

УДК 519.6

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА АКУСТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ТРЕХМЕРНЫХ СРЕД

А. В. Гончарский¹, С. Ю. Романов¹, С. А. Харченко²

Работа посвящена разработке методов и алгоритмов решения прямых и обратных задач акустической диагностики трехмерных сред на компьютерах с параллельной архитектурой. Обратная задача рассмотрена в нелинейной постановке для уравнения Гельмгольца с неизвестным коэффициентом. Разработаны эффективные алгоритмы вычисления прямых и обратных задач, которые показали практически линейную масштабируемость при параллельных вычислениях на многопроцессорных системах. Это позволило на порядки увеличить скорость и размерность решаемых задач, а также оптимизировать параметры модельных экспериментов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-08068).

Ключевые слова: компьютерное моделирование, волновые модели, обратные задачи акустической диагностики, параллельные вычисления, уравнение Гельмгольца, плотно блочные матрицы.

1. Введение. В статье рассмотрена прямая и обратная задачи волновой томографии зондирования акустическими волнами компактных неоднородных включений произвольной природы в однородной среде. В выбранном нами приближении мы предполагали, что среда распространения колебаний описывается скалярным волновым уравнением и неоднородности связаны с изменениями фазовой скорости. В отличие от работ [1, 2], где зондирование неоднородностей проводилось источниками импульсного типа, в настоящей статье источниками колебаний являются гармонические осцилляторы и, в отличие от [3], решается нелинейная задача. Это позволило описать распространение колебаний уравнением Гельмгольца. Обратная нелинейная задача заключается в вычислении неизвестного коэффициента рефракции по измеренному в заданной области полю при различных положениях источников и приемников.

В мире накоплен большой опыт решения обратных акустических задач. Рассмотрены постановки как в волновом, так и в лучевом приближениях. В волновых моделях основные результаты получены главным образом при решении одно- и двумерных задач, хотя в трехмерном случае распространение акустических волн наиболее адекватно описывается именно волновым приближением [4–6].

В статье рассмотрена задача в трехмерной нелинейной постановке, что приводит к огромному объему вычислений. Единственный путь решения данной проблемы состоит в применении параллельных вычислений.

2. Математическая постановка прямой и обратной задач. Мы будем предполагать, что среда распространения звука не имеет тензорных свойств (только скалярные). Предположим также, что источник звука является гармоническим осциллятором, колеблющимся с заданной частотой. Амплитуда колебаний источника зависит от времени в соответствии с законом $e^{-i\omega t}$, что позволяет описать распространение звука уравнением Гельмгольца

$$\Delta u(r, q, \omega) + \kappa^2(r, \omega)u(r, q, \omega) = f(r, q, \omega), \quad (1)$$

где $r \in \mathbb{R}^3$ — положение точки в пространстве, ω — круговая частота звука.

Пусть все неоднородности среды расположены в области R (рис. 1). Предположим, что источники звуковых волн (положения которых в пространстве характеризуются координатой q) расположены в области X , а точки измерения скалярной функции $u(r, q, \omega)$ при фиксированной круговой частоте ω расположены в области Y , не имеющей общих точек с R . Наоборот, области X и Y могут пересекаться и даже совпадать.

Функция $f(r, q, \omega)$ описывает источники, расположенные в области X . Например, для гармонического осциллятора в точке $q \in X$ эта функция имеет вид $f(r, q, \omega) = \delta(r - q)$. Неоднородности в области R описываются функцией



Рис. 1. Упрощенная схема эксперимента

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: gonchar@srcc.msu.ru; romanov@srcc.msu.ru

² Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, ул. Вавилова, 40, 119991, Москва; e-mail: sigma-2002@yandex.ru

$\kappa(r, \omega)$. В простейшем случае, когда неоднородности обусловлены только изменениями фазовой скорости $c(r)$, имеет место соотношение $\kappa(r, \omega) = \omega/c(r)$. Вне области R будем предполагать для простоты, что $\kappa(r, \omega) = \kappa_0 = \omega/c_0$, где $c_0 = \text{const}$. Предположим, что $\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$. Тогда (1) можно переписать в виде

$$\Delta u(r, q, \omega) + \kappa_0^2 u(r, q, \omega) = f(r, q, \omega) + \omega^2 \xi(r) u(r, q, \omega). \quad (2)$$

Введем в рассмотрение функцию Грина $G(x, y, \kappa_0) = -\frac{1}{4\pi} |x - y| \exp(i\kappa_0 |x - y|)$, которая удовлетворяет уравнению $\Delta_x G(x, y, \kappa_0) + \kappa_0^2 G(x, y, \kappa_0) = -\delta(x - y)$.

Теперь уравнение (2) можно переписать в виде объемного интегрального уравнения

$$u(z, q, \omega) = u_0(z, q, \omega) + \omega^2 \int_R G(z, r, \omega) \xi(r) u(r, q, \omega) dr, \quad u_0(z, q, \omega) = \int_X G(z, x, \omega) f(x, q, \omega) dx. \quad (3)$$

Раздельно записывая уравнение (3) для областей R и Y , получаем нелинейную систему уравнений [7]

$$\begin{aligned} u(r, q, \omega) &= u_0(r, q, \omega) + \omega^2 \int_R G(r', r, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', \quad r \in R, \\ U(y, q, \omega) &= \omega^2 \int_R G(r', y, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', \quad y \in Y. \end{aligned} \quad (4)$$

Прямая задача соответствует первому интегральному уравнению, в котором по заданному источнику и свойствам среды необходимо вычислить звуковое давление. В обратной задаче неизвестными считаются свойства среды и звуковое давление для различных частот. Известными считаются уравнения связи (4), в которых функция $U(y, q, \omega)$ получается как результат измерений в области расположения приемников.

