УДК 519.622

О ПОСТРОЕНИИ МНОГОЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. К. Татевян[1], Н. А. Сорокин[1], С. Ф. Залёткин[2]

Решается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка на основе локальных многочленных приближений. В основе метода лежит аппроксимация правой части дифференциальных уравнений на сегменте, длина которого равна шагу интегрирования, алгебраическим интерполяционным многочленом и последующее его интегрирование. Подробно описывается безразностный способ построения этого интерполяционного многочлена, а именно: выводится уравнение для неизвестных величин, определяющих аппроксимирующий многочлен, строится итерационный процесс решения этого уравнения, доказывается его сходимость. Отличительной особенностью этого способа является то, что в нем не вычисляются разделенные разности правой части дифференциальных уравнений, что позволяет уменьшить вычислительную погрешность искомого решения задачи Коши и его производной.

Ключевые слова: библиотеки стандартных программ, численный анализ, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, методы Рунге–Кутта, методы Адамса, краевые задачи, многочленные приближения, интерполяционные многочлены, сходимость.

1. Введение. Настоящая статья продолжает тему, начатую в работе [1] и посвященную теоретической разработке метода численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка с начальными условиями на основе аппроксимации правой части дифференциальных уравнений на шаге интегрирования алгебраическим многочленом и последующего его интегрирования.

В этом методе на каждом шаге интегрирования необходимо решать систему уравнений для определения коэффициентов многочленного приближения. В публикации [1] были изложены некоторые алгоритмы решения этих уравнений. Здесь описывается еще один подход к решению уравнений, используемых для построения многочленных приближений.

Наша трактовка обсуждаемого метода несколько отличается от его истолкования в [2]. Это отличие состоит в следующем.

В работе [2] выражение под номером (3) — это общий член ряда Тейлора, построенного для функции в правой части дифференциальных уравнений; под номером (2) приведен отрезок ряда Тейлора с центром в начальной точке t_0. На стр. 62 там же речь идет об интегрировании по сегменту $[\,t_0,\ t_0+H\,]$ конечного отрезка ряда Тейлора, аппроксимирующего правую часть дифференциального уравнения на шаге интегрирования H. В нашей работе мы, в отличие от [2], интегрируем по указанному сегменту не конечный отрезок ряда Тейлора, а интерполяционный многочлен, построенный по значениям правой части дифференциальных уравнений на множестве вспомогательных точек, принадлежащих этому сегменту.

Во втором разделе статьи дается вывод уравнений для некоторых величин, посредством которых представляются многочленные приближения для решения и его производной на шаге интегрирования. Этими величинами являются коэффициенты алгебраического интерполяционного многочлена для правой части дифференциальных уравнений, умноженные на соответствующую степень шага интегрирования, или, по-другому, целые положительные степени шага интегрирования, взятые с теми коэффициентами, с которыми они входят в интерполяционный многочлен, аппроксимирующий правую часть дифференциальных уравнений.

В третьем разделе описывается алгоритм решения этих уравнений, составляющий так называемый вертикальный итерационный процесс. В четвертом разделе рассматривается вопрос о сходимости этого итерационного процесса.

---

[1] Институт астрономии РАН, ул. Пятницкая, 48, 109017, Москва; e-mail: nsorokin@inasan.rssi.ru

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет, 119899, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

2. Вывод уравнений метода многочленных приближений. Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0) \ = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{2}$$

и задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{1a}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2a}$$

Мы всегда будем предполагать, что правые части дифференциальных уравнений (1) и (1a) имеют столько непрерывных частных производных, сколько это необходимо для того, чтобы были справедливы приводимые ниже оценки для погрешности рассматриваемого метода.

Зададим шаг интегрирования $h < X$ и выберем на отрезке $[\, x_0,\ x_0 + h\,]$ вспомогательные точки $x_i^0 = x_0 + t_i = x_0 + \alpha_i h,\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1,\ i = 0, 1, \ \ldots \ , k,\ \alpha_0 = 0$. Будем рассматривать их как узлы интерполирования. По значениям функции $F(x) = f\bigl(x, y(x), y'(x)\bigr)$ в узлах x_i^0 построим интерполяционный многочлен $L_{k,0}(x)$ и будем записывать его в виде многочлена по степеням независимой переменной

$$L_{k,0}(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)^2 + \ \cdots \ + B_k(x - x_0)^k. \tag{3}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение

$$y'' = L_{k,0}(x) + r_{k,0}(x), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} r_{k,0}(x) = {} & \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)(x - x_1^0) \ldots (x - x_k^0) = (x - x_0)(x - x_1^0) \ldots (x - x_k^0) f(x; x_0; x_1^0; \ \ldots \ ; x_k^0), \\ & x_0 < \xi < x_k^0, \end{aligned} \tag{5}$$

