурной формулы Маркова (9) определяем по формуле (6). Интеграл в (6) вычислим с помощью правила замены переменной $x = \dfrac{1+y}{2}$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{-1}{U_n^*(0)} \int_0^1 \frac{(x-1)U_n^*(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{U_n^*(0)} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\, U_n^*(x)\,dx = \\ &= \frac{1}{2U_n(-1)} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\, U_n(y)\,dy = \frac{1}{2U_n(-1)} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{1+y}\, U_n(y)\,dy. \end{aligned} \tag{16}$$

Интеграл в (16) содержит ортогональный многочлен Чебышёва второго рода. Для его вычисления воспользуемся формулой 22.13.4 из [8]

$$\text{V.p.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}\,U_{n-1}(y)\,dy}{y-x} = -\pi T_n(x). \tag{17}$$

Здесь $T_n(x)$ — многочлен Чебышёва первого рода. Положим в (17) $x = -1$ и заменим n на $n+1$; учитывая равенства для значений многочленов Чебышёва первого и второго рода

$$U_n(-1) = (-1)^n(n+1), \quad T_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}T_{n+1}(1), \quad T_{n+1}(1) = 1,$$

которые вытекают из формул (18), (19), (14), (16) при $m = 0$, приведенных в теореме 4.4 из § 4 на стр. 48 в [3], находим

$$D_1 = \frac{(-1)^n(-\pi)(-1)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2(n+1)}\,. \tag{18}$$

Коэффициент D_2 определяем по формуле (7):

$$D_2 = \frac{1}{U_n^*(1)} \int_0^1 \frac{xU_n^*(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{U_n^*(1)} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, U_n^*(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2U_n(1)} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\, U_n(y)\,dy = \frac{1}{2U_n(1)} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-y}\, U_n(y)\,dy =$$
$$= \frac{-1}{2U_n(1)} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{y-1}\, U_n(y)\,dy.$$

Для вычисления последнего интеграла снова применим формулу (17). Положим в (17) $x = 1$ и заменим n на $n+1$; учитывая равенство для значений многочленов Чебышёва

$$U_n(1) = n+1$$

(см. формулу (18) в теореме 4.4 из § 4 на стр. 48 в [3]), окончательно находим

$$D_2 = \frac{\pi}{2(n+1)}\,. \tag{19}$$

Теперь перейдем к определению коэффициентов A_i формулы (9). Эти коэффициенты можно было бы вычислить непосредственно по формулам (5). Однако можно поступить другим способом. Для этого обратимся к квадратурной формуле наивысшей алгебраической степени точности (формуле типа Гаусса)

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n A_i' f(x_i), \tag{20}$$

для коэффициентов которой имеют место следующие представления:

$$A_i' = -\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{P_n'(x_i)P_{n+1}(x_i)} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{P_n'(x_i)P_{n-1}(x_i)} \tag{21}$$

(см., например, гл. 7, § 1, формулы (7.1.4), (7.1.5) в [6]), где

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

— многочлены, ортонормированные на отрезке $[a,b]$ с весом $\rho(x)$, x_i — корни ортогонального многочлена $P_n(x)$, лежащие внутри интервала (a,b). Предположим, что весовая функция $\rho(x)$ в (20) получается умножением веса $p(x)$ из (1) на многочлен $\Omega(x) = \prod\limits_{i=1}^m (x - a_i)$:

$$\rho(x) = p(x)\Omega(x) = p(x) \prod_{i=1}^m (x - a_i).$$

В этом случае ортонормированные многочлены $P_n(x)$ в (21) совпадают с ортонормированными многочленами $\Pi_n(x)$ в (5), а формулы (5) и (21) для коэффициентов A_i и A_i' отличаются друг от друга только множителем $\dfrac{1}{\Omega(x_i)} = \dfrac{1}{\prod\limits_{j=1}^m (x_i - a_j)}$, а именно:

$$A_i = A_i' \cdot \frac{1}{\Omega(x_i)}\,. \tag{22}$$

В нашем случае (т.е. при $m = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$)

$$\Omega(x) = x(x-1).$$

Рассмотрим квадратурную формулу типа Гаусса с неотрицательным весом

$$\tau(x) = -\rho(x) = -p(x)\Omega(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, x(1-x) = \sqrt{x(1-x)}.$$

Эта формула имеет вид

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x)\, dx = \frac{\pi}{4(n+1)} \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n+1} f\left(\frac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}\right) + R(f).$$

Она следует, например, из формулы (7.3.7), приведенной в гл. 7, § 3 на стр. 132 в [6], с помощью замены переменной $x = \dfrac{1+y}{2}$, переводящей отрезок $[-1,1]$ в отрезок $[0,1]$ $\big(y \in [-1,1], x \in [0,1]\big)$. Таким образом,

$$A_i' = -\frac{\pi}{4(n+1)} \sin^2 \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Множитель

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega(x_i)} = \frac{1}{x_i(x_i-1)} &= \frac{1}{\dfrac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}\left(\dfrac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2} - 1\right)} = \\ &= \frac{4}{\cos^2\dfrac{i\pi}{n+1} - 1} = -\frac{4}{\sin^2\dfrac{i\pi}{n+1}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Из (22), (23), (24) получаем окончательное выражение для коэффициентов A_i квадратурной формулы Маркова (9):

$$A_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{25}$$

Итак, мы доказали, что коэффициенты A_i квадратурной формулы Маркова (9) равны между собой.

