УДК 519.6

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Гончарский[1], Д. В. Туницкий[2]

Задачи формирования лазерного излучения актуальны для широкого круга приложений: телекоммуникаций, лазерной обработки материалов, голографии и т.п. В настоящей статье рассматривается задача формирования прямоугольных пучков лазерного излучения с равномерным распределением интенсивности. В таких задачах возможности традиционных оптических элементов ограниченны. Для решения задачи предлагается использовать плоские оптические элементы. Таким образом, задача сводится к вычислению фазовой функции плоского оптического элемента, формирующего заданное изображение. С точки зрения практической реализации элементы с гладкими фазовыми функциями обладают существенными преимуществами. Дана постановка задачи формирования лазерного излучения из области в область в приближении геометрической оптики. Поставленная задача является нелинейной и может быть сведена к нелинейному уравнению Монжа–Ампера. Показано, что решение задачи существует и неединственно. Предложен эффективный численный алгоритм.

Ключевые слова: лазерное излучение, лазерная обработка материалов, геометрическая оптика, уравнение Монжа–Ампера, оптические элементы, визуализация.

Введение. Рассматриваются задачи формирования лазерного излучения из области в область в приближении геометрической оптики. Пусть дана область G_1, в которой расположен плоский оптический элемент. На элемент падает лазерное излучение. Требуется создать такой оптический элемент, чтобы на некотором расстоянии излучение можно было сформировать в виде определенной фигуры (область G_2). Свойства оптического элемента задаются фазовой функцией. Таким образом, требуется решить обратную задачу синтеза — найти фазовую функцию оптического элемента.

В статье обсуждаются вопросы существования и единственности решения таких задач и предложен эффективный численный алгоритм их решения. Выполнены модельные расчеты для случаев, когда область оптического элемента G_1 является кругом, а сформированное изображение является квадратом или прямоугольником.

Пусть излучение распространяется вдоль оси Z. Оптический элемент находится в плоскости $z = 0$, в этой плоскости заданы координаты x и y. На элемент падает плоская волна с равномерным распределением амплитуды. На расстоянии f от плоскости xy находится параллельная ей плоскость изображения с координатами p и q (рис. 1). Пусть оптический элемент занимает область G_1, а в плоскости изображения задана область G_2. Требуется создать элемент, который на расстоянии $z = f$ сформирует такое волновое поле, что его амплитуда будет нулевой всюду за пределами области G_2 и постоянной внутри области G_2.

Будем рассматривать только фазовые оптические элементы. Тогда в рамках геометрической оптики такого рода элемент характеризуется фазовой функцией $\varphi(x, y)$. Если оптический элемент задан, т.е. известна функция $\varphi(x, y)$, то существует отображение из области G_1 в область G_2, которое запишем в виде $p = p(x, y) = x + f\varphi_x(x, y)$, $q = q(x, y) = y + f\varphi_y(x, y)$.

В когерентной оптике существенна взаимная однозначность отображения. С точки зрения практической реализации предпочтительны элементы, которые задаются гладкой фазовой функцией. Распределение амплитуд в поперечном направлении падающего излучения в плоскости xy и сфокусированного в плоскости pq будем считать постоянным. Формально это приводит к условию постоянства якобиана отображения: $\big|J(p, q)\big| = |p_x q_y - p_y q_x| = \text{const}$.

Таким образом, требуется построить взаимно-однозначное отображение G_1 в G_2. Несмотря на кажущуюся простоту, эта задача является нелинейной и ее исследование представляет существенные трудности.