3. Дискретизация прямой и обратной задач. Для численной аппроксимации системы уравнений (4) построим прежде всего дискретизацию акустической задачи. Для этого разобьем расчетную область R , в которой расположена неоднородность, на некоторое количество, скажем n , объемов R_i , $i = \overline{1, n}$, таким образом, чтобы $\text{int}(R_i \cap R_j) = \emptyset$ и $\bigcup_i R_i = R$. С каждым объемом R_i будем ассоциировать точку r_i , такую, что $r_i \in R_i$, $i = \overline{1, n}$.

Для простоты будем предполагать, что внутри объема R_i решение $u(r, q, \omega)$ системы (4) есть постоянная величина, равная u_i , а также, что внутри объема R_i коэффициент $\xi(r)$ есть постоянная величина, равная ξ_i . Будем также предполагать, что измерения звукового давления произведены в наборе из m точек y_s , $s = \overline{1, m}$. Тогда систему уравнений (4) можно записать в дискретной форме:

$$\begin{aligned} u_i &= u_{0i} + \omega^2 \sum_{j=1}^n A_{ij} \xi_j u_j, \quad i = \overline{1, n}, \\ U_s &= \omega^2 \sum_{j=1}^n B_{sj} \xi_j u_j, \quad s = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $u_{0i} = u_0(r_i, q, \omega)$, $U_s = U(y_s, q, \omega)$, и

$$A_{ij} = \int_{R_j} G(r', r_i, \omega) dr', \quad B_{sj} = \int_{R_j} G(r', y_s, \omega) dr'. \quad (6)$$

В матрично-векторном виде система (5) теперь может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} (I_n - \omega^2 A \text{diag}(\xi)) u &= u_0, \\ \omega^2 B \text{diag}(\xi) u &= U. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что при вычислении диагональных элементов матрицы A по формулам (6) возникают сингулярные интегралы в силу сингулярности функции Грина (в этом случае интегрирование производится по объему R_j , содержащему точку r_j). Для вычисления таких интегралов необходимо использовать аналитико-численные методы. Остальные интегралы могут быть вычислены приближенно с использованием соответствующих квадратурных формул.

Прямая задача акустики (заданы источник звука и свойства среды ξ) соответствует решению первого (линейного) уравнения в (7) с плотной матрицей коэффициентов $I_n - \omega^2 A \operatorname{diag}(\xi)$.

При постановке обратной задачи будем предполагать, что измерения проводились в наборе из m точек y_s , $s = \overline{1, m}$, для набора из q частот $\widehat{\omega}_1, \dots, \widehat{\omega}_q$ и d источников, расположенных в точках $z_1, \dots, z_d$. Обозначим $t = qd$; в дальнейшем для краткости систему измерений будем описывать набором частот $\omega_1, \dots, \omega_t$ и набором точек измерений $y_1, \dots, y_m$, неявно подразумевая под этим, что имеется одновременно и набор источников, и набор частот. Для каждой частоты будем соответствующие матрицы и векторы обозначать индексами сверху в скобках. Так, $A^{(l)}$ есть соответственно матрица A для частоты ω_l . Предполагая, что свойства среды (вектор ξ) от частоты не зависят, получаем следующую дискретную постановку обратной задачи: найти векторы $u^{(l)}$, $l = \overline{1, t}$, и вектор ξ , такие, чтобы имело место нелинейное операторное соотношение

[illegible]

где $X = (u^{(1)}, \dots, u^{(t)}\xi)$. Для решения системы уравнений (8) можно использовать регуляризованную процедуру Гаусса–Ньютона [7, 8]:

$$X_{p+1} = X_p - (F_n'^* F_p' + \alpha_p E)^{-1} (F_n'^* F(X_p) + \alpha_p (X_p - \zeta)). \quad (9)$$

Здесь E — единичная матрица порядка $(t+1)n$, α_p — параметр регуляризации, ζ — вектор регуляризации, $F'_p = F'(X_p)$. При этом имеет место следующая формула для якобиана:

$$F'(X) = \begin{bmatrix} I_n - \omega_1^2 A^{(1)} \text{diag}(\xi) & 0 & -\omega_1^2 A^{(1)} \text{diag}(u^{(1)}) \\ \omega_1^2 B^{(1)} \text{diag}(\xi) & & \omega_1^2 B^{(1)} \text{diag}(u^{(1)}) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ & I_n - \omega_t^2 A^{(t)} \text{diag}(\xi) & -\omega_t^2 A^{(t)} \text{diag}(u^{(t)}) \\ 0 & \omega_t^2 B^{(t)} \text{diag}(\xi) & \omega_t^2 B^{(t)} \text{diag}(u^{(t)}) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

При использовании процедуры (9) необходимо решать на каждом шаге итераций систему линейных уравнений с матрицей $F_p'^* F_p' + \alpha_p E$. С учетом формулы (10) матрица $F_p'^* F_p' + \alpha_p E$ имеет блочно-разреженную структуру вида

$$F_p' F_p' + \alpha_p E = \begin{bmatrix} * & & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * & * \\ * & \dots & * & * \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где символом * условно обозначены ненулевые блоки этой блочной $(t+1) \times (t+1)$ -матрицы, соответствующим образом зависящие от плотных матриц $A^{(l)}$ и $B^{(l)}$, $l = \overline{1, t}$.

4. Численные методы решения дискретных аналогов прямой и обратной задач акустики.