1.4. Остаточный член формулы Маркова. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2n+2$, то остаточный член $R(f)$ формулы (9), согласно (3) и формуле среднего значения, может быть представлен в виде

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, x(x-1)\omega^2(x)\, dx = -\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, \omega^2(x)\, dx, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{26}$$

Напомним, что многочлен $\omega(x)$ степени n принадлежит системе многочленов, ортогональных на отрезке $[0,1]$ с весом $\rho(x) = \sqrt{x(1-x)}$. Многочлен $\omega(x)$ отличается от смещенного многочлена Чебышёва второго рода $U_n^*(x)$ (11), (12) только постоянным множителем, равным обратной величине старшего коэффициента α_n (13), а именно:

$$\omega(x) = \frac{1}{\alpha_n} U_n^*(x) = \frac{1}{2^{2n}} U_n^*(x).$$

Согласно теореме 5.2. из главы I, § 5 в [3], смещенный многочлен Чебышёва второго рода $U_n^*(x)$ имеет норму, равную

$$\left(\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, [U_n^*(x)]^2 dx\right)^{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Поэтому из (26) получаем

$$R(f) = -\frac{\pi}{2^{4n+3}} \cdot \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{27}$$

Теперь мы можем собрать вместе все полученные выше выражения для абсцисс (15), коэффициентов (18), (19), (25) и остаточного члена (27) квадратурной формулы. Таким образом, квадратурная формула Маркова (9) для отрезка $[0,1]$ с двумя фиксированными узлами $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$ и весовой функцией (8)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

имеет вид

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{2(n+1)}[f(0)+f(1)] + \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \frac{\pi}{2^{4n+3}}\,\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!},$$
$$0 \leqslant \eta \leqslant 1,$$

или, с использованием обозначения

$$\sum_{j=l}^{m}{}'' a_j = \frac{1}{2}a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{m-1} + \frac{1}{2}a_m, \quad m > l, \tag{28}$$

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}{}'' f(x_i) - \frac{\pi}{2^{4n+3}}\,\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{29}$$

Абсциссы квадратуры (29) вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_0 &= 0, \\ x_i &= \dfrac{1+\cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ x_{n+1} &= 1. \end{cases} \tag{30}$$

Узлы x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, являются нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода $U_n^*(x)$ (11), (12) степени n

$$U_n^*(x) = U_n(2x-1).$$

Алгебраическая степень точности формулы (29) равна $2n+1$.

2. Формула численного интегрирования Маркова для интегралов вида $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$**.** Приведем отрезок $[a, b]$ к отрезку $[0, 1]$ линейным преобразованием

$$x = (b-a)\alpha + a, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{31}$$

Обратное преобразование дается формулой

$$\alpha = \frac{x-a}{b-a}\,.$$

При преобразовании (31) функция

$$h(x) = \frac{b-a}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \tag{32}$$

преобразуется в функцию

$$p(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,.$$

Найдем интеграл, используя правило замены переменной:

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \int_0^1 \frac{f[(b-a)\alpha + a]}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,d\alpha.$$

Вычисляя интеграл по отрезку $[0, 1]$ от функции $\varphi(\alpha) = f\,[(b-a)\alpha + a]$ переменной α с помощью (29) и применяя для определения остаточного члена $R(\varphi)$ правило дифференцирования сложной функции

$$\varphi^{(2n+2)}(\alpha) = (b-a)^{2n+2} f^{(2n+2)}\,[(b-a)\alpha + a]\,,$$

получаем квадратурную формулу Маркова следующего вида:

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}{}'' f(x_i) - \frac{\pi}{2^{4n+3}}(b-a)^{2n+2}\cdot\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\,, \quad a \leqslant \eta \leqslant b. \tag{33}$$

Абсциссы квадратуры (33) есть

$$x_0 = a, \tag{34}$$

$$x_i = (b-a)\alpha_i + a, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{35}$$

$$\alpha_i = \frac{1 + \cos\dfrac{i\pi}{n+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{36}$$

$$x_{n+1} = b. \tag{37}$$

Символ $\sum''$ определен формулой (28). Для весовой функции (32) квадратурная формула будет иметь вид

$$\int\limits_a^b \frac{(b-a)f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{\pi(b-a)}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}{}'' f(x_i) - \frac{\pi}{2^{4n+3}}(b-a)^{2n+3}\cdot\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\,,$$
$$a \leqslant \eta \leqslant b.$$

3. Сходимость квадратурного процесса по формулам Маркова. Обозначим $Q_n(f)$ квадратурную сумму в (33):

$$Q_n(f) = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}{}'' f(x_i^{(n)}),$$

где $x_i^{(n)} = x_i$ (x_i определены по формулам (34)–(37)), а через $I(f)$ — интеграл в (33):

$$I(f) = \int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,.$$

Докажем, что для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$ квадратурный процесс по формулам Маркова

$$I(f) = Q_n(f) + R_n(f), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

сходится, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f).$$

Доказательство. Во-первых, поскольку квадратурная формула Маркова является интерполяционной, то квадратурный процесс (38) является интерполяционно-квадратурным. Для интерполяционно-квадратурных процессов сходимость имеет место всегда, когда $f(x)$ — любой многочлен. Во-вторых, все коэффициенты квадратурной формулы Маркова (33) положительны и их сумма от n не зависит. Поэтому выполнены все условия теоремы В. А. Стеклова о сходимости последовательности квадратурных формул (см., например, гл. 3, § 7, стр. 279–284 в [9], или гл. 12, § 3, теоремы 8, 9, 10, стр. 257–259 в [6], или гл. 2, § 6, теорему 5 на стр. 173 в [5], или § 5 в [10]).