по сегменту $[\, x_0,\ x\,]$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, имеем:

$$\begin{aligned} y'(x) - y'(x_0) = {} & B_0(x - x_0) + B_1\frac{(x - x_0)^2}{2} + B_2\frac{(x - x_0)^3}{3} + B_3\frac{(x - x_0)^4}{4} + \ \cdots \ + B_k\frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x} r_{k,0}(t)\, dt, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_0) = {} & y'(x_0)(x - x_0) + B_0\frac{(x - x_0)^2}{2} + B_1\frac{(x - x_0)^3}{6} + B_2\frac{(x - x_0)^4}{12} + \ \cdots \ + \\ & + B_k\frac{(x - x_0)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} r_{k,0}(t)\, dt\, d\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

Отбросим в (6), (7) остаточный член. Функцию, определяемую получившимися уравнениями, обозначим $U(x)$ и примем ее за приближенное решение задачи Коши (1), (2) на сегменте $[\, x_0,\ x_0 + h\,]$:

$$y'(x) \approx U'(x) = y'(x_0) + B_0(x - x_0) + B_1\frac{(x - x_0)^2}{2} + B_2\frac{(x - x_0)^3}{3} + \ \cdots \ + B_k\frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} y(x) \approx U(x) = {} & y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + B_0\frac{(x - x_0)^2}{2} + B_1\frac{(x - x_0)^3}{6} + B_2\frac{(x - x_0)^4}{12} + \ \cdots \ + \\ & + B_k\frac{(x - x_0)^{k+2}}{(k+1)(k+2)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Положим в (8), (9) $x = x_i^0$. Тогда

$$y'(x_i^0) \approx U'(x_i^0) = y'(x_0) + B_0\alpha_i h + B_1\frac{\alpha_i^2 h^2}{2} + B_2\frac{\alpha_i^3 h^3}{3} + B_3\frac{\alpha_i^4 h^4}{4} + \cdots + B_k\frac{\alpha_i^{k+1} h^{k+1}}{k+1}, \tag{10}$$

$$y(x_i^0) \approx U(x_i^0) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha_i h + B_0\frac{\alpha_i^2 h^2}{2} + B_1\frac{\alpha_i^3 h^3}{6} + B_2\frac{\alpha_i^4 h^4}{12} + \cdots + B_k\frac{\alpha_i^{k+2} h^{k+2}}{(k+1)(k+2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{11}$$

Если решается задача Коши для системы уравнений первого порядка (1a), (2a), то для ее решения на сегменте $[\,x_0,\ x_0 + h\,]$ имеет место формула

$$y(x) \approx U(x) = y(x_0) + B_0(x - x_0) + B_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + B_2\frac{(x-x_0)^3}{3} + B_3\frac{(x-x_0)^4}{4} + \cdots + B_k\frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}. \tag{8a}$$

Отсюда следуют соотношения для значений решения в узлах x_i^0:

$$y(x_i^0) \approx U(x_i^0) = y(x_0) + B_0\alpha_i h + B_1\frac{\alpha_i^2 h^2}{2} + B_2\frac{\alpha_i^3 h^3}{3} + \cdots + B_k\frac{\alpha_i^{k+1} h^{k+1}}{k+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{10a}$$

Приближенные значения решения задачи Коши (1), (2) и его производной в конце сегмента $[\,x_0,\ x_0 + h\,]$ определяются по формулам:

$$y'(x_0 + h) = y'(x_1) \approx U'(x_1) = y'(x_0) + B_0 h + B_1\frac{h^2}{2} + B_2\frac{h^3}{3} + \cdots + B_k\frac{h^{k+1}}{k+1}, \tag{12}$$

$$y(x_0 + h) = y(x_1) \approx U(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)h + B_0\frac{h^2}{2} + B_1\frac{h^3}{6} + B_2\frac{h^4}{12} + \cdots + B_k\frac{h^{k+2}}{(k+1)(k+2)}. \tag{13}$$