Как уже было упомянуто, в обоих случаях прямой и обратной задач необходимо решать систему(ы) линейных уравнений с плотно-блочной матрицей коэффициентов (первое уравнение в (7) и (11)), которую обозначим через Ω . Для эффективного решения системы

$$\Omega x = b \tag{12}$$

для начала будем строить разреженную матрицу, приближающую в некотором смысле исходную плотную матрицу Ω . Назовем этот этап вычислений построением разреженной аппроксимации системы уравнений. В случаях прямой и обратной задач система (12) строится некоторым образом через наборы матриц $A^{(l)}$ и $B^{(l)}$, $l = \overline{1, t}$. Поэтому наиболее естественно строить разреженную аппроксимацию $\text{Sp}(\Omega)$ матрицы Ω по разреженным аппроксимациям $\text{Sp}(A^{(l)})$ и $\text{Sp}(B^{(l)})$ матриц $A^{(l)}$ и $B^{(l)}$ соответственно, $l = \overline{1, t}$.

Рассмотрим способ построения $\text{Sp}(A^{(l)})$ и $\text{Sp}(B^{(l)})$. В случае матрицы $A^{(l)}$ в $\text{Sp}(A^{(l)})$ будем добавлять все диагональные элементы матрицы $A^{(l)}$, а также такие элементы $A_{ii}^{(l)}$, что расстояние между

соответствующими точками r_i и r_j меньше некоторого порогового значения. При таком способе построения $\text{Sp}(A^{(l)})$ содержит, как правило, наибольшие по модулю элементы матрицы $A^{(l)}$, поскольку модуль функции Грина убывает с увеличением расстояния. В случае матрицы $B^{(l)}$ в $\text{Sp}(B^{(l)})$ будем добавлять для каждой строки s те h элементов матрицы $B^{(l)}$, которые соответствуют наименьшим расстояниям между точкой y_s и точками r_j . Здесь снова явно используется свойство убывания модуля функции Грина в зависимости от расстояния.

Далее вычисляется разреженная аппроксимация матрицы системы линейных уравнений. В случае прямой задачи это сразу есть матрица вида $I_n - \omega_l^2 \text{Sp}(A^{(1)}) \text{diag}(\xi)$, в случае обратной задачи — это разреженная матрица, полученная из формулы ее вычисления (11) заменой матриц $A^{(l)}$ и $B^{(l)}$ на их разреженные аппроксимации. Обозначим через $\text{Sp}(\Omega)$ вычисленную разреженную аппроксимацию матрицы Ω . Для решения системы линейных уравнений (12) будем использовать переобусловленные итерационные методы на пространствах Крылова [9].

Переобусловливатель системы уравнений (12) строится по разреженной аппроксимации $\text{Sp}(\Omega)$. А именно, строится неполное разложение ICH второго порядка [10] в случае симметричной положительно определенной матрицы $\text{Sp}(\Omega)$ (обратная задача) или соответственно неполное разложение ILU второго порядка в случае несимметричной не знакоопределенной матрицы $\text{Sp}(\Omega)$ (прямая задача). В результате получается неполное разложение вида

$$\text{Sp}(\Omega) + Z = LU + LR + WU, \quad (13)$$

где Z — матрица ошибок, нижняя и верхняя треугольные матрицы L и U содержат элементы неполного разложения “первого порядка”, а матрицы W и R — элементы “второго порядка”. Переобусловливание L и U используется для ускорения итерационной схемы GMRES(k) на пространствах Крылова [11].

Алгоритм GMRES(k) итерационного решения системы уравнений (12) основан на следующих матричных соотношениях:

$$b = p_1 g_1, \quad \Omega(LU)^{-1} P_k = P_{k+1} H_k, \quad (14)$$

где H_k — верхняя хессенбергова матрица, b — вектор правой части. Матрица P_k есть комплексная $n \times k$ -матрица с ортонормированными столбцами. Вычисление матричных соотношений (14) требует на каждой итерации алгоритма GMRES(k) для умножения на матрицу Ω и решения систем уравнений с треугольными матрицами L и U , а также для ортогонализации векторов направлений.

Новое приближение к решению системы (12) вычисляется по формуле $x_k = (LU)^{-1} P_k y_k$, где y_k — решение задачи минимизации $\|H_k y_k - e_1 g_1\| = \min$. Подчеркнем, что в описанном алгоритме не надо явно вычислять матрицу Ω , достаточно иметь возможность эффективного умножения матрицы Ω на вектор.

5. Асимптотика вычислительных алгоритмов. Эффективность вычислительных алгоритмов, описанных выше, определяется их асимптотическими свойствами в зависимости от параметров задачи. В частности, нас интересует асимптотика алгоритмов от параметров n , m , q и t , а также от заполненности разреженных аппроксимаций, качества факторизаций и количества итераций. Для упрощения оценок, связанных с переобусловливанием, будем рассматривать два предельных случая: диагональное масштабирование и точное треугольное разложение матрицы коэффициентов.

Оценим, прежде всего, затраты памяти. Для хранения матрицы коэффициентов в прямой задаче требуется n^2 комплексных чисел. Для хранения матрицы коэффициентов Ω в обратной задаче требуется $qn^2 + tnm + O(n + m)$ комплексных чисел. В случае диагонального масштабирования затраты памяти для хранения переобусловливания составляют соответственно n комплексных чисел для прямой и $n(t+1)$ комплексных чисел для обратной задач. В случае точного треугольного разложения матрицы коэффициентов затраты памяти для хранения переобусловливания составляют соответственно n^2 комплексных чисел для прямой и не более $(3n^2 + n)(t+1)$ комплексных чисел для обратной задач. В последней оценке учтено, что при разложении блочной матрицы вида (11) дополнительное блочное заполнение отсутствует. Затраты памяти на хранение векторов алгоритма GMRES(k) составляют соответственно $(k+5)n$ комплексных чисел для прямой и $(k+5)n(t+1)$ комплексных чисел для обратной задач.