4. Применение формулы численного интегрирования Маркова для приближенного вычисления коэффициентов смещенного ряда Чебышёва. Рассмотрим действительную функцию $f(x)$, которая определена на отрезке $[0,1]$ и квадрат которой интегрируем на $[0,1]$ с весом (8)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,.$$

Используя обычное обозначение для такого функционального пространства $L_2\big(0,1;p(x)\big)$, можно записать

$$f(x) \in L_2\Big(0,1;\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\Big).$$

Будем использовать систему смещенных многочленов Чебышёва первого рода $T_n^*(x)$ на отрезке $[0,1]$, которые простым образом связаны с обычными многочленами Чебышёва T_n:

$$T_n^*(x) = T_n(2x-1), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Последовательность многочленов $T_n^*(x)$ ортогональна на отрезке $[0,1]$ с весом (8), т.е.

$$(T_i^*, T_j^*) = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, T_i^*(x) T_j^*(x)\, dx = 0 \tag{39}$$

при $i \neq j$. При этом

$$(T_i^*, T_i^*) = ||T_i^*||^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & i > 0, \\ \pi, & i = 0 \end{cases} \tag{40}$$

(см., например, § 5, теорему 5.2 на стр. 53 в [3]).

Для функции $f(x) \in L_2\Big(0, 1; \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\Big)$ рассмотрим ряд Фурье по смещенным многочленам Чебышёва первого рода $T_i^*(x)$

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \tag{41}$$

где символ $\sum{}'$ определен формулой

$$\sum_{j=l}^{m}{}' a_j = \frac{1}{2} a_l + a_{l+1} + \dots + a_m, \quad m \geqslant l. \tag{42}$$

Коэффициенты ряда определяются с помощью выражения

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x) T_i^*(x)\, dx, \quad i = 0, 1, \dots . \tag{43}$$

Ряд (41) называется также *смещенным рядом Чебышёва* функции $f(x)$. С помощью подстановки

$$x = \cos^2 \frac{t}{2} \tag{44}$$

и соотношения

$$T_i^*(x) = T_{2i}\big(\sqrt{x}\big), \quad x \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \dots,$$

(см. § 1, теорему 1.13 на стр. 20 в [3]) получаем равносильную формулу для коэффициентов

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f\Big(\cos^2 \frac{t}{2}\Big) \cos it\, dt, \quad i = 0, 1, \dots . \tag{45}$$

Подставим (44) в $T_i^*(x)$:

$$T_i^*\Big(\cos^2 \frac{t}{2}\Big) = T_{2i}\Big(\cos \frac{t}{2}\Big) = \cos\Big(2i \arccos \cos \frac{t}{2}\Big) = \cos\Big(2i \cdot \frac{t}{2}\Big) = \cos(it). \tag{46}$$

Коэффициент Чебышёва (45) функции $f(x)$ совпадает с тригонометрическим коэффициентом Фурье четной функции $\psi(t) = f\Big(\cos^2 \dfrac{t}{2}\Big)$. Отсюда и из (46) следует, что смещенный ряд Чебышёва (41) функции $f(x)$ при условии $x = \cos^2 \dfrac{t}{2}$

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^* \cdot \cos it$$

одновременно является тригонометрическим рядом Фурье четной функции $\psi(t) = f\Big(\cos^2 \dfrac{t}{2}\Big)$.

В работе [7] приведены теоремы об условиях равномерной сходимости смещенных рядов Чебышёва. Эти теоремы вытекают из признака Дирихле–Жордана (см. гл. XIX, § 4, п. 699 в [11]) и теоремы Дини–Липшица (см. гл. 8, § 5, п. 5 в [12]) о равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Применим квадратурную формулу Маркова (29) с узлами (30) для вычисления интеграла (43), принимая в качестве подынтегральной функции выражение $f(x)T_i^*(x)$:

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}{}'' f(x_j)T_i^*(x_j) - \frac{\pi}{2^{4n+3}}\,\frac{(f\cdot T_i^*)^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\right], \quad 0\leqslant \eta\leqslant 1,$$

или

$$a_i^* = \frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}{}'' f(x_j)T_i^*(x_j) + R(f\cdot T_i^*), \quad i=0,1,\,\ldots\,, \tag{47}$$

где

$$R(f\cdot T_i^*) = -\frac{1}{2^{4n+2}}\,\frac{(f\cdot T_i^*)^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}, \quad 0\leqslant\eta\leqslant 1. \tag{48}$$