Введем новые неизвестные по формуле

$$B_j^h = B_j h^j, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{14}$$

Тогда выражения для решения и его производной в конце сегмента $[\,x_0,\ x_0 + h\,]$ примут вид:

$$y'(x_0 + h) = y'(x_1) \approx U'(x_1) = y'(x_0) + h\left(B_0 + \frac{1}{2}\,B_1^h + \frac{1}{3}\,B_2^h + \cdots + \frac{1}{k+1}\,B_k^h\right), \tag{15}$$

$$y(x_0 + h) = y(x_1) \approx U(x_1) = y(x_0) + h\left(y'(x_0) + h\left(\frac{1}{2}\,B_0 + \frac{1}{6}\,B_1^h + \frac{1}{12}B_2^h + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\,B_k^h\right)\right). \tag{16}$$

Так как B_j — коэффициенты интерполяционного многочлена для функции $f\big(x, y(x), y'(x)\big)$, то из условия построения интерполяционного многочлена имеем

$$F(x_i^0) = f\big(x_i^0, y(x_i^0), y'(x_i^0)\big) = B_0 + \alpha_i B_1^h + \alpha_i^2 B_2^h + \cdots + \alpha_i^k B_k^h, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{17}$$

Формулы (10) и (11) для значений решения и его производной в узлах интерполирования примут вид

$$y'(x_i^0) \approx U'(x_i^0) = y'(x_0) + \alpha_i h\left(B_0 + \frac{\alpha_i}{2}\,B_1^h + \frac{\alpha_i^2}{3}\,B_2^h + \cdots + \frac{\alpha_i^k}{k+1}\,B_k^h\right), \tag{18}$$

$$y(x_i^0) \approx U(x_i^0) = y(x_0) + \alpha_i h\left(y'(x_0) + \alpha_i h\left(\frac{1}{2}\,B_0 + \frac{\alpha_i}{6}\,B_1^h + \frac{\alpha_i^2}{12}\,B_2^h + \cdots + \frac{\alpha_i^k}{(k+1)(k+2)}\,B_k^h\right)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{19}$$

Для задачи Коши (1a), (2a) формулы для значений решения в конце сегмента $[\,x_0,\ x_0+h\,]$ и в узлах интерполирования x_i^0 будут выглядеть так:

$$y(x_0+h)=y(x_1)\approx U(x_1)=y(x_0)+h\left(B_0+\frac{1}{2}\,B_1^h+\frac{1}{3}\,B_2^h+\,\cdots\,+\frac{1}{k+1}\,B_k^h\right), \tag{15a}$$

$$y(x_i^0)\approx U(x_i^0)=y(x_0)+\alpha_i h\left(B_0+\frac{\alpha_i}{2}\,B_1^h+\frac{\alpha_i^2}{3}\,B_2^h+\,\cdots\,+\frac{\alpha_i^k}{k+1}\,B_k^h\right),\quad i=1,2,\,\ldots\,,k. \tag{18a}$$

Погрешность значений приближенного решения $U(x_0+h)$, $U(x_i^0)$, определяемых по формулам (16), (19), есть $O(h^{k+3})$, а погрешность приближенных значений производной $U'(x_0+h)$, $U'(x_i^0)$, определяемых по (15), (18), — $O(h^{k+2})$. Погрешность приближенного решения задачи Коши (1a), (2a) $U(x_0+h)$, $U(x_i^0)$, определяемого по (15a), (18a), имеет порядок $O(h^{k+2})$.

Коэффициенты интерполяционного многочлена B_j, а значит, и B_j^h, $j=0,1,2,\,\ldots\,,k$, определяются значениями функции $F(x)=f\big(x,y(x),y'(x)\big)$ в узлах интерполирования x_i^0, $i=0,1,2,\,\ldots\,,k$. Поскольку точное решение $y(x)$ дифференциального уравнения и его производная $y'(x)$ при $x>x_0$ нам не известны, то коэффициенты B_j, а следовательно, и B_j^h, $j=1,2,\,\ldots\,,k$, являются неизвестными величинами. Их приходится вычислять приближенно с помощью описанного ниже итерационного метода. Поэтому указанные здесь оценки погрешности для значений решения и производной $U(x_0+h)$, $U'(x_0+h)$ в конце шага интегрирования, т.е. в конце сегмента $[\,x_0,\ x_0+h\,]$, будут справедливы тогда, когда погрешности вычисления величин B_1^h, B_2^h, $\ldots$, B_k^h будут иметь достаточный для этого порядок относительно h.

