УДК 517.97:539.37

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ И КОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ АНАЛИЗА РЕОЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

В. А. Зинченко[1], О. В. Садовская[1], В. М. Садовский[1]

Предлагается вычислительный алгоритм для расчета диаграмм нагружения и деформирования материалов на основе реологических схем произвольного уровня сложности. В случае простых схем, составленных из упругих и вязких элементов, определяющие системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений решаются с помощью неявного метода. При наличии в схеме нелинейных элементов — пластических шарниров и жестких контактов — применяются переборные процедуры численного решения вариационных неравенств с простыми ограничениями. Алгоритм реализован в виде компьютерной системы, имеющей удобный графический интерфейс для ввода и вывода информации. В качестве примера приводятся результаты расчета диаграмм ползучести и релаксации для реологических схем, включающих элементы всех возможных типов.

Ключевые слова: реологическая схема, упругая пружина, вязкий демпфер, пластический шарнир, жесткий контакт.

1. Введение. Деформированное состояние большинства природных и искусственных материалов даже при умеренном уровне внешних напряжений не может быть с удовлетворительной точностью описано в рамках фундаментальных моделей механики сплошных сред — теории упругости, пластичности и гидродинамики вязкой жидкости. В процессе деформации проявляется целый комплекс свойств, который можно анализировать с помощью реологического метода [1], предлагающего наглядный способ построения адекватных математических моделей на основе конструирования реологических схем. Точность описания в рамках этих моделей зависит от количества элементов в схеме и от способа их компоновки. Базовыми элементами являются упругая пружина, вязкий демпфер и пластический шарнир, обозначающие фундаментальные свойства. Для учета разнопрочности геоматериалов (сыпучих сред, грунтов, горных пород), по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, применяется четвертый базовый элемент — жесткий контакт [2]. Этот элемент описывает состояние идеально сыпучей среды с жесткими частицами. При сжатии такая среда не деформируется. Деформация при равном нулю напряжении может быть произвольной положительной величиной. Растягивающие напряжения недопустимы.

Для материалов, реологические схемы которых содержат достаточно большое число базовых элементов, построение и исследование определяющих соотношений становится весьма трудоемким. В настоящей работе предлагается вариант решения этой проблемы с привлечением универсальных вычислительных алгоритмов, реализованных в виде компьютерной системы с элементами визуального проектирования.

2. Определяющие соотношения. Анализ реологических свойств материалов при одноосном деформировании связан с двумя классическими задачами. В первой из них известна программа нагружения (зависимость напряжения σ от времени t), а искомой является зависимость от времени деформации $\varepsilon(t)$. Во второй, наоборот, известна программа деформирования, а зависимость напряжения от времени подлежит определению. Решение первой задачи в случае постоянного растягивающего или сжимающего напряжения позволяет построить диаграммы ползучести материала. Вторая задача в случае постоянной деформации дает кривые релаксации напряжений.

Если исследуемая схема материала содержит нелинейные элементы (пластические шарниры или жесткие контакты), то естественным образом возникает вопрос о корректности реологической модели. Модель считается корректной, если в ней однозначно разрешимы и устойчивы обе задачи — первая и вторая. К некорректным относится, например, модель идеальной пластичности, реологическая схема которой состоит из одного элемента — пластического шарнира. При заданном напряжении, равном пределу текучести, деформация в рамках этой модели не может быть найдена единственным образом. Второй пример — модель идеально сыпучей среды с абсолютно твердыми частицами, реологической схемой которой служит жесткий контакт. В этом случае деформация определяется неоднозначно при $\sigma = 0$ и, кроме того, напряжение неоднозначно при $\varepsilon = 0$.

[1] Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 660036, г. Красноярск; e-mail: sadov@icm.krasn.ru

Среди множества корректных моделей в дальнейшем будем рассматривать только модели, позволяющие однозначно определить напряжения и деформации всех элементов реологической схемы. Сформулировать в общем случае условия, при выполнении которых модель обладает таким свойством, по-видимому, не удается, поэтому данный вопрос будем связывать с корректностью применяемого вычислительного алгоритма.

