

УДК 517.518.8:517.972.9

## ВЕЙВЛЕТ МЕЙЕРА УЛУЧШЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Е. А. Лебедева<sup>1</sup>, Е. Б. Постников<sup>1</sup>

Получено выражение для константы неопределенности, рассмотренное как функционал, зависящий от вида функции, определяющей семейство вейвлетов Мейера. Численная минимизация функционала позволила найти выражение для вейвлета, обладающего в 1.5 раза меньшей константой неопределенности по сравнению со стандартным.

**Ключевые слова:** вейвлет, константа неопределенности, частотно-временная локализация, квадратичные В-сплайны.

Вейвлет Мейера, впервые введенный в [1], определяется следующим образом. Пусть  $\theta(\omega)$  — нечетная, как минимум один раз непрерывно дифференцируемая функция, такая, что  $\theta(\omega) = \pi/4$  при  $\omega \geq \pi/3$  и  $\theta'(\pi/3) = 0$ . Тогда вейвлет и его фурье-образ имеют вид  $\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[(t-1/2)\omega] \sin(\lambda(\omega)) d\omega$ ,  $\widehat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2} \sin(\lambda(\omega))$ , где

$$\lambda(\omega) = \begin{cases} \pi/4 + \theta(\omega - \pi), & \text{если } 2\pi/3 \leq \omega \leq 4\pi/3, \\ \pi/4 - \theta(\omega/2 - \pi), & \text{если } 4\pi/3 < \omega \leq 8\pi/3, \\ 0, & \text{если } \omega \in [0, 2\pi/3) \cup (8\pi/3, \infty). \end{cases} \quad (1)$$

Помимо своего теоретического значения как примера ортогонального базиса с компактным носителем в частотном пространстве и достаточно хорошей локализацией в координатном пространстве [2], разложение в ряд по вейвлетам Мейера имеет и прикладное значение, в частности для анализа сигналов [2] и в применении к квадратурным формулам [3]. При этом важным свойством, выделяющим вейвлеты вообще, является их высокая степень локализации как в координатном, так и в частотном пространствах. Количественным выражением степени локализации может служить константа неопределенности  $I = \Delta_\psi \Delta_{\widehat{\psi}}$ , определяемая как произведение дисперсий функции и его фурье-образа. Для вейвлета Мейера с учетом его свойств симметрии можно записать

$$\Delta_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 |\psi(t)|^2 dt, \quad \Delta_{\widehat{\psi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2)$$

Для классического выбора функции

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} \left[ \nu \left( \frac{3\omega}{2\pi} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right], \quad \nu(\omega) = \omega^4 (35 - 84\omega + 70\omega^2 - 20\omega^3), \quad (3)$$

реализованного, например, в системе MATLAB, значение константы неопределенности равно 10.749 [2]. Целью данной работы является введение  $\theta(\omega)$ , обеспечивающей лучшую время-частотную локализацию.

Перепишем (2) в виде, более удобном для анализа вейвлета Мейера. Используя (1) и свойства синуса двойного угла, получим  $\Delta_{\widehat{\psi}} = \frac{28\pi^2}{9} - 14 \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta(\omega)) d\omega$ . Пусть функция  $\xi(t) = \psi(t+1/2)$  такова,

что ее фурье-образ имеет вид  $\widehat{\xi}(t) = \widehat{\psi}(\omega) \exp(i\omega/2) = \sin(\lambda(\omega)) = 2\pi\eta(\omega)$ . Для введенных функций  $\xi(t)$  и  $\eta(\omega)$  в силу свойств преобразования Фурье выполняется равенство  $t\xi(t) = -i\widehat{\eta}'(\omega)$ . Используя равенство Парсеваля и определение (1), имеем

$$\Delta_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |t\xi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\eta}'(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\eta'(\omega))^2 d\omega = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega.$$

<sup>1</sup> Курский государственный университет, физико-математический факультет, ул. Радищева, 33, 305000, г. Курск; e-mail: ealebedeva2004@mail.ru; postnicov@mail.ru