Оценим теперь арифметические затраты при проведении вычислений. Для вычисления элементов матрицы коэффициентов требуется Cn^2 арифметических операций в прямой и $C(qn^2 + tnm)$ арифметических операций в обратной задаче, где C — среднее число арифметических операций на вычисление одного элемента матрицы. Дальнейшие оценки арифметических затрат для обратной задачи в силу ее нелинейности относятся к описанию одной нелинейной итерации. Вычисление разреженной аппроксимации в случае прямой задачи не требует арифметических затрат, только копирования. В случае обратной задачи построение разреженной аппроксимации требует $2t(n^2 + nm)$ арифметических операций в случае диагонального масштабирования и $3t(n^3 + n^2m)$ в случае точного треугольного разложения матрицы коэффициентов.

Затраты на факторизацию в случае диагонального масштабирования составляют n арифметических операций для прямой и $n(t+1)$ арифметических операций для обратной задач. Затраты на факторизацию, в случае точного треугольного разложения матрицы коэффициентов, составляют $O(n^3)$ арифметических операций для прямой и $O(n^3(t+1))$ арифметических операций для обратной задач. В последней оценке снова учтено, что при разложении блочной матрицы вида (11) дополнительное блочное заполнение отсутствует. Рассмотрим также затраты на выполнение итераций с учетом только умножений на матрицу коэффициентов и ортогонализацию векторов. Для прямой задачи эти затраты составляют $O(kn^2 + k^2n)$ арифметических операций, для обратной задачи эти затраты равны соответственно $O(k(n^2 + nm)t + k^2nt)$ арифметических операций. В случае диагонального масштабирования затраты на умножение при переобусловливании составляют kn арифметических операций для прямой и $kn(t+1)$ арифметических операций для обратной задач. В случае точного треугольного разложения матрицы коэффициентов затраты на умножение при переобусловливании составляют $O(kn^2)$ арифметических операций для прямой и $O(kn^2(t+1))$ арифметических операций для обратной задач.

Грубые оценки, представленные выше, ясно показывают, какие огромные затраты требуются при реализации описанных выше алгоритмов. В лучшем случае диагонального масштабирования зависимость затрат памяти и арифметических затрат квадратичная от n . Независимо от используемых алгоритмов неполной факторизации эта зависимость линейна от m и t ; этого удастся добиться благодаря правильному упорядочиванию неизвестных в векторе x (формула (12)), что приводит к блочной разреженности матрицы $F_p'^* F_p' + \alpha_p E$ вида (11).

6. Организация параллельных вычислений и масштабируемость алгоритмов решения обратной задачи. Один из способов уменьшения времени счета — организация параллельных вычислений при решении описанных задач. Если в качестве переобусловливания используется диагональное масштабирование, то при использовании описанных выше алгоритмов основные затраты порядка $O(n^2)$ возникают при генерации матрицы и при умножении плотных матриц на вектор. Чтобы добиться приемлемой масштабируемости на этих операциях, мы поступили следующим образом. Строки матриц $A^{(l)}$ и $B^{(l)}$, $l = \overline{1, t}$, были разбиты на NP групп, где NP — число используемых процессоров. Разбиение на группы производилось таким образом, чтобы в каждой группе оказалось приблизительно одинаковое число строк. Затем каждый процессор генерировал только свои строки матриц $A^{(l)}$ и $B^{(l)}$, $l = \overline{1, t}$. При умножениях матрицы на вектор каждый процессор выполнял умножения на свою часть строк плотной матрицы; необходимые для этого входные данные предварительно присылались с других процессоров. Каждый процессор также генерировал только свою часть диагонального масштабирования. Ортогонализации производились только для своих данных задачи. Для организации этих локальных вычислений на каждой итерации выполнялись обмены соответствующих частей векторов. Решение треугольных систем с переобусловливателями L и U производилось локально на каждом процессоре. Как будет показано ниже, несмотря на некоторую неполную параллелизацию алгоритма решения системы уравнений, результирующий алгоритм оказался неплохо масштабируемым на большое число процессоров. Это связано с тем, что доля последовательных вычислений в алгоритме оказалась достаточно малой по сравнению с затратами на работу с плотной матрицей, что не мешало параллельной масштабируемости всего алгоритма решения для рассматриваемых тестовых задач.

В табл. 1 представлены результаты замеров времени при выполнении одной нелинейной итерации обратной задачи для сетки $14 \times 14 \times 14$ при $n = 2744$ на различном числе процессоров. При этом число частот $q = 3$, число источников $d = 5$ и $t = qd = 15$. Число приемников $m = 193$. Размерность решаемой на каждой нелинейной итерации плотно-блочной системы уравнений $N = n(t+1) = 43904$. В качестве переобусловливания использовалось диагональное масштабирование. Проводилось $k = 50$ итераций переобусловленного алгоритма GMRES(k). Время измерялось в секундах.