Пример корректной реологической схемы из четырех базовых элементов различного типа приведен на рис. 1. Судя по этой схеме, в состоянии растяжения жесткий контакт не оказывает никакого влияния, поэтому поведение материала описывается моделью вязкоупругой среды Максвелла, а в состоянии сжатия, когда контакт смыкается, материал ведет себя как упругая вязкопластическая среда Шведова–Бингама [1]. Полную систему уравнений для решения рассматриваемых задач при растягивающих напряжениях ($\sigma \geqslant 0$) образуют уравнения

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v, \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v, \quad \sigma^e = E\,\varepsilon^e, \quad \sigma^v = \eta\,\dot{\varepsilon}^v.$$

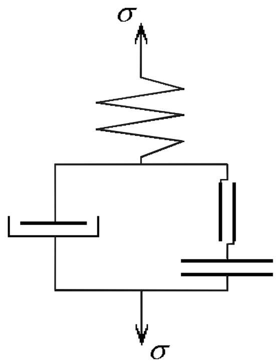

Рис. 1

Здесь E и η — модуль Юнга и коэффициент вязкости, точка над символом, как обычно, означает производную по времени, верхние индексы устанавливают соответствие между используемыми величинами и элементами схемы. Отсюда следует, что

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad \sigma = s(t) \equiv \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right) d\varepsilon(t_1), \tag{1}$$

где $\tau = \eta/E$ — время релаксации, σ_0 — начальное напряжение. Таким образом, в обеих задачах все неизвестные функции оказываются определенными.

При сжимающих напряжениях возможны различные варианты. Если сжатие производится после предварительного растяжения среды и, следовательно, $\varepsilon^c > 0$, то вплоть до момента смыкания контакта процесс описывается уравнениями (1). Если же $\varepsilon^c = 0$, то справедливы уравнения

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v + \sigma^c, \quad \sigma^c = \sigma^p, \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v, \quad \varepsilon^v = \varepsilon^p.$$

В случае $0 > \sigma > -\sigma_s$ (σ_s — предел текучести) пластический шарнир блокирует деформацию вязкого элемента, вязкое напряжение σ^v оказывается равным нулю. В этом состоянии среда деформируется в соответствии с законом Гука $\sigma = E\,\varepsilon$. Наконец, в случае $\sigma \leqslant -\sigma_s$ выполняется равенство $\sigma^p = -\sigma_s$, поэтому

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma + \sigma_s}{\eta}, \quad \sigma = s(t) - \sigma_s. \tag{2}$$

Все искомые функции также находятся однозначно.

Если программа нагружения или деформирования содержит чередующиеся участки растяжения и сжатия, то решения задач могут быть построены с помощью уравнений (1) и (2) в замкнутой форме, но имеют достаточно сложный вид. Чтобы дать математически строгую постановку задач в общем случае (для произвольных программ), дополним уравнения универсальными определяющими соотношениями для пластического шарнира и жесткого контакта. Такие соотношения записываются в виде вариационных неравенств

$$(\widetilde{\sigma} - \sigma^p)\,\dot{\varepsilon}^p \leqslant 0, \quad |\,\widetilde{\sigma}\,| \leqslant \sigma_s, \quad |\sigma^p| \leqslant \sigma_s, \quad \sigma^c\,(\widetilde{\varepsilon} - \varepsilon^c) \leqslant 0, \quad \widetilde{\varepsilon} \geqslant 0, \quad \varepsilon^c \geqslant 0,$$

содержащих произвольные допустимые вариации напряжения $\widetilde{\sigma}$ и деформации $\widetilde{\varepsilon}$. Кроме того, сформулируем начальные условия для вязкого и пластического элементов, для которых определяющие соотношения являются дифференциальными: $\varepsilon^v(0) = \varepsilon^p(0) = 0$.

3. Вычислительный алгоритм. В общем случае реологическая схема из n элементов разбивается по расположению соединительных узлов на m уровней. Каждый уровень характеризуется деформацией ε_i, $i = 1, \ldots, m$. Элементы нумеруются в строго определенном порядке: сначала упругие, затем вязкие, далее жесткие контакты и, наконец, пластические шарниры. Каждому из них соответствует напряжение σ_j, $j = 1, \ldots, n$. Пусть U — вектор размерности $N = m+n+1$, компонентами которого являются эти $m+n$ величин и еще одна величина — искомое значение полной деформации или результирующего напряжения, в зависимости от типа задачи. Реологическая схема общего вида приводит к системе, включающей в себя алгебраические уравнения — условия равновесия и определяющие уравнения для упругих элементов:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,U_j = f_i(t), \quad i = 1, \ldots, N_1, \tag{3}$$

обыкновенные дифференциальные уравнения, характеризующие вязкие элементы:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,\dot U_j = U_i, \quad i = N_1+1,\dots,N_2, \tag{4}$$