Как показано в [1], за счет специального выбора вспомогательных точек x_i^0 порядок точности приближенных значений решения и производной $U(x_0+h)$, $U'(x_0+h)$ в конце сегмента $[\,x_0,\ x_0+h\,]$ может быть увеличен.

Из (17) получаем

$$F(x_i^0)-B_0=\alpha_i B_1^h+\alpha_i^2 B_2^h+\,\cdots\,+\alpha_i^k B_k^h,\quad i=1,2,\,\ldots\,,k. \tag{20}$$

Как уже говорилось выше, в качестве решения задачи Коши (1), (2) и его производной $y(x_i^0)$, $y'(x_i^0)$ мы будем принимать правые части равенств (18), (19) $U(x_i^0)$, $U'(x_i^0)$. Будем также рассматривать их как функции не только переменной x_i^0, но и переменных B_1^h, B_2^h, $\ldots$, B_k^h, т.е. считать их функциями вида $U\big(x_i^0;B_1^h,B_2^h,\,\ldots\,,B_k^h\big)$ и $U'\big(x_i^0;B_1^h,B_2^h,\,\ldots\,,B_k^h\big)$. Тогда $F(x_i^0)$ является функцией новых переменных

$$F(x_i^0)\approx f\big(x_i^0,U(x_i^0),U'(x_i^0)\big)=\Phi_i(B_1^h,B_2^h,\,\ldots\,,B_k^h), \tag{21}$$

и уравнение (20) принимает вид

$$\Phi_i(B_1^h,B_2^h,\,\ldots\,,B_k^h)-B_0=\alpha_i B_1^h+\alpha_i^2 B_2^h+\,\cdots\,+\alpha_i^k B_k^h,\quad i=1,2,\,\ldots\,,k. \tag{22}$$

Запишем k векторных равенств (22) в виде одного матричного равенства

$$\Phi(B^h)-\mathbf{e}^T\otimes B_0=B^h\cdot\Upsilon, \tag{23}$$

где $\mathbf{e}^T=(1,\,\ldots\,,1)$ — вектор-строка из k компонент, равных единице; $\mathbf{e}^T\otimes B_0=(B_0,\,\ldots\,,B_0)$ — матрица, состоящая из k одинаковых столбцов, совпадающих с вектором B_0; $B^h=(B_1^h,B_2^h,\,\ldots\,,B_k^h)$ — матрица, столбцами которой являются векторы $B_1^h,B_2^h,\,\ldots\,,B_k^h$; $\Phi(B^h)=(\Phi_1,\,\Phi_2,\,\ldots\,,\Phi_k)$ — матрица со столбцами $\Phi_1,\Phi_2,\,\ldots\,,\Phi_k$ из (21); матрица Υ равна

$$\Upsilon=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_k\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_k^2\\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \ldots & \alpha_k^3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \alpha_3^k & \ldots & \alpha_k^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_k\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_k^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \alpha_3^{k-1} & \ldots & \alpha_k^{k-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_k\end{pmatrix}. \tag{24}$$

Из (23) следует

$$B^h=\big(\Phi(B^h)-\mathbf{e}^T\otimes B_0\big)\cdot\Upsilon^{-1}. \tag{25}$$

Формулы (13) и (16), а также формулы (12) и (15) являются разными формами записи одних и тех же значений решения и производной $U(x_0+h)$, $U'(x_0+h)$. В них используются разные неизвестные величины: B_j и B_j^h, $j=1,2,\ldots,k$. Эти неизвестные могут быть найдены методом итераций. Метод нахождения этих неизвестных будем называть *вертикальным* методом или *вертикальным* процессом.

Данным определением мы хотим подчеркнуть, что итерационный процесс выполняется внутри каждого шага пошагового метода численного интегрирования, т.е. на каждом частичном интервале длины $h<X$ промежутка интегрирования $[\,x_0,\ x_0+X\,]$, лежащего на оси независимой переменной x (которая во многих прикладных задачах отождествляется со временем). Продвижение вдоль оси x от точки x_n к точке $x_{n+1}=x_n+h$, заключающееся в вычислении решения $y(x_{n+1})$ в каждой следующей точке x_{n+1} по уже найденному значению решения $y(x_n)$ в предыдущей точке x_n, является *горизонтальным* процессом.