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: gonchar@srcc.msu.su

[2] Институт проблем управления РАН, ул. Профсоюзная, 65, 117997, Москва; e-mail: dtunitsky@yahoo.com

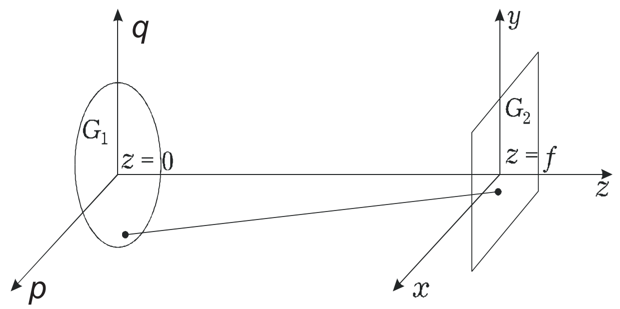


Рис. 1. Задача формирования плоских изображений

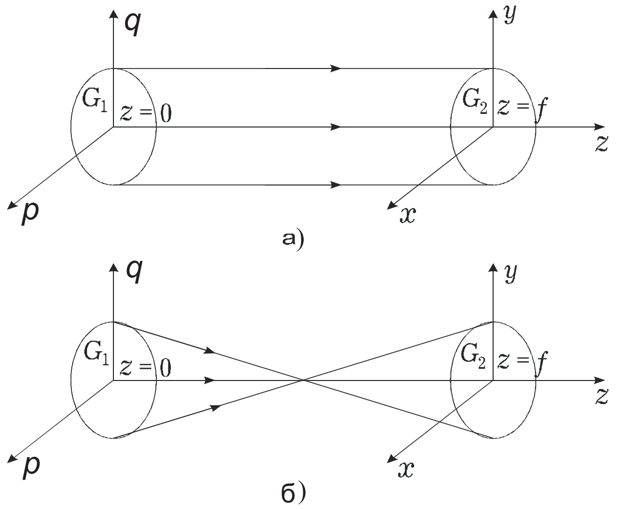


Рис. 2. Неединственность решения задачи формирования плоских изображений

Как показано ниже, при определенных ограничениях на области G_1 и G_2 можно ввести функцию $z(x,y)$, такую, что $p(x,y) = z_x(x,y)$, $q(x,y) = z_y(x,y)$. Можно показать что функция $z(x,y)$ является решением уравнения Монжа–Ампера в области G_1: $z_{xx}z_{yy} - z^2{}_{xy} - 1 = 0$.

Если функция $z(x,y)$ найдена, то фазовую функцию оптического элемента можно получить по формуле

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{f}\left(z(x,y) - \frac{x^2+y^2}{2}\right).$$

Таким образом, поставленная задача сводится к вычислению функции $z(x,y)$. Кажущаяся простота формулировки скрывает существенные трудности, поскольку задача нелинейна и ее решение неединственно.

Проиллюстрируем сказанное на примере простейшей задачи формирования изображения из круга в круг. Нетрудно показать, что существуют два решения. В первом случае отображение G_1 в G_2 есть просто единичный оператор (рис. 2 а), а фазовая функция оптического элемента, очевидно, равна константе. Во втором случае отображение уже не является единичным оператором (см. рис. 2 б). Оптический элемент фокусирует излучение в точку на расстоянии $f/2$ и формирует круг на расстоянии f. В этом случае очевидно, что оптический элемент работает как собирающая линза, а фазовая функция элемента является параболоидом.

В статье рассматриваются случаи более сложных выпуклых центрально-симметричных областей G_1 и G_2. В этом общем случае решение можно найти только численно на основе решения уравнения Монжа–Ампера.

1. Уравнения Монжа–Ампера. Уравнением Монжа–Ампера называется соотношение вида

$$A + Bz_{xx} + 2Cz_{xy} + Dz_{yy} + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0. \tag{1.1}$$

Коэффициенты A, B, C, D и E зависят от x, y, p, q и z, где x и y — независимые переменные, $z = z(x,y)$ — неизвестная функция; здесь использованы обозначения Монжа

$$p = z_x(x,y), \quad q = z_y(x,y). \tag{1.2}$$

Будем считать, что $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2 \neq 0$ и что A, B, C, D и E — непрерывные по Гельдеру функции во всем пространстве $\mathbb{R}^5$ параметров x, y, p, q и z. Точнее, для всякого компактного подмножества T пространства $\mathbb{R}^5$ существует такое α, $0 < \alpha < 1$, что A, B, C, D, $E \in C^\alpha(T)$.