Таблица 1
Масштабируемость при решении обратной задачи на сетке $14 \times 14 \times 14$

Количество процессоров	Генерация матрицы, сек.	Решение системы, сек.
1	9.2	348.0
2	4.6	197.1
4	2.6	113.8
8	1.4	82.0

Таблица 2
Масштабируемость при решении обратной задачи на сетке $20 \times 20 \times 20$

Количество процессоров	Генерация матрицы, сек.	Решение системы, сек.
4	19.2	1175.0
8	9.6	610.8
16	5.0	273.8
32	3.3	217.5

В табл. 2 представлены результаты замеров времени при проведении одной нелинейной итерации обратной задачи для сетки $20 \times 20 \times 20$ при $n = 8000$ на различном числе процессоров. При этом число частот $q = 3$, число источников $d = 5$ и $t = qd = 15$. Число приемников $m = 1089$. Размерность решаемой на каждой нелинейной итерации плотно-блочной системы уравнений $N = n(t + 1) = 128000$. В качестве переобусловливания использовалось диагональное масштабирование. Проводилось $k = 50$ итераций переобусловленного алгоритма GMRES(k). Время измерялось в секундах.

Анализируя данные, представленные в табл. 1 и 2, можно сделать следующие выводы:

- 1) арифметические затраты и затраты памяти алгоритма решения обратной задачи с диагональным масштабированием в качестве переобусловливания квадратично зависят от размерности;
- 2) параллельный алгоритм решения обратной задачи почти линейно масштабируем по затратам памяти и арифметическим затратам, в том числе при использовании большого числа процессоров;
- 3) использование параллельных вычислений позволяет решать за разумное время практически важные задачи моделирования; решение этих задач невозможно без использования параллельных вычислений;

4) увеличение размерности решаемой задачи при явном хранении плотной матрицы задачи ограничивается суммарным объемом оперативной памяти компьютера и асимптотикой используемых алгоритмов. Следовательно, дальнейшее увеличение размерности решаемой задачи требует использования вычислительных технологий, позволяющих приближенно с заданной точностью хранить и умножать матрицу системы на вектор. Например, возможно использование так называемых мозаично-скелетонных аппроксимаций матрицы [12]. Использование подобных технологий может позволить также избежать генерации всех элементов плотной матрицы в предположении гладкости ядра интегрального оператора.

7. Численные результаты расчетов на кластерных системах для прямой и обратной задач.

Решение прямой задачи проводилось с целью получения данных (измерений приемников) для решения обратной задачи. Вычисления прямой задачи мы проводили исходя из первого уравнения системы (4). Задавая положение источника и модельную неоднородность, описываемую функцией $\xi(r)$, вычисляли звуковое давление $u(z, q, \omega)$ в некоторой точке $z \in \mathbb{R}^3$ (z — положение предполагаемого приемника, q — положение источника, ω — частота зондирования).

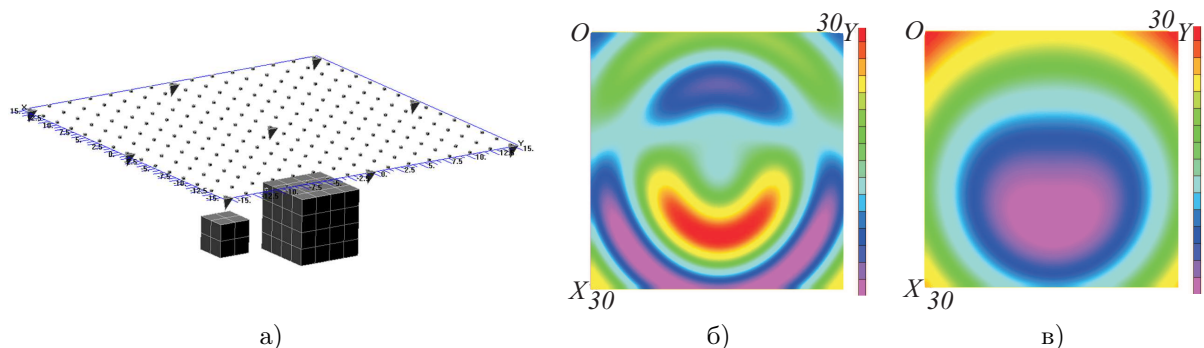


Рис. 2. Схема эксперимента (а) и действительная часть волны в прямой задаче на плоскости OXY на частоте 100 Гц (б) и 30 Гц (в)

На рис. 2 а приведена схема эксперимента и модельная неоднородность в виде двух кубов, расположенных в полупространстве $z > 0$ (ось Z направлена вниз). Фазовая скорость в неоднородностях равна 2000 м/сек., фазовая скорость в окружающем объеме равна 1000 м/сек. Размеры неоднородностей составляют 3 м и 6 м, шаг сетки 1.5 м. На рис. 2 б приведена действительная часть комплексной функции, посчитанной на частоте 100 Гц на плоскости $z = 0$ на участке 21×21 м. На рис. 2 в — те же вычисления на частоте 30 Гц. Из рисунков видно, что звуковое давление имеет характерный вид волновой функции. На частоте 100 Гц длина волны не сильно превышает размеры неоднородностей, поэтому вычисленное звуковое давление имеет интерференционные всплески от волн, отраженных от обеих неоднородностей. На частоте 30 Гц картина сильно замазана, что приводит к плохой реконструкции в обратной задаче. Далее, сетка расположения приемников должна быть достаточно подробной для описания интерференционной картины звукового давления, в противном случае можно ожидать плохих результатов реконструкции при решении обратной задачи. На втором этапе решалась обратная задача на основе системы (4). Исходные модельные данные брались из решения прямой задачи с приведенными выше значениями параметров. Источники и приемники излучения располагались на поверхности Земли (плоскости $z = 0$ в декартовой системе координат $Oxyz$) или в вертикальных шурфах. Неоднородность располагалась в полупространстве $z > 0$ (ось Z направлена вниз). Вычисления проводились на сетке $14 \times 14 \times 14$ точек с шагом 1.5 м.