Некоторые итерационные вертикальные процессы для определения B_j были изложены в [1]. В них использованы разделенные разности функции в правой части дифференциальных уравнений $f\big(x,y(x),y'(x)\big)$. Поскольку точные значения решения $y(x_i^0)$ и производной $y'(x_i^0)$ нам не известны, то разделенные разности высокого порядка, построенные по значениям функции $f\big(x_i^0,y(x_i^0),y'(x_i^0)\big)$ в узлах x_i^0, будут содержать ошибки, которые могут привести к ошибкам определения B_j и, в конечном счете, внести вклад в вычислительную погрешность определения решения и производной.

Ниже мы дадим другой вертикальный итерационный метод, а именно: опишем процесс определения неизвестных B_j^h без использования разделенных разностей функции $f\big(x,y(x),y'(x)\big)$.

Приведем для примера обратные матрицы Υ^{-1} некоторых порядков: для $k=2$

$$\Upsilon^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)} & \dfrac{-1}{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)}\\[2ex] \dfrac{-\alpha_1}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)} & \dfrac{1}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}\end{pmatrix}$$

и для $k=3$

$$\Upsilon^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha_2\alpha_3}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_1} & \dfrac{-(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_1} & \dfrac{1}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_1}\\[2ex] \dfrac{-\alpha_1\alpha_3}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2} & \dfrac{\alpha_1+\alpha_3}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2} & \dfrac{-1}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2}\\[2ex] \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)\alpha_3} & \dfrac{-(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)\alpha_3} & \dfrac{1}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)\alpha_3}\end{pmatrix}.$$

3. Вертикальный итерационный процесс. Перейдем к описанию итерационного процесса для трех видов дифференциальных уравнений.

3.1. Итерационный процесс для дифференциальных уравнений второго порядка. Будем решать уравнение (25) методом итераций. Алгоритм может быть следующим.

Возьмем в качестве начального приближения для B^h нулевую матрицу

$$B^{h^{(0)}}=\begin{pmatrix}0\ldots 0\\ \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0\ldots 0\end{pmatrix}.$$

Находим начальное приближение для $U(x_i^0)$ и $U'(x_i^0)$ по формулам:

$$U^{(0)}(x_i^0)=y(x_0)+\alpha_i h\left(y'(x_0)+\frac{1}{2}\,\alpha_i hB_0\right),$$

$$U'^{(0)}(x_i^0)=y'(x_0)+\alpha_i hB_0,\quad i=1,2,\ldots,k,$$

и значения правой части дифференциального уравнения

$$F(x_i^0)=f\left(x_i^0,U^{(0)}(x_i^0),U'^{(0)}(x_i^0)\right),\quad i=1,2,\ldots,k.$$

Тем самым будет найдена матрица $\Phi(B^{h^{(0)}})$. Находим первое приближение для B^h по формуле

$$B^{h^{(1)}}=\left(\Phi(B^{h^{(0)}})-\mathbf{e}^T\otimes B_0\right)\cdot\Upsilon^{-1}.$$

Далее определяем следующее приближение для $U(x_i^0)$ и $U'(x_i^0)$ по формулам

$$U'^{(\nu)}(x_i^0) = y'(x_0) + \alpha_i h \left(B_0 + \frac{\alpha_i}{2} B_1^{h^{(\nu)}} + \frac{\alpha_i^2}{3} B_2^{h^{(\nu)}} + \cdots + \frac{\alpha_i^k}{k+1} B_k^{h^{(\nu)}} \right), \tag{26}$$

$$U^{(\nu)}(x_i^0) = y(x_0) + \alpha_i h \left(y'(x_0) + \alpha_i h \left(\frac{1}{2} B_0 + \frac{\alpha_i}{6} B_1^{h^{(\nu)}} + \frac{\alpha_i^2}{12} B_2^{h^{(\nu)}} + \cdots + \frac{\alpha_i^k}{(k+1)(k+2)} B_k^{h^{(\nu)}} \right) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{27}$$

