

УДК 519.6

О ТОЧНОСТИ ГАЛЕРКИНСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО СЛАБОСЖИМАЕМОГО ГАЗА

К. А. Жуков¹

Построено галеркинское приближение для линейной системы уравнений, описывающей нестационарное движение вязкого слабосжимаемого газа в случае двух пространственных переменных. Получена оценка точности в зависимости от параметра, характеризующего сжимаемость газа, и вязкости газа.

Ключевые слова: вязкий слабосжимаемый газ, метод конечных элементов.

1. Начально-краевая задача. Рассмотрим линейную систему уравнений, описывающую нестационарное движение вязкого слабосжимаемого баротропного газа.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + k \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p &= \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Искомые величины: давление p и вектор скорости $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, являются функциями переменных Эйлера $(t, x) \in Q = [0, T] \times \Omega$.

В уравнения входит функция $\mathbf{f}$ (вектор внешних сил), являющаяся известной функцией переменных Эйлера. Через k обозначена положительная константа, характеризующая сжимаемость газа [4, 10]. Будем считать газ слабосжимаемым, если $k \gg 1$. Величина μ ($\mu < 1$) является положительной константой, характеризующей вязкость газа. Техника получения оценки близости точного и приближенного решения такова, что оценки неравномерны по μ при $\mu > 0$. Поэтому будем считать, что величина μ отделена от нуля.

Дополним систему (1.1) начальными и граничными условиями

$$(p, \mathbf{u})|_{t=0} = (p_0, \mathbf{u}_0), \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{u}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Задачи, аналогичные задаче (1.1), (1.2), рассматривались в работах [3, 5, 8, 11]. В этих монографиях были построены различные разностные схемы и проведены оценки точности получаемых сеточных решений. В работах [1, 2] построена и исследована экономичная конечно-разностная схема для задачи (1.1), (1.2). Однако конечно-разностный подход предъявляет большие требования гладкости к точному решению. В этой работе исследуются полудискретные схемы, построенные методом Галеркина, предъявляющие меньшие требования к гладкости точного решения. В дальнейшем будем предполагать существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1), (1.2), при этом равенства (1.1) понимаются в смысле интегральных тождеств при $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $p \in L_2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} \eta \, d\Omega + k \int_{\Omega} \eta \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega &= 0 \quad \forall \eta \in L_2(\Omega), \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \vartheta \, d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vartheta \, d\Omega + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \vartheta \, d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \vartheta \, d\Omega \quad \forall \vartheta \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \end{aligned}$$

Выражение $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение, а $\|\cdot\|$ — норму в пространстве $L_2(\Omega)$.

2. Галеркинское приближение. Пусть Ω ограниченная, односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^2$, граница которой S — кусочно-гладкая кривая класса C^2 . И пусть на Ω задана триангуляция, удовлетворяющая обычным условиям квазиравномерности.

Узлами сетки будем называть вершины треугольников триангуляции. Через Ω_h будем обозначать совокупность узлов, принадлежащих области Ω . Разобьем каждый треугольник средними линиями на

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: itshenk@mech.math.msu.su

четыре части. Полученную в результате такой триангуляции сетку обозначим через $\Omega_{h/2}$. Будем считать, что для каждой сетки все узлы перенумерованы: n -й узел сетки — (x^n, y^n) .

Каждому узлу (x^n, y^n) сетки $\Omega_{h/2}$ поставим в соответствие функцию $\varphi_n(x, y)$, равную единице в данном узле, нулю — во всех прочих узлах и линейную в каждом “малом” треугольнике. Узлу (x^n, y^n) сетки Ω_h поставим в соответствие некоторый “большой” треугольник, вершиной которого он является, так, чтобы различным узлам соответствовали различные “большие” треугольники. Теперь каждому такому треугольнику сопоставим функцию $\psi_n(x, y)$, равную единице, если (x, y) принадлежит “большому” треугольнику, и нулю в противном случае.

Множество линейных комбинаций пар функций $\varphi_n(x, y)$ образуют конечномерное пространство. Обозначим его $\mathring{\mathbf{U}}_h$. Пары функций $\varphi_n(x, y)$ образуют базис в этом пространстве. Аналогично определим пространство P_h , как множество линейных комбинаций функций $\psi_n(x, y)$, которые образуют базис в этом пространстве.

Произведем дискретизацию по пространственным переменным, используя метод конечных элементов. Через $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}$ обозначим полудискретное решение задачи (1.1), (1.2) $\forall t \in [0, T]$ $\tilde{p} \in P_h$, а $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathring{\mathbf{U}}_h$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}, \psi \right) + k(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}, \psi) &= 0 \quad \forall \psi \in P_h, \\ \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}, \varphi \right) - (\tilde{p}, \operatorname{div} \varphi) + \mu(\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \varphi) &= (\mathbf{f}, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{\mathbf{U}}_h. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Начальные и граничные условия зададим в виде

$$(\tilde{p}(0), \psi) = (p_0, \psi) \quad \forall \psi \in P_h, \quad (\nabla \tilde{\mathbf{u}}(0), \nabla \varphi) = (\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{\mathbf{U}}_h. \quad (2.2)$$

Граничные условия для решения $\tilde{\mathbf{u}}$ будут выполняться автоматически.