а также вариационные неравенства для жестких контактов

$$(\widetilde V_i - V_i)\,U_i \leqslant 0, \quad V_i \equiv \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,U_j \geqslant 0, \quad \widetilde V_i \geqslant 0, \quad i = N_2+1,\dots,N_3, \tag{5}$$

и для пластических шарниров

$$(\widetilde U_i - U_i)\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,\dot U_j \leqslant 0, \quad |U_i| \leqslant U_i^*, \quad |\,\widetilde U_i\,| \leqslant U_i^*, \quad i = N_3+1,\dots,N, \tag{6}$$

при начальных условиях $\sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij}\,U_j(0) = 0$, $i = N_1+1,\dots,N_2, N_3+1,\dots,N$. Входящие в систему (3) – (6) коэффициенты a_{ij} могут быть равными нулю, ± 1 или значениям модулей упругости и коэффициентов вязкости.

Например, реологическая схема на рис. 1 имеет три уровня ($m = 3$, $n = 4$), границы которых проходят через узлы соединений (рис. 2). Деформации элементов находятся по формулам $\varepsilon^e = \varepsilon_1$, $\varepsilon^p = \varepsilon_2$, $\varepsilon^v = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\varepsilon^c = \varepsilon_3$. Элементы нумеруются в следующем порядке: упругий (e), вязкий (v), жесткий контакт (c), пластический шарнир (p). Для этой схемы $N_1 = 5$, $N_2 = 6$, $N_3 = 7$, $N = 8$. В первой из задач вектор неизвестных функций представляется в виде $U = (\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, во второй — вместо полной деформации $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v$ в этом векторе повторно участвует напряжение $\sigma = \sigma^e$. Из коэффициентов уравнений и неравенств можно составить прямоугольные матрицы $A \sim a_{ij}$ и $F \sim f_i$.

Для первой задачи:	Для второй задачи:
$A = \begin{pmatrix} -1 & 1\,1\,1 & 0\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0\,0 & 1\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0\,0 & -1\,1\,0 & 1 \\ 0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,1 & -1 \\ 0 & -E\,0\,0 & 1\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,\eta\,\eta & 0\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0\,1 & 0\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,1\,0 & 0\,0\,0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1\,1\,1 & 0\,0\,0 & 0 \\ -1 & 0\,0\,0 & 1\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0\,0 & -1\,1\,0 & 1 \\ 0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,1 & -1 \\ 0 & -E\,0\,0 & 1\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,\eta\,\eta & 0\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0\,1 & 0\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,1\,0 & 0\,0\,0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \varepsilon(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Очевидно, что с помощью системы (3) – (6) можно описать реологическую схему любого уровня сложности. Аппроксимация входящих в эту систему производных приводит к уравнениям и неравенствам

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,U_j^{k+1} = f_i^{k+1}, \quad \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,(U_j^{k+1} - U_j^k) = \Delta t\,U_i^{k+1}, \tag{7}$$

$$(\widetilde V_i - V_i^{k+1})\,U_i^{k+1} \leqslant 0, \quad V_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,U_j^{k+1} \geqslant 0, \quad \widetilde V_i \geqslant 0, \tag{8}$$

$$(\widetilde U_i - U_i^{k+1})\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,(U_j^{k+1} - U_j^k) \leqslant 0, \quad |U_i^{k+1}| \leqslant U_i^*, \quad |\widetilde U_i| \leqslant U_i^*. \tag{9}$$

Здесь для краткости опущены границы изменения индекса i, которые указаны в соответствующих формулах (3) – (6).

Перебирая различные случаи реализации ограничений, нетрудно показать [3], что вариационное неравенство (8) эквивалентно альтернативе: либо $V_i^{k+1} = 0$ и, одновременно, $U_i^{k+1} \leqslant 0$, либо $V_i^{k+1} > 0$ и

$U_i^{k+1} = 0$. Аналогично, вариационное неравенство (9) приводится к выбору одного из трех вариантов:

$$\begin{aligned}
&\text{i)} \quad \left|U_i^{k+1}\right| < U_i^*, \quad \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,(U_j^{k+1} - U_j^k) = 0,\\
&\text{ii)} \quad U_i^{k+1} = U_i^*, \quad \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,(U_j^{k+1} - U_j^k) \geqslant 0,\\
&\text{iii)} \quad U_i^{k+1} = -U_i^*, \quad \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,(U_j^{k+1} - U_j^k) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