В модельные экспериментальные данные вносилась случайная ошибка около 1 %.

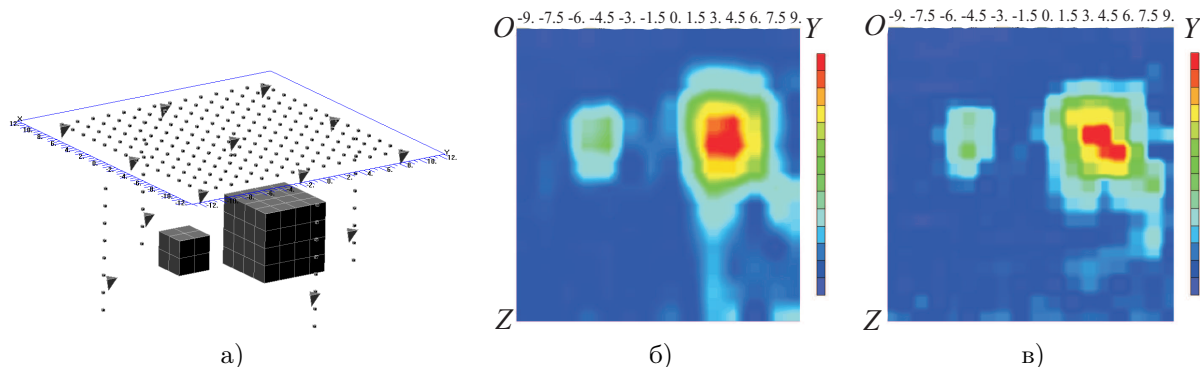


Рис. 3. Схема эксперимента с шурфами (а) и сечение в плоскости OYZ результата реконструкции двух неоднородностей на сетке $14 \times 14 \times 14$ (б) и $18 \times 18 \times 18$ точек (в)

На рис. 3а приведена схема модельного эксперимента (источники обозначены конусами, а приемники — кубиками). Источники и приемники располагались на поверхности Земли (плоскость $z = 0$) в области размером 20×20 м и в вертикальных шурфах глубиной до 10 м. Неоднородность выбрана в виде двух кубов. Задача решалась на одной частоте 100 Гц. На рис. 3б приведено сечение в плоскости OYZ результата реконструкции обратной задачи. На рис. 3в иллюстрируются те же расчеты на сетке $18 \times 18 \times 18$ точек.

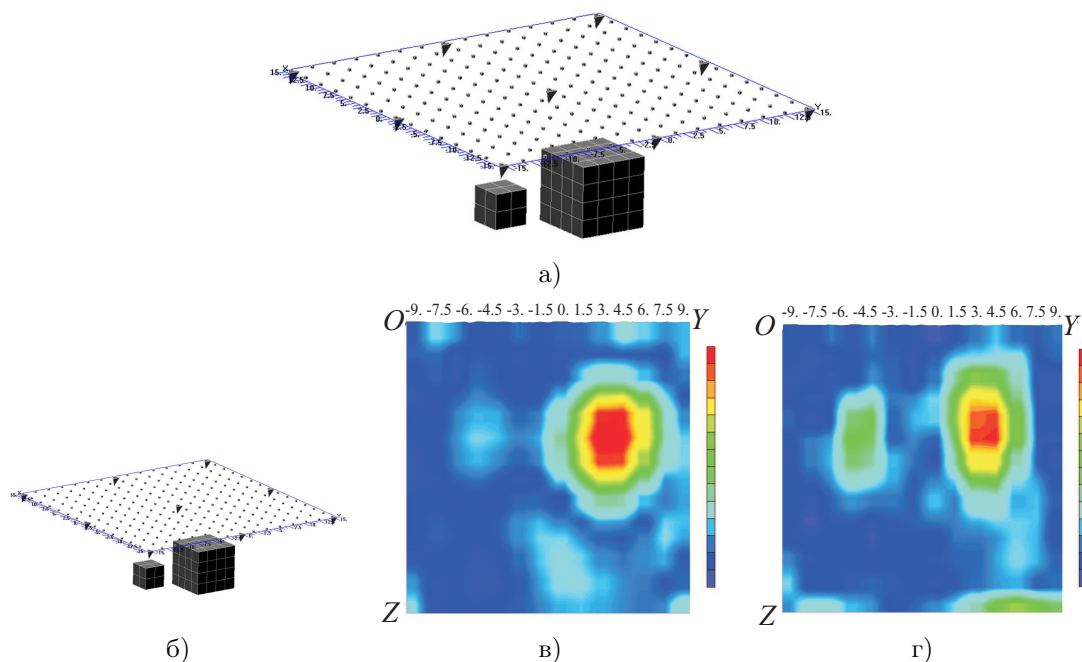


Рис. 4. Схема эксперимента с источниками и приемниками, расположенными в широкой области на поверхности Земли (а), и сечение в плоскости OYZ результата реконструкции на частоте 100 Гц (б), 30 Гц (в) и с увеличенной ошибкой во входных данных 8 % (г)

На рис. 4а, 4б и 4в представлена схема эксперимента и результаты восстановления в случае, когда источники и приемники располагались только на поверхности на частоте 100 Гц (рис. 4б) и 30 Гц (рис. 4в). Источники и приемники занимают на поверхности область размером 30×30 м. Как можно видеть, разрешающая способность вдоль оси Z ухудшилась, а с увеличением длины волны меньшая неоднородность не восстановилась. На рис. 4г результаты реконструкции с ошибкой во входных данных около 8 %. По сравнению с 1 % ошибки (рис. 4б) результаты ухудшились. Это говорит о том, что при проведении экспериментов необходимо пытаться уменьшить шум — например, проводя повторные эксперименты и накапливая данные или увеличивая число приемников.