Введем в $\mathring{\mathbf{U}}_h$ и P_h сеточные скалярные произведения

$$(\varphi, \eta)_u = \sum_{(x_n, y_n) \in \Omega_{h/2}} (\varphi_n^1 \eta_n^1 + \varphi_n^2 \eta_n^2) S(\Delta_{n_i}), \quad (\psi, \vartheta)_p = \sum_{(x_n, y_n) \in \Omega_h} \psi_n \vartheta_n S(\Delta_{n_i}),$$

где $\varphi_n, \eta_n, \psi_n, \vartheta_n$ — коэффициенты разложения функций $\varphi, \eta, \psi, \vartheta$ по базисам пространств $\mathring{\mathbf{U}}_h$ и P_h соответственно, и $S(\Delta_{n_i})$ площадь соответствующего им треугольника в каждом из разбиений. Ниже мы будем обозначать функции из пространств P_h и $\mathring{\mathbf{U}}_h$ и вектора, составленные из их коэффициентов, одними и теми же буквами, поскольку из контекста будет понятно о чем идет речь.

Подставив в (2.1) $\psi = \psi_n$ и $\varphi = \varphi_n$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения функций $\tilde{p}(t), \tilde{\mathbf{u}}(u) = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ по базисам пространств P_h и $\mathring{\mathbf{U}}_h$ (ниже использованы обозначения из монографии [6])

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{dt} + k(B^T \tilde{\mathbf{u}})^1 + k(B^T \tilde{\mathbf{u}})^2 &= 0, \\ C \frac{d\tilde{u}^1}{dt} - B_1 \tilde{p} + \mu A \tilde{u}^1 &= f^1, \\ C \frac{d\tilde{u}^2}{dt} - B_2 \tilde{p} + \mu A \tilde{u}^2 &= f^2, \end{aligned}$$

где f_n^1 и f_n^2 — нормированная n -ая компонента проекции заданной функции $\mathbf{f}$ на базис $\mathring{\mathbf{U}}_h$, и сеточные операторы $A, B = (B_1, B_2)^T$ и C удовлетворяют следующим тождествам

$$(B\psi, \varphi)_u = (\psi, \operatorname{div} \varphi), \quad (B^T \varphi, \psi)_p = (\operatorname{div} \varphi, \psi),$$

справедливых для любых $\varphi \in \mathring{\mathbf{U}}_h$ и $\psi \in P_h$, и $\eta \in \mathring{\mathbf{U}}_h$

$$(C\varphi, \eta)_u = (\varphi, \eta), \quad (A\varphi, \eta)_u = (\nabla \varphi, \nabla \eta). \quad (2.3)$$

Теорема 2.1. *Решение задачи (2.1), (2.2) существует и единственно.*

Доказательство. Пользуясь теоремой о существовании и единственности решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [7], для доказательства утверждения теоремы достаточно доказать невырожденность матрицы, стоящей перед производными по времени. Оператор S симметричен, и в силу первого тождества (2.3) положительно определен, значит он невырожден. Отсюда следует утверждение теоремы.

3. Оценка близости галеркинских приближения. Под гладким решением задачи (1.1), (1.2) будем иметь в виду функции $(\mathbf{u}, p)$ дважды дифференцируемые по временной переменной и обладающие следующими ограниченными нормами

$$\begin{aligned} \sup_{[0,T]} \|p\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \sup_{[0,T]} \left\| \frac{\partial p}{\partial t} \right\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \sup_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \int_0^T \left\| \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} \right\|_{W_2^1(\Omega)} dt, \\ \sup_{[0,T]} \|\mathbf{u}\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \sup_{[0,T]} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \sup_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \int_0^T \left\| \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial t^3} \right\|_{W_2^2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Пусть решение $(\mathbf{u}, p)$ задачи (1.1), (1.2) — гладкое. Тогда для разности между решениями задач (1.1), (1.2) и (2.1), (2.2) верна оценка

$$\begin{aligned} \sup_{[0,T]} \|p - \tilde{p}\| + \sup_{[0,T]} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\| + \frac{1}{\sqrt{k}\mu} \sup_{[0,T]} \left\| \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right\| + \\ + \frac{1}{\mu} \sup_{[0,T]} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right\| + \sup_{[0,T]} \|\nabla(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})\| \leq C \left(h + \frac{\sqrt{k}h}{\mu} + \frac{h}{\mu\sqrt{\mu}} \right). \end{aligned}$$

Замечание 3.1. Константа C зависит от k и μ через нормы решения (1.1), (1.2), указанные при описании требований гладкости.

Замечание 3.2. Доказательство теоремы 3.1 основывается на технике получения оценки погрешности из работы [2] с использованием результатов [9].

Благодарность. Автор выражает благодарность А.В. Попову за замечания способствующие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуков К.А., Попов А.В. Экономичная разностная схема для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Тр. Матем. центра имени Н.И.Лобачевского. Числ. методы решения линейных и нелинейных краевых задач. Материалы второй всерос. молодежной научн. школы-конференции. Казань. 2003. 119–128.
2. Жуков К.А. Попов А.В. Исследование экономичной разностной схемы для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // ЖВМ и МФ. 2005. **45**, № 4. 677–693.
3. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
4. Попов А.В. Разностная схема для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Оптимизация численных методов. УФА: ИМ ВЦ УНЦ РАН. 2000. 115–160.
5. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
6. Чижонков Е.В. Релаксационные методы решения седловых задач. М.: ИВМ РАН, 2002.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Новосибир. гос. ун-т, 1966.
9. Brezzi F., Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. Springer-Verlag New York Inc., 1991.
10. Popov A. V. Of Finite Difference scheme for viscous weakly compressible gas problem // Report. N 9617. Dep. of Math. Univ. of Nijmegen. The Netherlands. 1996.
11. Prohl A. Projection and qvuasi-compressibility methods for solving the incompressible Navie-Stokes equations. Stuttgart, 1997.

Поступила в редакцию
09.01.2006