В первом из них напряжение пластического шарнира ниже предельного уровня, поэтому скорость пластической деформации равна нулю. Во втором напряжение совпадает с пределом текучести при растяжении, следовательно, скорость деформации неотрицательна. В третьем варианте напряжение достигает предела текучести при сжатии, поэтому скорость деформации меньше либо равна нулю. Таким образом, систему (7) – (9) можно решить численно с помощью алгоритма перебора среди конечного числа возможных вариантов. На каждом шаге такого алгоритма решается линейная система, которая включает в себя уравнения (7) и уравнения, отвечающие вариационным неравенствам (8), (9). Переход к следующему шагу происходит, только если полученное решение не удовлетворяет некоторому ограничению — неравенству. В этом случае соответствующее уравнение заменяется альтернативным. Если же все ограничения выполняются, то процесс перебора заканчивается переходом на следующий временной слой.

Для ускорения счета можно исключить многократное решение системы (7). Для этого из уравнений (7) и входящих в (8) уравнений для V_i^{k+1} определяются все компоненты вектора U кроме напряжений пластических шарниров. Последние напряжения считаются произвольными величинами. Деформации жестких контактов также остаются неопределенными. Более точно, строится базис пространства решений системы линейных алгебраических уравнений (7), (8). Размерность этого пространства должна быть равна числу уравнений — такое требование является одним из условий корректности реологической схемы. На практике это условие легко проверяется — если ранг матрицы, составленной из коэффициентов системы, меньше N_3, то рассматриваемая схема непригодна.

Далее задача сводится к решению вариационных неравенств (8), (9) относительно напряжений в пластических шарнирах и деформаций жестких контактов с помощью описанного выше переборного алгоритма, но на каждом шаге этого алгоритма решаются системы уравнений размерности $N - N_2$. Требование существования и единственности решения вариационных неравенств, а также условие сходимости алгоритма накладывает дополнительные ограничения на корректность схемы.

В общем случае вытекающая из (7), (8) система линейных алгебраических уравнений на $(k+1)$-м шаге по времени имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N_3} a_{ij}\,U_j^{k+1} = f_i^{k+1} - \sum_{j=N_3+1}^{N} a_{ij}\,U_j^{k+1}, \quad i = 1,\dots,N_1,\\
&\sum_{j=1}^{N_3} \overline{a}_{ij}\,U_j^{k+1} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,U_j^{k} - \sum_{j=N_3+1}^{N} a_{ij}\,U_j^{k+1}, \quad i = N_1+1,\dots,N_2,\\
&\sum_{j=1}^{N_3} a_{ij}\,U_j^{k+1} = V_i^{k+1} - \sum_{j=N_3+1}^{N} a_{ij}\,U_j^{k+1}, \quad i = N_2+1,\dots,N_3,
\end{aligned}$$

где $\overline{a}_{ij} = a_{ij} - \Delta t\,\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Будем считать, что определитель квадратной матрицы, составленной из коэффициентов в левой части этой системы, отличен от нуля. Таким образом, из системы можно выразить

$$U_i^{k+1} = \sum_{j=N_2+1}^{N} b_{ij}\,V_j^{k+1} + g_i^{k+1}, \quad i = 1,\dots,N_3. \tag{10}$$

Здесь b_{ij} — коэффициенты, вычисляемые через коэффициенты a_{ij} и обратную матрицу системы; g_j^{k+1} — величины, зависящие от f_j^{k+1} и U_j^k; $V_j^{k+1} = U_j^{k+1}$ для $j = N_3+1,\dots,N$.

После подстановки уравнений (10) в неравенства (8), (9) получим в матричной форме вариационное неравенство с простыми ограничениями (индивидуальными для каждой компоненты вектора неизвестных)

$$(\widetilde{V}-V)(CV-Y)\geqslant 0,\quad V^-\leqslant V\leqslant V^+,\quad V^-\leqslant\widetilde{V}\leqslant V^+, \tag{11}$$

где C и Y — квадратная матрица и вектор (нумерация строк и столбцов в них начинается с N_2+1, а не с 1) из коэффициентов $c_{ij}=-b_{ij}$, $y_i^{k+1}=g_i^{k+1}$ для $i=N_2+1,\dots,N_3$ и $y_i^{k+1}=\sum\limits_{j=1}^{N_3}a_{ij}\,g_j^{k+1}-\sum\limits_{i=1}^{N}a_{ij}\,U_j^k$,

$$c_{ij}=\begin{cases}-\sum\limits_{l=1}^{N_3}a_{il}\,b_{lj}, & \text{если}\ j=N_2+1,\dots,N_3,\\ -a_{ij}-\sum\limits_{l=1}^{N_3}a_{il}\,b_{lj}, & \text{если}\ \ j=N_3+1,\dots,N,\end{cases}$$