На рис. 5а и 5б приводится схема эксперимента и результат для случая, когда источники и приемники занимают на поверхности область размером 15×15 м. Видно, что результаты хуже, чем на рис. 4б. Это говорит о том, что при зондировании на одной частоте расположение источников и приемников должно

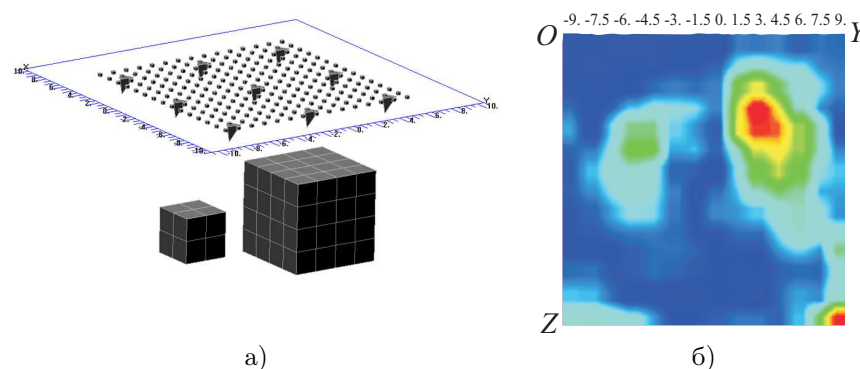


Рис. 5. Схема эксперимента с источниками и приемниками, расположенными в узкой области на поверхности Земли (а), и сечение в плоскости OYZ результата реконструкции (б)

быть как можно шире на поверхности, чтобы зарегистрировать как можно больше периодов колебаний интерференционной картины звукового давления (см. рис. 2б).

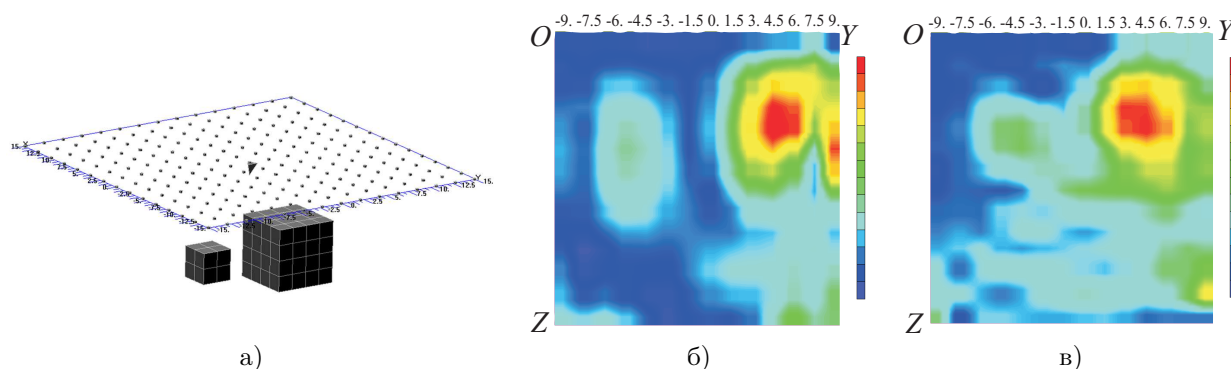


Рис. 6. Схема эксперимента с одним расположением источника (а) и сечение в плоскости OYZ результата реконструкции на одной частоте 100 Гц (б) и для набора частот от 30 Гц до 130 Гц (в)

На рис. 6 а представлена схема эксперимента и результаты для случая с одним расположением источника на одной частоте (рис. 6б) и для 13 частот от 30 Гц до 130 Гц (рис. 6в). Видно, что для одного источника даже увеличение числа частот не позволяет получить хороших результатов.

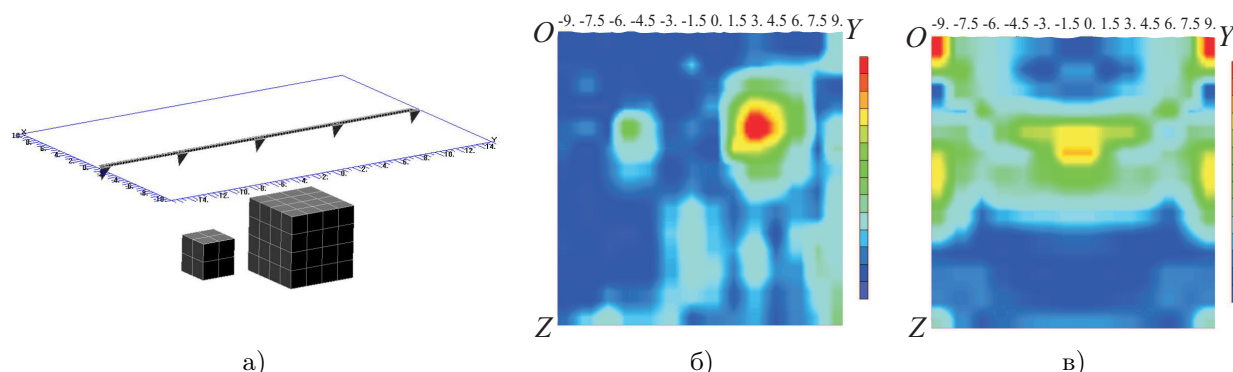


Рис. 7. Схема линейного эксперимента вдоль OY (а) и сечение в плоскости OYZ результата реконструкции (б); результат реконструкции в плоскости OYZ для линейного эксперимента вдоль OX (в)

На рис. 7 а показана схема линейного эксперимента, когда источники и приемники располагаются на одной линии вдоль оси OY . Подобная схема позволяет значительно сокращать затраты на эксперимент и объем данных. На рис. 7б — сечение результатов вдоль линии эксперимента. На рис. 7в — аналогичное сечение результатов, однако источники и приемники расположены вдоль оси OX . Видно, что поперек линии измерений неоднородности не восстанавливаются.