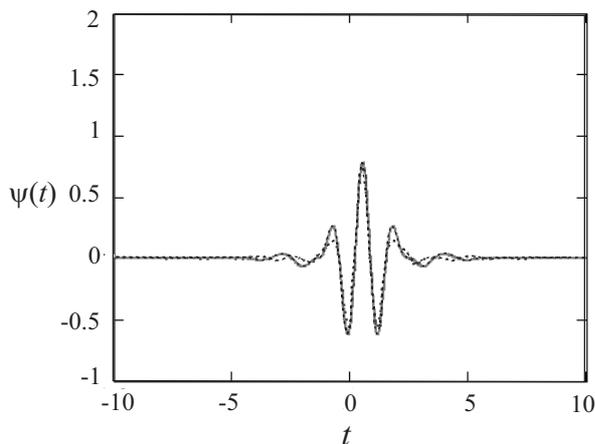


Рис. 1. Вейвлет Мейера при различных функциях  $\theta$

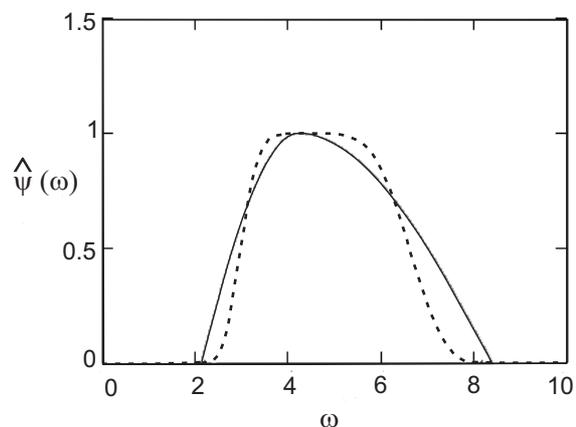


Рис. 2. Фурье-образ вейвлета Мейера при различных функциях  $\theta$

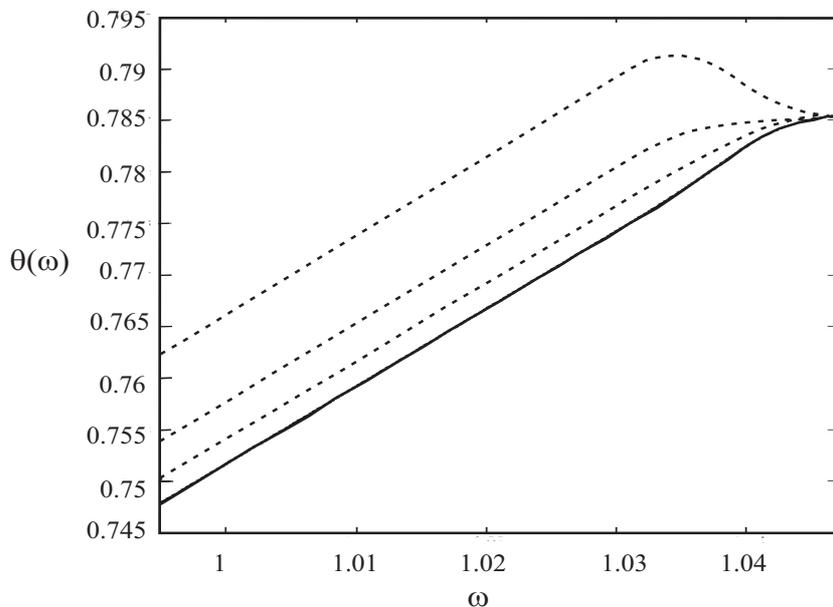


Рис. 3. Функция  $\theta$  при различных значениях параметра  $k$  вблизи точки  $\pi/3$

В результате получаем специфическую для вейвлета Мейера формулу для константы неопределенности, которую можно определить как функционал, заданный на множестве функций  $\theta(\omega)$ :

$$I(\theta) = \frac{14\pi}{3} \int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega - \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta(\omega)) d\omega \int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega. \quad (4)$$

Можно отметить, что в области малых  $\omega$  в (4) доминирует первое слагаемое, которое минимизирует линейная функция, проходящая, учитывая определение  $\theta(\omega)$ , через начало координат. Поэтому рассмотрим следующее семейство функций, удовлетворяющих необходимым граничным условиям и учитывающих наличие вычитаемого в (4), являющегося существенным в области, примыкающей к  $\pi/3$ :

$$\theta(\omega) = k\omega + \frac{\pi}{4} \left[ \left(1 - \frac{4k}{3} + \frac{2k}{3N}\right) B(3N\omega/\pi) + \left(1 - \frac{4k}{3}\right) B_1(3N\omega/\pi) \right]. \quad (5)$$