или

$$U'^{(\nu)}(x_i^0) = U'^{(0)}(x_i^0) + \alpha_i h \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_i^j}{j+1} B_j^{h^{(\nu)}}, \tag{28}$$

$$U^{(\nu)}(x_i^0) = U^{(0)}(x_i^0) + \alpha_i^2 h^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_i^j}{(j+1)(j+2)} B_j^{h^{(\nu)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{29}$$

при $\nu = 1$. Вычисляем значения правой части дифференциального уравнения

$$F(x_i^0) = f\bigl(x_i^0, U^{(\nu)}(x_i^0), U'^{(\nu)}(x_i^0)\bigr), \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{30}$$

при $\nu = 1$; тем самым будет известна матрица $\Phi(B^{h^{(\nu)}})$, $\nu = 1$.
Находим следующее приближение для B^h по формуле

$$B^{h^{(\nu+1)}} = \Bigl(\Phi(B^{h^{(\nu)}}) - \mathbf{e}^T \otimes B_0\Bigr) \cdot \Upsilon^{-1} \tag{31}$$

при $\nu = 1$. Дальнейшие приближения строятся по такой же схеме с использованием соотношений (26) — (31) при $\nu = 2, 3, \ldots$.

Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности (относительно h) очередного приближения $U^{(\nu)}(x_i^0)$, $U'^{(\nu)}(x_i^0)$ и $B^{h^{(\nu)}}$ на единицу до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения и производной, равный порядку точности формул (18) и (19). Итерации продолжаются до достижения максимального порядка точности решения и производной, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

Если правая часть дифференциального уравнения не зависит от производной решения, т.е. уравнение имеет вид

$$y'' = f(x, y),$$

то каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности очередного приближения $U^{(\nu)}(x_i^0)$, $U'^{(\nu)}(x_i^0)$ и $B^{h^{(\nu)}}$ на два, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения, равный порядку точности формулы (19). В этом случае можно не вычислять производную $U'(x_i^0)$ в точках x_i^0.

3.2. Итерационный процесс для дифференциальных уравнений первого порядка. Для задачи Коши (1*a*), (2*a*) алгоритм итерационного метода может быть следующим.

Выберем в качестве начального приближения для B^h нулевую матрицу

$$B^{h^{(0)}} = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 \\ \vdots \ddots \vdots \\ 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

Находим начальное приближение для $U(x_i^0)$ по формуле

$$U^{(0)}(x_i^0) = y(x_0) + \alpha_i h B_0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

и значения правой части дифференциального уравнения

$$F(x_i^0) = f\bigl(x_i^0, U^{(0)}(x_i^0)\bigr), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тем самым будет найдена матрица $\Phi(B^{h^{(0)}})$. Затем находим первое приближение для B^h по формуле

$$B^{h^{(1)}} = \Bigl(\Phi(B^{h^{(0)}}) - \mathbf{e}^T \otimes B_0\Bigr) \cdot \Upsilon^{-1}.$$

Далее определяем следующее приближение для $U(x_i^0)$ по формулам

$$U^{(\nu)}(x_i^0) = y(x_0) + \alpha_i h \left(B_0 + \frac{\alpha_i}{2} B_1^{h^{(\nu)}} + \frac{\alpha_i^2}{3} B_2^{h^{(\nu)}} + \cdots + \frac{\alpha_i^k}{k+1} B_k^{h^{(\nu)}} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{26a}$$

или

$$U^{(\nu)}(x_i^0) = U^{(0)}(x_i^0) + \alpha_i h \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_i^j}{j+1} B_j^{h^{(\nu)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{28a}$$

при $\nu = 1$. Вычисляем значения правой части дифференциального уравнения

$$F(x_i^0) = f\big(x_i^0, U^{(\nu)}(x_i^0)\big), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{30a}$$

при $\nu = 1$; тем самым будет известна матрица $\Phi(B^{h^{(\nu)}})$, $\nu = 1$. Находим следующее приближение для B^h по формуле (31)

$$B^{h^{(\nu+1)}} = \Big(\Phi(B^{h^{(\nu)}}) - \mathbf{e}^T \otimes B_0\Big) \cdot \Upsilon^{-1} \tag{31a}$$

при $\nu = 1$. Дальнейшие приближения строятся по такой же схеме с использованием соотношений (26a), (28a), (30a), (31a) при $\nu = 2, 3, \ldots$.

Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности (относительно h) очередного приближения $U^{(\nu)}(x_i^0)$ и $B^{h^{(\nu)}}$ на единицу до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения $U(x_i^0)$, равный порядку точности формулы (18a). Итерации продолжаются до достижения максимального порядка точности решения, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

4. Сходимость вертикального итерационного процесса. Обсудим теперь вопрос о достаточном признаке сходимости итерационного метода (31), (31a). Для этого нам понадобятся выражения для частных производных правой части (25) по коэффициентам B_j^h.

Рассмотрим сначала случай, когда решается задача Коши (1), (2) для одного скалярного дифференциального уравнения.

В этом случае B^h является строчной матрицей

$$B^h = (B_1^h, B_2^h, \ldots, B_k^h)$$

и правая часть равенства (25) также является строчной матрицей

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k).$$

Уравнение (25) может быть записано так:

$$B_i^h = \sum_{m=1}^{k} \Big(f\big(x_m^0, U(x_m^0; B_1^h, B_2^h, \ldots, B_k^h), U'(x_m^0; B_1^h, B_2^h, \ldots, B_k^h)\big) - B_0 \Big) \cdot \hat{\upsilon}_{mi}, \tag{32}$$

где $\hat{\upsilon}_{mi}$ — элементы обратной матрицы Υ^{-1}, или

$$B_i^h = \varphi_i(B_1^h, B_2^h, \ldots, B_k^h), \quad i = 1, 2, \ldots, k; \tag{33}$$

функция $\varphi_i(B_1^h, B_2^h, \ldots, B_k^h)$ — правая часть равенства (32). Для сокращения записи переменные B_1^h, $B_2^h, \ldots, B_k^h$ в качестве аргументов функций U и U' не будем указывать.

Найдем частные производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial B_j^h}$:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial B_j^h} = \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial f\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial B_j^h} \cdot \hat{\upsilon}_{mi}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k. \tag{34}$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial B_j^h} = \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{\partial f\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U} \alpha_m^2 h^2 \frac{\alpha_m^j}{(j+1)(j+2)} + \frac{\partial f\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U'} \alpha_m h \frac{\alpha_m^j}{j+1} \right) \hat{\upsilon}_{mi}, \tag{35}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

или

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial B_j^h} = h^2 \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial f\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U} \cdot \sigma_{mj} \cdot \hat{\upsilon}_{mi} + h \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial f\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U'} \cdot \sigma'_{mj} \cdot \hat{\upsilon}_{mi}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k, \tag{36}$$

где

$$\sigma_{mj} = \frac{\alpha_m^{j+2}}{(j+1)(j+2)}, \qquad \sigma'_{mj} = \frac{\alpha_m^{j+1}}{j+1}. \tag{37}$$

В случае задачи Коши для одного уравнения первого порядка ($1a$), ($2a$) частные производные будут равны

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial B_j^h} = h \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial f\big(x_m^0, U(x_m^0)\big)}{\partial U} \cdot \sigma'_{mj} \cdot \hat{\upsilon}_{mi}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k. \tag{38}$$

Теперь предположим, что решается задача Коши (1), (2) для системы M обыкновенных дифференциальных уравнений. Матричное уравнение (25) состоит из $M \times k$ скалярных уравнений, при этом компонента с номером i в l-ом векторе B_l^h записывается так:

$$\begin{aligned} B_{il}^h = \sum_{m=1}^{k} \Big(& f_i\big(x_m^0, U_1(x_m^0; B_{11}^h, B_{12}^h, \ldots, B_{1k}^h), \ldots, U_M(x_m^0; B_{M1}^h, B_{M2}^h, \ldots, B_{Mk}^h), \\ & U_1'(x_m^0; B_{11}^h, B_{12}^h, \ldots, B_{1k}^h), \ldots, U_M'(x_m^0; B_{M1}^h, B_{M2}^h, \ldots, B_{Mk}^h)\big) - B_{0i}\Big) \cdot \hat{\upsilon}_{ml}, \\ & i = 1, 2, \ldots, M, \quad l = 1, 2, \ldots, k, \end{aligned} \tag{39}$$

или

$$B_{il}^h = \varphi_{il}\big(B_{11}^h, \ldots, B_{M1}^h; B_{12}^h, \ldots, B_{M2}^h; \ldots; B_{1k}^h, \ldots, B_{Mk}^h\big), \quad i = 1, 2, \ldots, M; \quad l = 1, 2, \ldots, k; \tag{40}$$

функция φ_{il} — правая часть равенства (39). Для сокращения записи у функций U, U', U_j и U_j' будем указывать только первый аргумент.