Абсциссы, входящие в (47), есть

$$x_0 = 0, \tag{49}$$

$$x_j = \frac{1+\cos\dfrac{j\pi}{n+1}}{2}, \quad j=1,2,\,\ldots\,,n, \tag{50}$$

$$x_{n+1} = 1. \tag{51}$$

Значения смещенного многочлена Чебышёва в (47) равны

$$T_i^*(0) = T_i(-1) = (-1)^i, \tag{52}$$

$$T_i^*(x_j) = T_i(2x_j-1) = \cos\frac{ij\pi}{n+1}, \quad j=1,2,\,\ldots\,,n, \tag{53}$$

$$T_i^*(1) = T_i(1) = 1. \tag{54}$$

Подставим (52), (53), (54) в (47):

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{(-1)^i}{n+1}f(0) + \frac{1}{n+1}f(1) + \frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{ij\pi}{n+1}f(x_j) + R(f\cdot T_i^*),$$

$$i=0,1,\,\ldots\,.$$

Отбрасывая остаточный член $R(f\cdot T_i^*)$, получаем приближенное значение коэффициента смещенного ряда Чебышёва

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \approx \frac{(-1)^i}{n+1}f(0) + \frac{1}{n+1}f(1) + \frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{ij\pi}{n+1}f(x_j), \quad i=0,1,\,\ldots\,. \tag{55}$$

Формула (55) будет давать точное значение коэффициента Чебышёва a_i^* функции $f(x)$, если $f(x)$ является многочленом степени не выше $2n+1-i$.

Предположим, что $f(x)$ — многочлен степени k. Ряд Чебышёва многочлена степени k тождественно совпадает со своей k–й частичной суммой и многочлен $f(x)$ будет равен этой частичной сумме:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*\cdot T_i^*(x). \tag{56}$$

Здесь $a_k^*\cdot T_k^*(x)$ — член ряда Чебышёва с максимальным номером, содержащийся в частичной сумме (56), a_k^* — коэффициент Чебышёва с максимальным номером, входящий в частичную сумму. При вычислении a_k^* под знаком интеграла в (55) будет многочлен $f(x)T_k^*(x)$ степени $2k$. Для того чтобы коэффициент a_k^* вычислялся точно по квадратурной формуле (55), необходимо, чтобы алгебраическая степень точности квадратуры (55) была не менее $2k$, т.е.

$$2n+1\geqslant 2k, \quad n\geqslant k-\frac{1}{2}, \quad n\geqslant k.$$

Поэтому число нефиксированных узлов квадратурной формулы (55) должно быть не менее степени многочлена $f(x)$ или, другими словами, не менее максимального номера коэффициента Чебышёва.

5. Частичная сумма смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова. Рассмотрим k–ую частичную сумму смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$

$$\sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \quad k > 0, \tag{57}$$

(символ $\sum'$ определен формулой (42)). Известно (см., например, гл. I, § 5, теорему 5.3 в [3]), что эта сумма является для функции $f(x)$ многочленом степени k наилучшего среднеквадратичного приближения на отрезке $[0,1]$, т.е. многочленом наилучшего приближения в пространстве $L_2\left(0,1;\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\right)$. Так будет, если в (57) использовать точные значения коэффициентов Чебышёва. Здесь мы обсудим свойства частичной суммы (57), когда точные значения коэффициентов a_i^* не даны и мы вынуждены прибегнуть к их приближенным значениям.

Пусть коэффициенты a_i^* вычислены по квадратурной формуле Маркова (47) или (55) с двумя фиксированными узлами и числом n нефиксированных узлов, равным номеру частичной суммы ряда k. Подставляя квадратурную сумму (47) при $n = k$ в (57) и опуская остаточный член, получим многочлен степени k

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' \Big(\frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T_i^*(x_j)\Big) T_i^*(x), \tag{58}$$

где

$$x_j = \frac{1+\cos\dfrac{j\pi}{k+1}}{2}, \quad j = 0, 1, \ldots, k+1. \tag{59}$$

Выражения (49), (51) для узлов формулы Маркова, совпадающих с концами отрезка $[0,1]$, и выражение (50) при $n = k$ для нефиксированных узлов мы объединили в одну формулу (59). В ней все узлы перенумерованы в порядке убывания. Напомним, что x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, являются нулями смещенного многочлена Чебышёва $U_k^*(x)$ второго рода (11) степени k, а числа

$$u_{k,j} = 2x_j - 1 = \cos\frac{j\pi}{k+1}, \quad j = 1, 2, \ldots k,$$

являются нулями обычного многочлена Чебышёва U_k второго рода (12) (см., например, формулу (14) в п. 1.2). В узлах x_j, $j = 0, 1, \ldots, k+1$, (59) смещенный многочлен Чебышёва $T_{k+1}^*(x)$ достигает своих экстремальных на отрезке $[0,1]$ значений (см. фигурирующие ниже равенства (62)).

Формула численного интегрирования Маркова (29), которую мы использовали для вычисления коэффициентов Чебышёва $a_i^*[f]$, является интерполяционной. В частности, коэффициенты этой формулы выражаются через интегралы от произведения весовой функции и лагранжевых коэффициентов (фундаментальных многочленов интерполирования (см., например, (6), (7)). Лагранжевы коэффициенты входят в представление интерполяционного многочлена $J_{k+1}^*(x)$ степени $k+1$, приближающего подынтегральную функцию $f(x)$ из (29) по узлам (59), вместе с выделенными в качестве множителей значениями интерполируемой подынтегральной функции в узлах (59). Эти интегралы с помощью известного тождества Кристоффеля–Дарбу для ортогональных многочленов преобразуются к более удобному для вычисления виду (5). Существуют и другие представления интерполяционного многочлена, которые будут весьма полезными в наших дальнейших исследованиях, к которым мы сейчас переходим.