для $i=N_3+1,\dots,N$. Компоненты вектора V^+, соответствующие жестким контактам, равны $+\infty$, для пластических элементов $V_i^+=U_i^*$. Вектор V^- составлен из нулей и отрицательных величин $-U_i^*$, соответственно.

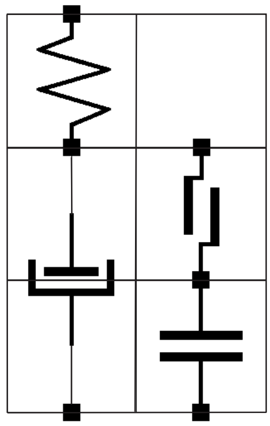

Рис. 2. Графическое изображение схемы

Если матрица C положительно определена, то по теореме существования и единственности [3] вариационное неравенство (11) однозначно разрешимо. Как показали вычислительные эксперименты с различными реологическими схемами, процесс перебора также оказывается сходящимся. В то же время, для широкого класса схем, в частности для рассмотренной выше схемы из четырех реологических элементов разного типа, матрица C неотрицательно определена, но положительно определенной она не является. В этом случае алгоритм иногда выходит на бесконечно повторяющиеся циклы. Исправить возникающую ситуацию можно за счет добавления к диагональным элементам малого регуляризующего параметра, что соответствует включению в реологическую схему параллельно пластическим шарнирам и жестким контактам системы упругих элементов малой жесткости. Гарантировать сходимость последовательности решений при стремлении параметра регуляризации к нулю нельзя, однако достаточно просто выполнить апостериорную проверку сходимости, монотонно уменьшая в расчетах значение этого параметра.

4. Компьютерная система. Рассмотренный алгоритм реализован в общем виде в среде объектного программирования Delphi 5. Входными переменными разработанной компьютерной системы являются значения феноменологических параметров для упругих, вязких и пластических элементов. Исследуемая схема строится средствами визуального проектирования с использованием графических примитивов. Пример задания конкретной схемы из четырех элементов различного типа приведен на рис. 2. На выходе система позволяет получить графики изменения деформаций и напряжений в элементах схемы в зависимости от времени, а также графики полной деформации $\varepsilon(t)$ и результирующего напряжения $\sigma(t)$. Тестирование алгоритма проводилось на решениях, найденных по формулам (1), (2), и показало, что вычислительная погрешность алгоритма соответствует первому порядку аппроксимации неявной схемы.

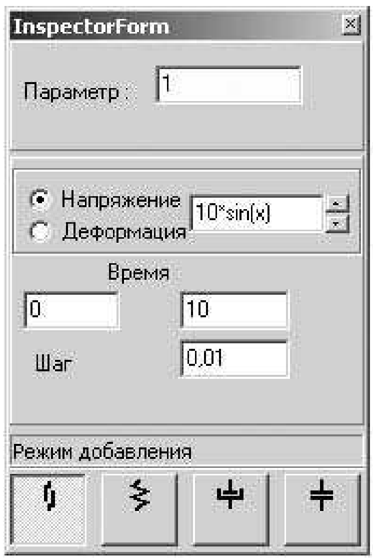

Рис. 3. Инспектор объектов

Технология работы с системой такова. Чтобы задать новую реологическую схему, необходимо выбрать соответствующий пункт меню или нажать кнопку на панели инструментов. При этом производится запуск редактора схем — программы, манипулирующей с совокупностью средств и объектов, с помощью которых создается произвольная схема. На рабочую область последовательно наносятся реологические элементы с одновременным заданием параметров. Рабочая область — это поле с нанесенной на него сеткой, которая предназначена для точного позиционирования элементов. Для удобства в правом верхнем углу расположен так называемый инспектор объектов (рис. 3), предоставляющий множество элементов, которые могут быть помещены в рабочей области. Инспектор объектов имеет ряд редактируемых полей, служащих для изменения параметров и элементов схемы. Таким образом, параметры элементов остаются доступными для редактирования после внесения их в реологическую схему — достаточно указать мышью нужные элементы и изменить соответствующие значения в инспекторе объектов.