На рис. 8 а и 8б иллюстрируется схема и результат для неоднородностей, расположенных на разной глубине. Видно, что с возрастанием глубины разрешение заметно ухудшается.

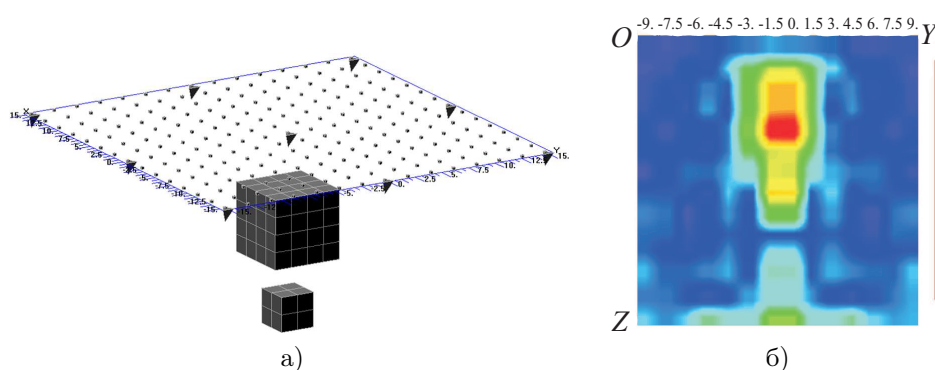


Рис. 8. Схема эксперимента с неоднородностями на разной глубине (а) и сечение в плоскости OYZ результата реконструкции (б)

8. Заключение. Рассматриваемые в статье задачи являются трехмерными и нелинейными, что приводит к большой размерности задач и требует огромного объема вычислений и оперативной памяти. Единственный путь решения этой проблемы состоит в использовании параллельных вычислений.

Разработанные пакеты программ для компьютеров с параллельной архитектурой позволяют решать за разумное время более широкий круг реальных обратных задач акустического зондирования. Проведенные модельные расчеты показали высокую эффективность и масштабируемость написанного программного обеспечения, которое позволило выполнить модельные расчеты большого количества прямых и обратных задач с целью оптимизации параметров различных схем проведения экспериментов. Основные результаты модельных расчетов таковы. В случае использования источников и приемников, расположенных только на поверхности Земли, горизонтальное положение неоднородности восстанавливается надежно. Для повышения разрешающей способности по глубине необходимо дополнительно располагать источники и приемники в шурфах. В случае одной частоты зондирования источники и приемники должны покрывать максимально широкую область на поверхности Земли. В случае одного положения источника даже использование широкого набора частот зондирования не дает хороших результатов. Использование только низких частот при зондировании позволяет реконструировать только крупные неоднородности. Использование линейной схемы эксперимента позволяет получить хорошее разрешение только вдоль линии измерений. Шаг сетки расположения источников и приемников должен быть согласован с длиной волны (5–10 отсчетов на длину волны). Слишком большой шаг резко ухудшает результаты реконструкции, а малый шаг — не приводит к улучшению. Необходимым требованием проводимых измерений экспериментальных данных является измерение как действительной, так и мнимой части волны.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность чл.-корр. РАН Вл. В. Воеводину за постоянное внимание к работе, а также с.н.с. А. С. Антонову за консультацию в области параллельных вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Об одной трехмерной задаче диагностики в волновом приближении // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 9. 1364–1367.
2. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Об одной задаче компьютерной томографии в волновом приближении // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**, № 1. 41–45.
3. Головина С.Г., Романов С.Ю., Степанов В.В. Об одной обратной задаче сейсмоки // Вестник МГУ. Вычисл. матем. и киберн. 1994. № 4. 16–21.
4. Yilmaz O. Seismic data processing. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 1987.
5. Baysal E., Kosloff D.D., Sherwood J.W.C. Reverse time migration // Geophysics. 1983. **48**. 1514–1524.
6. Natterer F. The mathematics of computerized tomography. Stuttgart: Wiley&Sons, 1986.
7. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V. Ill-posed problems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer Publ., 1994.
8. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V., Romanov S.Yu., Seatzu S. On the identification of velocity in seismic and in acoustic sounding. Firenze, 1994.
9. Тьртыйшиников Е.Е. Краткий курс численного анализа. Москва: ВИНТИ, 1994.
10. Kaporin I.E. High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its decomposition // Numer. Linear Algebra Appl. 1998. **5**. 483–509.
11. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimum residual algorithm for solving non-symmetric linear systems // SIAM J. Sci. Comput. 1986. **7**. 856–869.
12. Горейнов С.А. Мозаично-скелетонные аппроксимации матриц, порожденные асимптотически гладкими и осцилляционными ядрами // Матричные методы и вычисления. Москва: ИВМ РАН, 1999. 43–58.

Поступила в редакцию
24.02.2006