Найдем частные производные $\dfrac{\partial \varphi_{il}}{\partial B_{jn}^h}$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{\partial \varphi_{il}}{\partial B_{jn}^h} = \sum_{m=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{M} \frac{\partial f_i\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U_r} \, \frac{\partial U_r(x_m^0)}{\partial B_{jn}^h} + \sum_{r=1}^{M} \frac{\partial f_i\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U_r'} \, \frac{\partial U_r'(x_m^0)}{\partial B_{jn}^h} \right) \hat{\upsilon}_{ml}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M; \quad l, n = 1, 2, \ldots, k. \tag{41}$$

Каждая компонента векторов U и U' зависит только от одноименных компонент векторов $B_1^h, B_2^h, \ldots, B_k^h$. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi_{il}}{\partial B_{jn}^h} = \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{\partial f_i\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U_j} \, \alpha_m^2 h^2 \, \frac{\alpha_m^n}{(n+1)(n+2)} + \frac{\partial f_i\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U_j'} \, \alpha_m h \, \frac{\alpha_m^n}{n+1} \right) \hat{\upsilon}_{ml}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M; \quad l, n = 1, 2, \ldots, k, \tag{42}$$

или

$$\frac{\partial \varphi_{il}}{\partial B_{jn}^h} = h^2 \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial f_i\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U_j} \cdot \sigma_{mn} \cdot \hat{\upsilon}_{ml} + h \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial f_i\big(x_m^0, U(x_m^0), U'(x_m^0)\big)}{\partial U_j'} \cdot \sigma'_{mn} \cdot \hat{\upsilon}_{ml}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M; \quad l, n = 1, 2, \ldots, k, \tag{43}$$

где

$$\sigma_{mn} = \frac{\alpha_m^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \quad \sigma'_{mn} = \frac{\alpha_m^{n+1}}{n+1}. \tag{44}$$

Если решается задача Коши ($1a$), ($2a$) для системы M уравнений, то частные производные будут равны

$$\frac{\partial \varphi_{il}}{\partial B^h_{jn}} = h \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial f_i\bigl(x^0_m, U(x^0_m)\bigr)}{\partial U_j} \cdot \sigma'_{mn} \cdot \hat{\upsilon}_{ml}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M; \quad l, n = 1, 2, \ldots, k. \tag{45}$$

Как видно из (36), (38), (43), (45), все слагаемые, входящие в выражения для частных производных, содержат множители h и h^2. Поэтому, выбрав малую величину шага интегрирования h, можно обеспечить выполнение достаточного условия сходимости метода итераций (31), ($31a$). Если ввести в рассмотрение матрицу Q, составленную из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей найденных выше частных производных:

$$\max \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial B^h_j} \right|$$

для одного уравнения или

$$\max \left| \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial B^h_{jn}} \right|$$

для системы уравнений, то достаточным условием для сходимости метода итераций является условие, что какая-нибудь норма матрицы Q меньше единицы (см. гл. 7, § 5, п. 1 в [3] или см. гл. VI, § 3, теорему на стр. 269, а также гл. VII, § 1, теорему и формулу (9) в [4]), например:

$$\|Q\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{Mk} Q_{ij} < 1, \tag{46}$$

$$\|Q\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{Mk} Q_{ij} < 1, \tag{47}$$

$$\|Q\|_2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{Mk} Q^2_{ij} < 1. \tag{48}$$

Таким образом, при значениях шага интегрирования, удовлетворяющих какому-либо из условий (46), (47), (48), последовательные приближения $B^{h^{(\nu)}}$, определяемые по (31), ($31a$), будут при $\nu \to \infty$ сходиться к решению уравнения (25).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф.* Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе локальных многочленных приближений // Вычислительные методы и программирование. 2000. Т. 1. 30–63 (электронный адрес: http://num-meth.srcc.msu.su).
2. *Плахов Ю.В., Мыценко А.В., Шельпов В.А.* О методике численного интегрирования уравнений возмущенного движения ИСЗ в задачах космической геодезии // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1989. № 4. 61–67.
3. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960.
4. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию
15.02.2001