По мере размещения на рабочей области элемент может быть растянут или сжат в соответствии с топологией схемы. Элемент, включенный ошибочно, может быть удален либо перемещен в другую часть рабочей области посредством выбора соответствующего пункта контекстного меню, определенного для каждого элемента. Действия над элементами можно также производить с помощью “горячих клавиш”.

Результаты задания реологической схемы сохраняются в файл специального формата, который формируется системой. Кроме того, система самостоятельно отслеживает любые изменения в схеме; если таковые имелись, то при выходе формулируется диалоговый запрос на их сохранение. Предусмотрен альтернативный способ задания схемы — загрузка из уже существующего файла. При загрузке на экране отображается имя файла и осуществляется проверка его формата на соответствие системе.

После того как схема определена, указывается, какую из двух задач необходимо решить: задачу определения деформации по заданному напряжению или напряжения по заданной деформации. Возможность использования функций, зависящих от времени, реализована с помощью синтаксического анализатора формульных выражений. Синтаксический анализатор представляет собой специальную подпрограмму-функцию, экспортируемую из динамической библиотеки, входящей в состав проекта. В эту подпрограмму в качестве параметров передается строка с формулой и список значений переменных, входящих в формулу, а на выходе получается вычисленное значение функции. В формулу могут входить знаки математических операций: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, а также все основные элементарные функции.

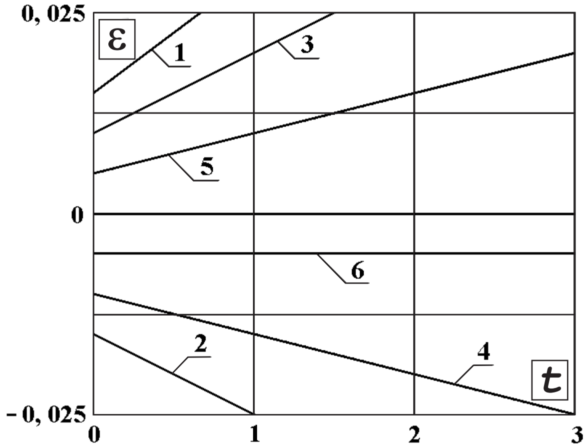

Рис. 4. Диаграммы ползучести

Далее производится запуск расчетных процедур, реализующих описанный алгоритм. В этих процедурах базис пространства решений системы уравнений (7) строится по методу Гаусса с выбором главного элемента. К решению систем уравнений, возникающих при реализации вариационного неравенства (11), применяется тот же метод. После выполнения расчетов система предоставляет возможность вывода данных в виде графиков на экран или в выходной файл — текстовый файл с разделителями, который можно использовать для анализа в других графических редакторах.

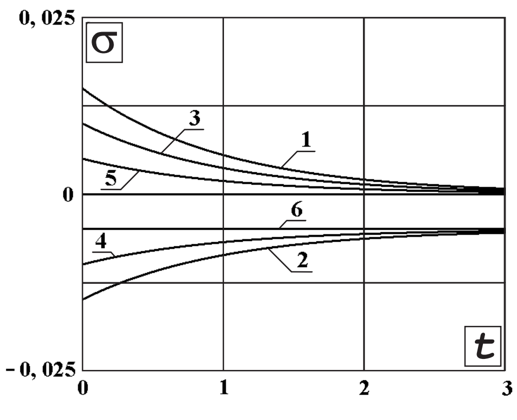

Рис. 5. Кривые релаксации

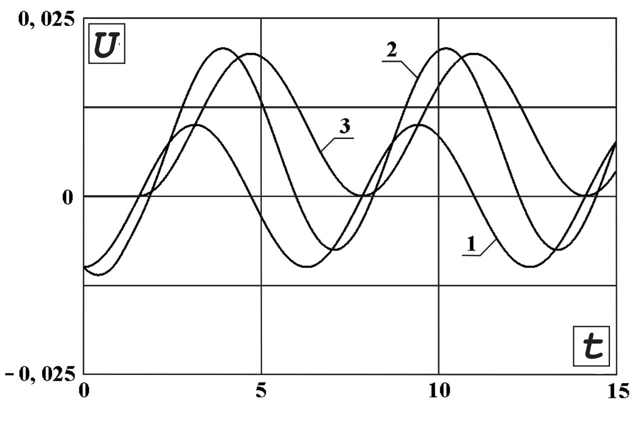

Рис. 6. Нагружение с $\sigma(t) = -0.01\cos t$

5. Результаты расчетов. На рис. 4 – 12 представлены результаты расчетов, полученных с помощью компьютерной системы, для схемы из четырех реологических элементов. Решение приведено в безразмерных переменных:

$$\overline{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \overline{\sigma} = \frac{\sigma}{E}, \quad \overline{\varepsilon} = \varepsilon, \quad \overline{E} = 1, \quad \overline{\sigma}_s = \frac{\sigma_s}{E}, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{\tau E} = 1.$$