5.1. Построение полинома наилучшего равномерного приближения функции на множестве корней многочлена $x(1-x)U_k^*(x)$. Для более подробного изучения частичной суммы (58) смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$ нам понадобится другой вид интерполяционного многочлена $J_{k+1}^*(x)$ степени $k+1$ с узлами интерполирования x_j, определяемыми по (59). Для такого многочлена справедливо следующее представление, которое вытекает из формулы (77), приведенной в гл. I, § 7, в теореме 7.11 на стр. 94 в [3][2]:

$$J^*_{k+1}(x) = J_{k+1}(2x-1) = \frac{2}{k+1} x(x-1) U^*_k(x) \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j) \frac{1}{x-x_j}\,. \tag{60}$$

Поскольку старший коэффициент многочлена $U^*_k(x)$ равен 2^{2k}, то коэффициент при x^{k+1} в $J^*_{k+1}(x)$ есть

$$\frac{2^{2k+1}}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j).$$

Так как $T^*_{k+1}(x) = 2^{2k+1} x^{k+1} + \cdots$, то разность двух многочленов с одинаковыми старшими членами

$$K^*_k(x) = J^*_{k+1}(x) - \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j) \right) T^*_{k+1}(x) \tag{61}$$

является многочленом степени не выше k. Вспомним, что в узлах x_m, $m = 0, 1, \ldots, k+1$, (59) смещенный многочлен Чебышёва первого рода $T^*_{k+1}(x)$ достигает своих экстремальных на отрезке $[0,1]$ значений:

$$T^*_{k+1}(x_m) = T_{k+1}(2x_m - 1) = T_{k+1}\Bigl(\cos \frac{m\pi}{k+1}\Bigr) = T_{k+1}(u_{k,m}) = (-1)^m \tag{62}$$

(см. гл. I, § 4, теорему 4.2, формулу (6) на стр. 46 в [3]). Отсюда следует, что значения многочлена $K^*_k(x)$ в узлах x_m, $m = 0, 1, \ldots, k+1$, равны

$$K^*_k(x_m) = f(x_m) - (-1)^m \cdot \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j).$$

Поэтому разность $f(x) - K^*_k(x)$ в узлах x_m, $m = 0, 1, \ldots, k+1$, принимает поочередно значения $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, где

$$\varepsilon = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j).$$

Иными словами, многочлен $K^*_k(x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$f(x_m) - K^*_k(x_m) = (-1)^m \varepsilon, \quad m = 0, 1, \ldots, k+1.$$

Из теоремы 6.2, являющейся следствием основной теоремы Чебышёва об альтернансе и приведенный в гл. I, § 6 в [3], следует, что $K^*_k(x)$ является многочленом наилучшего равномерного приближения степени k для функции $f(x)$ на множестве узлов x_m, $m = 0, 1, \ldots, k+1$, и что $|\varepsilon|$ представляет собой погрешность наилучшего приближения функции $f(x)$ многочленом $K^*_k(x)$ на этом множестве узлов.

5.2. Связь частичной суммы ряда Чебышёва функции с наилучшим равномерным приближением этой функции на множестве корней многочлена $x(1-x)U^*_k(x)$. Установим связь частичной суммы $L_k(x)$ (58) ряда Чебышёва с многочленом наилучшего равномерного приближения $K^*_k(x)$.

Представим многочлен $K^*_k(x)$ другой, равносильной, формулой. Для этого воспользуемся вторым видом многочлена $J^*_{k+1}(x)$ (60), который следует из формулы (78) в уже упомянутой теореме 7.11 из главы I, § 7 в [3]:

$$J^*_{k+1}(x) = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1}{}'' \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j) T^*_i(x_j) \right) T^*_i(x). \tag{63}$$

Этот вид показывает, что полином $J^*_{k+1}(x)$ разложен по системе многочленов $T^*_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, k+1$, ортогональных на точечном множестве x_m, $m = 0, 1, \ldots, k+1$, (59) в смысле скалярного произведения

$$(T^*_i, T^*_l) = \sum_{m=0}^{k+1}{}'' T^*_i(x_m) T^*_l(x_m),$$

[2] В настоящем и следующем подразделе 5.2 мы воспользуемся схемой рассуждений из книги С. Пашковского [3], примененной им в гл. I, § 7 при доказательстве теоремы 7.13 о многочлене наилучшего равномерного приближения.

при этом использованы коэффициенты Фурье полинома $J^*_{k+1}(x)$ относительно этой системы ортогональных на $\{x_m\}$ многочленов

$$b^*_i = \frac{1}{||T^*_i||^2} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j)T^*_i(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, k+1.$$

Об ортогональности многочленов Чебышёва на конечном множестве точек (59) см., например, гл. I, § 5, теорему 5.7 в [3]. Из (63) и общей теоремы о среднеквадратичном приближении алгебраическими многочленами в дискретном случае следует, что многочлен $J^*_{k+1}(x)$ является многочленом наилучшего дискретного среднеквадратичного приближения функции $f(x)$, заданной на дискретном множестве точек x_j, $j = 0, 1, \dots, k+1$.