Здесь использованы квадратичные краевые В-сплайны, явное выражение которых при целочисленном разбиении отрезка на  $N$  частей с единичным шагом имеет вид

$$B(x, N) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - N + 2)^2, & N - 2 < x \leq N - 1, \\ 1 - (x - N + 1)^2 - \frac{1}{2}(x - N)^2, & N - 1 < x \leq N, \\ 0, & x \notin (N - 2, N], \end{cases}$$

$$B_1(x, N) = \begin{cases} (x - N + 1)^2, & N - 1 < x \leq N, \\ 0, & x \notin (N - 1, N]. \end{cases}$$

N	$\varepsilon_{\min}$	I
4	0.257	7.359
8	0.131	7.115
16	0.065	6.998
32	0.032	6.942
64	0.016	6.914
128	0.007	6.899

В-сплайны обеспечивают гладкий переход от отрезка наклонной прямой к горизонтальной линии на протяжении отрезка длиной  $2N^{-1}\pi/3$ . Минимизация осуществлялась численно при помощи системы MathCAD относительно величины  $\varepsilon$ , связанной с угловым коэффициентом как  $k = (3 + \varepsilon)/4$ ; случай  $k = 3/4$  соответствует отрезку, соединяющему точки  $(0, 0)$  и  $(\pi/3, \pi/4)$ .

В таблице представлены: угловой коэффициент, доставляющий минимум функционалу (4), и соответствующее значение константы неопределенности в зависимости от числа отрезков разбиения. Из таблицы следует, что константа неопределенности уменьшается при сокращении области “гладкого закругления” функции  $\theta(\omega)$  и последняя стремится к  $\theta(\omega) = 3\omega/4$  на  $[0, \pi/3]$ . При этом следует отметить, что последняя функция не принадлежит области определения функционала, так как не удовлетворяет необходимому условию гладкости.

Однако в практических приложениях область отклонения от линейности всегда можно сделать меньшим шагом дискретизации и пользоваться следующим приближенным выражением:

$$\psi(t) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin[\pi(t - 5/4)/3]}{t - 5/4} \cos[\pi(t - 5/4)] + \frac{\sin[\pi(t + 1/4)]}{t + 1/4} \cos[\pi(t + 1/4)] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin[2\pi(t - 7/8)/3]}{t - 7/8} \sin[2\pi(t - 7/8)] - \frac{\sin[2\pi(t - 1/8)/3]}{t - 1/8} \sin[2\pi(t - 1/8)] \right\}, \quad (6)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} -e^{-i\omega/2} \cos(3\omega/4), & 2\pi/3 \leq \omega \leq 4\pi/3, \\ e^{-i\omega/2} \sin(3\omega/8), & 4\pi/3 < \omega \leq 8\pi/3, \\ 0, & \omega \in [0, 2\pi/3) \cup (8\pi/3, \infty). \end{cases}$$

На рис. 1 и 2 представлены графики вейвлета Мейера и результата его преобразования Фурье. Сплошная линия соответствует приближенному вейвлету (6), пунктирная — вейвлету со стандартными параметрами (3). При этом вейвлет Мейера, близкий к (6) (см. таблицу), обладает существенно лучшей локализацией, чем стандартный: минимальная константа неопределенности меньше практически в 1.5 раза. В случае же необходимости сохранения гладкости можно воспользоваться приближением (5) со значением параметра, представленным в таблице. На рис. 3 представлены части графиков в окрестности точки  $\pi/3$  для  $N$ , принимающего значения 16, 32, 64 и 128 (сверху вниз соответственно).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Meyer Y. Principe d'incertitude bases Hilbertiennes et algebras d'operateurs // Seminaire Bourbaki. 1985/86. **38**, N 662. 209–223.
2. Добешин И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
3. Shen X. A quadrature formula based on sampling in Meyer wavelet subspaces // J. Comp. Anal. Appl. 2001. **3**, N 2. 147–163.

Поступила в редакцию  
20.03.2006