Обезразмеренный предел текучести $\overline{\sigma}_s$ (далее черта над безразмерными величинами всюду опускается) равен 0,005. На рис. 4 изображена серия диаграмм ползучести, отвечающих постоянным напряжениям $\sigma = \pm 0.015$, ± 0.01 и ± 0.005 (кривые $1, \ldots, 6$ соответственно). Эти диаграммы представляют собой

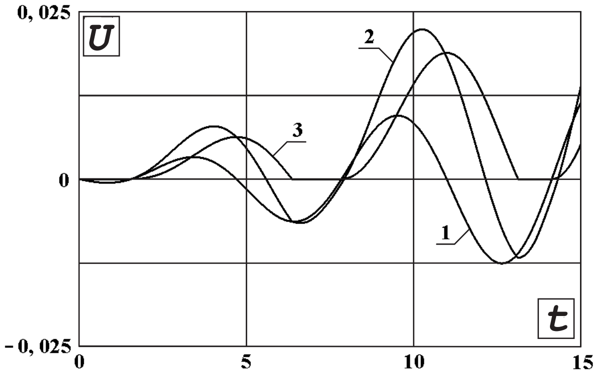

Рис. 7. Нагружение с $\sigma(t) = -0.001\, t \cos t$

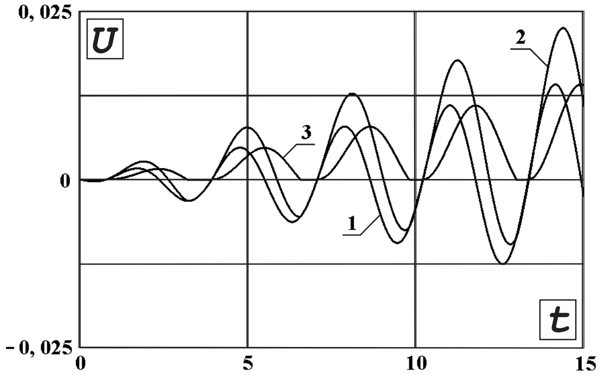

Рис. 8. Нагружение с $\sigma(t) = -0.001\, t \cos 2t$

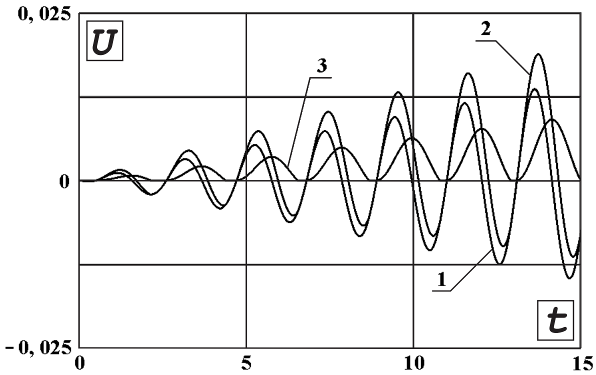

Рис. 9. Нагружение с $\sigma(t) = -0.001\, t \cos 3t$

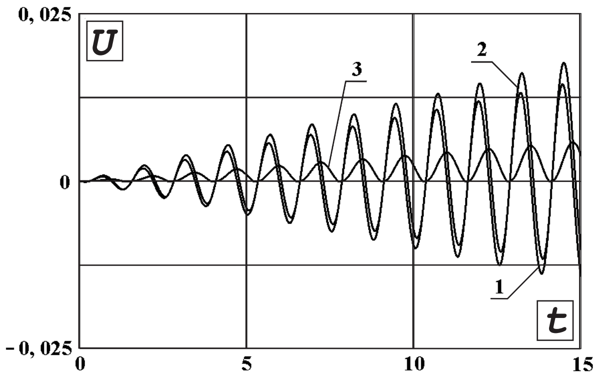

Рис. 10. Нагружение с $\sigma(t) = -0.001\, t \cos 5t$

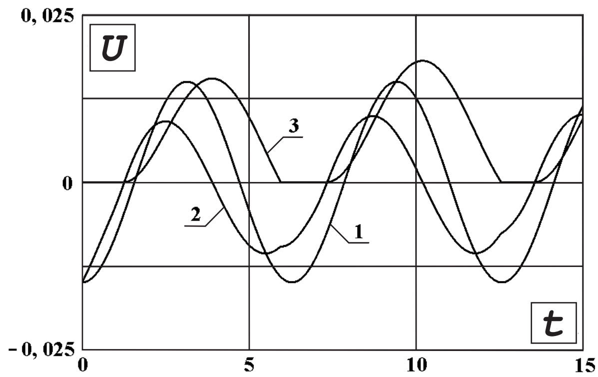

Рис. 11. Деформирование с $\varepsilon(t) = -0.015 \cos t$

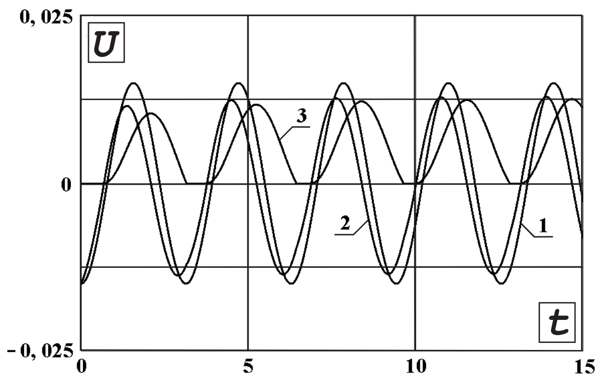

Рис. 12. Деформирование с $\varepsilon(t) = -0.015 \cos 2t$

линейные зависимости с угловыми коэффициентами, зависящими от уровня напряжений, и с нулевым наклоном в случае сжимающего напряжения, модуль которого не превосходит предела текучести пластического шарнира. На рис. 5 приведена серия кривых релаксации напряжений при постоянной деформации $\varepsilon = \pm 0.015$, ± 0.01 и ± 0.005.

На рис. 6–12 изображены диаграммы изменения деформации от времени для циклического нагружения с постоянной и линейно нарастающей амплитудой напряжения. Всюду на графиках кривые 1 соответствуют зависимости от времени напряжения $\sigma(t)$, кривые 2 — полной деформации $\varepsilon(t)$, кривые 3 — деформации жесткого контакта $\varepsilon^c(t)$.

Анализ показывает, что при постоянной амплитуде жесткий контакт находится в замкнутом состоянии только в течение начального интервала времени в пределах первого периода нагружения. В дальнейшем среда приспосабливается к периодической нагрузке и никогда не выходит на режим уплотнения (рис. 6). В случае растущей амплитуды интервал замкнутого состояния контакта повторяется периодически (рис. 7, 8).