Подставим (63) в равенство $K^*_k(x) = J^*_{k+1}(x) - \varepsilon T^*_{k+1}(x)$ (см. (61)) и получим

$$K^*_k(x) = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1}{}'' \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j)T^*_i(x_j) \right) T^*_i(x) - \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' (-1)^j f(x_j) \right) T^*_{k+1}(x). \tag{64}$$

Учитывая равенства

$$T^*_{k+1}(x_j) = T_{k+1}(2x_j - 1) = T_{k+1}(u_{k,j}) = (-1)^j,$$

которые вытекают из (62) при $m = j$, вторую сумму (вычитаемое) в (64) можно записать так:

$$\frac{1}{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j)T^*_{k+1}(x_j) \right) T^*_{k+1}(x). \tag{65}$$

Выражение (65) совпадает с i–ым слагаемым, указанным под знаком первой суммы с двумя штрихами в (64) и взятым при $i = k+1$. Это приводит к окончательному виду для многочлена $K^*_k(x)$:

$$K^*_k(x) = \frac{2}{k+1} \sum_{i=0}^{k}{}' \left(\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j)T^*_i(x_j) \right) T^*_i(x). \tag{66}$$

Сопоставляя правые части (58) и (66), мы приходим к равенству

$$L_k(x) = K^*_k(x). \tag{67}$$

Напомним, что число нефиксированных узлов в квадратурной формуле Маркова, с помощью которой вычисляются коэффициенты частичной суммы (57) смещенного ряда Чебышёва, равно номеру частичной суммы ряда k.

Таким образом, доказано, что частичная сумма $L_k(x)$ (58) смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова (47) или (55) с двумя фиксированными узлами и числом нефиксированных узлов, равным номеру частичной суммы ряда k, является многочленом степени k наилучшего равномерного приближения этой функции на множестве узлов x_j, $j = 0, 1, \dots, k+1$, (59), т.е. на множестве корней многочлена $x(1-x)U^*_k(x)$.

Замена переменной по формуле $x = \dfrac{1+y}{2}$ преобразует многочлен $K^*_k(x)$ переменной x на отрезке $[0, 1]$ в многочлен $K_k(y) = K^*_k\left(\dfrac{1+y}{2}\right)$ переменной y на отрезке $[-1, 1]$, который является многочленом степени k наилучшего равномерного приближения функции $f(y)$ на множестве узлов $\{y_j = 2x_j - 1,\ j = 0, 1, \dots, k+1\}$, заключенных на $[-1, 1]$. Как пишет Стефан Пашковский в гл. I, § 7, на стр. 100 в [3], "… для достаточно регулярной функции f многочлен K_n близок многочлену W_n наилучшего приближения на всем отрезке $[-1, 1]$".

5.3. Зависимость между коэффициентами Чебышёва и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова. Формула (58) дает простое выражение для коэффициентов Чебышёва многочлена $K^*_k(x)$ (67):

$$a^*_i[K^*_k(x)] = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' f(x_j)T^*_i(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, k. \tag{68}$$

Подставим в (68) разложение функции $f(x)$ в смещенный ряд Чебышёва

$$f(x) = {\sum_{l=0}^{\infty}}' a_l^*[f] \cdot T_l^*(x).$$

Получим

$$a_i^*[K_k^*] = \frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' \left({\sum_{l=0}^{\infty}}' a_l^*[f] \cdot T_l^*(x_j) \right) T_i^*(x_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Поменяем местами порядок суммирования:

$$a_i^*[K_k^*] = \frac{2}{k+1} {\sum_{l=0}^{\infty}}' a_l^*[f] {\sum_{j=0}^{k+1}}'' T_l^*(x_j) T_i^*(x_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{69}$$

Вычислим внутреннюю сумму с двумя штрихами в (69). Для этого рассмотрим интегралы

$$\int_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad r = 0, 1, \ldots, k+1.$$

Так как $r+i \leqslant 2k+1$, то в квадратурной формуле Маркова (29) при $n = k$ и $f(x) = T_r^*(x) T_i^*(x)$ остаточный член обращается в нуль, т.е.

$$\int_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \frac{\pi}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j); \tag{70}$$

абсциссы в (70) x_j, $j = 0, 1, \ldots, k+1$, определены по (59). В силу ортогональности смещенных многочленов Чебышёва (39), (40) левая часть (70), а следовательно, и правая часть (70) будут равны

$$\frac{\pi}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & r \neq i, \\ \pi & r = i = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & r = i > 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & r \neq i, \\ 2 & r = i = 0, \\ 1 & r = i > 0. \end{cases} \tag{71}$$

Далее, получим простое соотношение между значениями многочленов Чебышёва первого рода в точках x_j, $j = 0, 1, \ldots, k+1$, (59).