С увеличением частоты (рис. 9, 10) кривая 2 приближается к кривой 1. Так как полное совпадение этих кривых имеет место только в случае реологической схемы из единственного упругого элемента, то отсюда следует, что влияние вязкости, пластичности и разнопрочности по сравнению с упругими свойствами рассматриваемой среды с увеличением частоты нагружения становится малосущественным.

На рис. 11 и 12 приведены графики, описывающие изменение напряжений и деформаций для той же реологической схемы с теми же параметрами, но при заданной полной деформации $\varepsilon(t)$, которая изменяется по периодическому закону. Как и прежде, кривые 1 соответствуют зависимости от времени напряжения, а кривые 2 — деформации. Судя по графикам деформации жесткого контакта (кривые 3), приспособления среды к периодическому деформированию с постоянной амплитудой не происходит — на каждом цикле состояние уплотнения среды, в котором контакт смыкается, сменяется разрыхленным состоянием. Сопоставление рис. 11 и 12 показывает, что с увеличением частоты кривые напряжений и деформаций приближаются друг к другу. Таким образом, в случае высокочастотного деформирования вязкопластические свойства оказывают слабое влияние на напряженное состояние среды. Основную роль играет упругий элемент реологической схемы, для которого безразмерные зависимости $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04–01–00267), Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 14 “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий”, Фонда содействия отечественной науке и Красноярского краевого фонда науки (проект № 16G040).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965.
2. *Садовский В.М.* Численное моделирование в задачах динамики сыпучих сред // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. 2002. **15**. 183–198.
3. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию
25.03.2006