Рассмотрим

$$T_l^*(x_j) = T_l(2x_j - 1) = T_l\left(\cos \frac{j\pi}{k+1}\right) = \cos \frac{lj\pi}{k+1}.$$

Пусть $l = 2q(k+1) \pm r$, где q и r — произвольные целые неотрицательные числа. Тогда

$$T_l^*(x_j) = \cos \frac{\left[2q(k+1) \pm r\right] j\pi}{k+1} = \cos\left(2qj\pi \pm \frac{rj\pi}{k+1}\right) = \cos \frac{rj\pi}{k+1}. \tag{72}$$

Косинус в правой части (72) равен $T_r^*(x_j)$. Таким образом, для произвольных целых неотрицательных чисел q и r справедливо равенство

$$T_{2q(k+1)\pm r}^*(x_j) = T_r^*(x_j). \tag{73}$$

Для каждого $l \geqslant 0$ существуют такие целые числа $q \geqslant 0$ и $0 \leqslant r < 2(k+1)$, что

$$l = 2q(k+1) + r. \tag{74}$$

Если $0 \leqslant r \leqslant k+1$, то положим $l = 2q(k+1)+r$. Если $k+1 < r$, то преобразуем (74) следующим образом:

$$l = \big[2q(k+1) + 2(k+1)\big] - 2(k+1) + r = 2(q+1)(k+1) - \big[2(k+1) - r\big].$$

Обозначим $r_1 = 2(k+1) - r$. Тогда $0 < r_1 \leqslant k$ и $l = 2(q+1)(k+1) - r_1$. Таким образом, для каждого $l \geqslant 0$ существуют такие целые числа $\bar{q} \geqslant 0$ и $-k \leqslant \bar{r} \leqslant k+1$, что

$$l = 2\bar{q}(k+1) + \bar{r}, \tag{75}$$

где

$$\bar{q} = \begin{cases} q, & r \leqslant k+1, \\ q+1, & r > k+1, \end{cases} \qquad \bar{r} = \begin{cases} r, & r \leqslant k+1, \\ -r_1 = -\big[2(k+1) - r\big], & r > k+1. \end{cases}$$

Из (73), (75) следует соотношение между значениями многочленов Чебышёва первого рода в точках (59)

$$T_l^*(x_j) = T_{2\bar{q}(k+1)+\bar{r}}^*(x_j) = T_{|\bar{r}|}^*(x_j). \tag{76}$$

Вернемся теперь к формуле (69) для коэффициента Чебышёва $a_i^*[K_k^*]$. Ввиду (71) для фиксированного $0 < i \leqslant k$ внутренняя сумма в (69) отлична от нуля только при

$$l = i, \quad 2(k+1) - i, \quad 2(k+1) + i, \quad 4(k+1) - i, \quad 4(k+1) + i, \, \ldots \,,$$

т.е. при

$$l = i, \quad 2k+2-i, \quad 2k+2+i, \quad 4k+4-i, \quad 4k+4+i, \ldots .$$

Из (69), (76), (71) вытекает, что

$$a_i^*[K_k^*] = a_i^*[f] + a_{2k+2-i}^*[f] + a_{2k+2+i}^*[f] + a_{4k+4-i}^*[f] + a_{4k+4+i}^*[f] + \cdots . \tag{77}$$

В частности, при $i = k$

$$a_k^*[K_k^*] = a_k^*[f] + a_{k+2}^*[f] + a_{3k+2}^*[f] + a_{3k+4}^*[f] + a_{5k+4}^*[f] + \cdots . \tag{78}$$

Ввиду (71) для $i = 0$ внутренняя сумма в правой части (69) отлична от нуля только при

$$l = 0, \quad 2(k+1), \quad 4(k+1), \quad 6(k+1), \quad 8(k+1), \ldots .$$

Из (69), (76), (71) получаем

$$a_0^*[K_k^*] = a_0^*[f] + 2a_{2k+2}^*[f] + 2a_{4k+4}^*[f] + 2a_{6k+6}^*[f] + 2a_{8k+8}^*[f] + \cdots . \tag{79}$$

На основании формул (77), (78), (79) можно сделать вывод о том, что если последовательность $\{a_i^*[f]\}$ достаточно регулярно стремится к нулю, то коэффициент

$$a_i^*[K_k^*] \approx a_i^*[f]$$

и имеет наибольшую абсолютную погрешность при $i = k$; при $i = k-1, \, k-2, \, \ldots \, , 2, 1$ эта погрешность меньше; наименьшую погрешность имеет коэффициент $a_0^*[K_k^*]$.

6. О погрешности приближения функции частичной суммой ряда Чебышёва. Выразим коэффициенты Чебышёва, входящие в k-ую частичную сумму ряда

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x) + r_k(x, f),$$

по квадратурной формуле Маркова (47) с остаточным членом (48) при $n = k$. С учетом обозначений, принятых в (58), (68), имеем

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' \big(a_i^*[K_k^*] + R_i\big) T_i^*(x) + r_k(x, f) = K_k^*(x) + {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(x) + r_k(x, f), \tag{80}$$

где

$$K_k^*(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[K_k^*] \cdot T_i^*(x),$$

$$R_i = R(f \cdot T_i^*) = -\frac{1}{2^{4k+2}} \frac{(f \cdot T_i^*)^{(2k+2)}(\eta)}{(2k+2)!} = -\frac{1}{2^{4k+2}(2k+2)!} \sum_{l=0}^{i} C_{2k+2}^l \cdot f^{(2k+2-l)}(\eta) \cdot T_i^{*(l)}(\eta). \tag{81}$$

Отсюда

$$f(x) - K_k^*(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(x) + r_k(x, f). \tag{82}$$

Формула (82) показывает, что погрешность аппроксимации функции частичной суммой ряда Чебышёва складывается из остаточного члена ряда и ошибок из-за неточностей в приближенных значениях его коэффициентов, входящих в частичную сумму.

Обратимся, в качестве примера использования соотношения (82), к задаче Коши (I), (II) на сегменте $[x_0, x_0 + h]$, $h \leqslant X$. Будем рассматривать правую часть уравнения (I), взятую на решении $y(x)$ задачи, $F(x) = f\big(x, y(x), y'(x)\big)$ как функцию $\Phi(\alpha)$ переменной α:

$$F(x) = F(x_0 + \alpha h) = \Phi(\alpha), \quad \alpha \in [0, 1]. \tag{83}$$

Мы предполагаем, что правая часть дифференциального уравнения (I) имеет в рассматриваемой области изменения аргументов x, y, y' непрерывные ограниченные частные производные по аргументам x, y, y' до порядка $2k + 2$ включительно. Тогда функция $F(x) = f\big(x, y(x), y'(x)\big)$ имеет непрерывную ограниченную производную порядка $2k + 2$ на $[x_0, x_0 + X]$ и для $p + 1 \leqslant 2k + 2$

$$||F^{(p+1)}(x)|| \leqslant M_{p+1}, \quad x \in [x_0, x_0 + X].$$

Для функции $\Phi(\alpha)$ на $[0, 1]$ имеем

$$\Phi^{(p+1)}(\alpha) = h^{p+1} F^{(p+1)}(x)$$

и

$$||\Phi^{(p+1)}(\alpha)|| \leqslant h^{p+1} M_{p+1}.$$

Разложим $\Phi(\alpha)$ в смещенный ряд Чебышёва и аппроксимируем $\Phi(\alpha)$ k–ой частичной суммой ряда. Тогда формула (80) для функции $\Phi(\alpha)$ примет вид

$$\Phi(\alpha) = K_k^*(\alpha) + \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi). \tag{84}$$

Так как $\Phi(\alpha)$ имеет непрерывные ограниченные производные до порядка $2k + 2$, то, как следует из (81), при $h \to 0$ $R_i = R(\Phi \cdot T_i^*) = O\big(h^{2k+2-i}\big)$; в частности, $R_k = O(h^{k+2})$. Поэтому второе слагаемое в (84) имеет порядок $O(h^{k+2})$ при $h \to 0$, т.е.

$$\left|\left| \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(\alpha) \right|\right|_\infty = O(h^{k+2}). \tag{85}$$

Из (84) имеем

$$||\Phi(\alpha) - K_k^*(\alpha)|| \leqslant \left|\left| \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(\alpha) \right|\right| + ||r_k(\alpha, \Phi)||. \tag{86}$$

Нам потребуется оценка остаточного члена $r_k(\alpha, \Phi)$ ряда Чебышёва для функции $\Phi(\alpha)$. В эту оценку входит верхняя граница $h^{p+1} M_{p+1}$ производной от Φ некоторого порядка $p + 1$. При $k > p$ для k–ого остатка ряда справедливо следующее неравенство:

$$||r_k(\alpha, \Phi)||_\infty = \max_{\alpha \in [0,1]} |r_k(\alpha, \Phi)| = \max_{x \in [x_0, x_0 + h]} |r_k(x, F)| \leqslant \frac{c_p M_{p+1} \ln k}{k^{p+1}} h^{p+1}, \tag{87}$$

где c_p — постоянная, зависящая от p и не зависящая от k (см. формулу (196) в [7]).

Еще одна оценка остаточного члена ряда Чебышёва, которая следует из теории интерполирования, имеет такой вид:

$$\max_{\alpha\in[0,1]} |r_k(\alpha,\Phi)| = \max_{x\in[x_0,x_0+h]} |r_k(x,F)| \leqslant \frac{c_1 M_{k+1}\ln k}{2^{2k+1}(k+1)!}\, h^{k+1}, \tag{88}$$

где $\max\limits_{x\in[x_0,x_0+h]} |F^{(k+1)}(x)| \leqslant M_{k+1}$, $c_1 = \text{const}$ (см. формулу (197) в [7]).

Из (85), (86), (88) следует оценка погрешности аппроксимации функции $\Phi(\alpha)$ (83) частичной суммой смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова, а именно:

$$||\Phi(\alpha) - K_k^*(\alpha)||_\infty \leqslant \frac{c_1 M_{k+1}\ln k}{2^{2k+1}(k+1)!}\, h^{k+1} + O(h^{k+2}).$$

Используя (87) вместо (88), приходим к неравенству

$$||\Phi(\alpha) - K_k^*(\alpha)||_\infty \leqslant \frac{c_p M_{p+1}\ln k}{k^{p+1}}\, h^{p+1} + O(h^{k+2}), \quad k > p. \tag{89}$$

Из (89) видно, что чем более гладкая функция (т.е. чем больше она имеет непрерывных производных), тем быстрее стремится к нулю погрешность аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1988.
3. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
4. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972.
5. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1998.
6. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
7. *Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 2. 44-70.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
9. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Владимиров В.С., Маркуш И.И.* Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки. М.: Наука, 1981.
11. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III. М.: Наука, 1970.
12. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

Поступила в редакцию
11.10.2004