2. Многозначные решения. Пусть S — область на плоскости параметров xy, и пусть функция $z = z(x,y)$ класса $C^{2+\alpha}(S)$ служит решением уравнения (1.1). Выражения (1.2) вместе с

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z(x,y) \tag{2.1}$$

задают в пространстве $\mathbb{R}^5$ параметров x, y, p, q и z двумерную поверхность $\sigma : S \to \mathbb{R}^5$ класса $C^{1+\alpha}$. Предположим, что на этой поверхности введена другая параметризация

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta), \quad p = p(\xi,\eta), \quad q = q(\xi,\eta), \quad z = z(\xi,\eta). \tag{2.2}$$

По теореме о неявной функции из (2.2) с помощью (1.2) и (2.1) находим

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \begin{vmatrix} p_\xi & y_\xi \\ p_\eta & y_\eta \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{vmatrix}, \quad z_{yy} = \begin{vmatrix} x_\xi & q_\xi \\ x_\eta & q_\eta \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{vmatrix}, \\ z_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_\xi & p_\xi \\ x_\eta & p_\eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_\xi & y_\xi \\ q_\eta & y_\eta \end{vmatrix} \right) : \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{vmatrix}, \quad z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \begin{vmatrix} p_\xi & q_\xi \\ p_\eta & q_\eta \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Подставим (2.3) в (1.1). Учитывая, что $\begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{vmatrix} \neq 0$, получим

$$A\begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{vmatrix} + B\begin{vmatrix} p_\xi & y_\xi \\ p_\eta & y_\eta \end{vmatrix} + C\left(\begin{vmatrix} x_\xi & p_\xi \\ x_\eta & p_\eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_\xi & y_\xi \\ q_\eta & y_\eta \end{vmatrix} \right) + D\begin{vmatrix} x_\xi & q_\xi \\ x_\eta & q_\eta \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} p_\xi & q_\xi \\ p_\eta & q_\eta \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

Добавим к этому выведенные из (1.2) соотношения полосы:

$$z_\xi - px_\xi - qy_\xi = 0, \quad z_\eta - px_\eta - qy_\eta = 0. \tag{2.5}$$

В результате приходим к выводу, что вектор-функция $\sigma(x, y)$ удовлетворяет равенствам

$$\sigma^*\omega_0 = 0, \quad \sigma^*\omega_2 = 0, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned} &\omega_0 = dz - p\,dx - q\,dy, \\ &\omega_2 = A\,dx \wedge dy + B\,dp \wedge dy + C(dx \wedge dp + dq \wedge dy) + D\,dx \wedge dq + E\,dp \wedge dq. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Известно, что любое дифференциальное уравнение может быть записано в форме системы внешних дифференциальных уравнений на соответствующем многообразии [9]. В частности, проведенные выше рассуждения показывают, что уравнению (1.1) в пространстве $\mathbb{R}^5$ отвечает система

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_2 = 0. \tag{2.8}$$

Дифференциальная форма ω_0 задает в пространстве $\mathbb{R}^5$ контактную структуру, а ω_2 соответствует левой части уравнения Монжа–Ампера (1.1). Дифференциальная форма ω_2 выбрана таким образом, что коэффициенты при моно́мах $dx \wedge dp$ и $dq \wedge dy$ совпадают и отсутствует сомножитель dz. Формы, обладающие этим свойством, называют эффективными [4]. Оператор ограничения σ^* коммутирует с оператором внешнего дифференцирования [6]. Следовательно, из первого соотношения (2.6) вытекает равенство $\sigma^*(\omega_1) = 0$, где

$$\omega_1 = d\omega_0 = dx \wedge dp + dy \wedge dq. \tag{2.9}$$

Таким образом, дифференциальным следствием системы (2.8) является уравнение

$$\omega_1 = 0. \tag{2.10}$$

Определение 2.1. Пусть S — двумерное хаусдорфово многообразие, C^∞ — гладкое компактное односвязное многообразие с краем $\partial S \neq 0$. Будем говорить, что погружение

$$\sigma : S \to \mathbb{R}^5 \tag{2.11}$$

класса $C^{1+\alpha}(S)$, $0 < \alpha < 1$, является *многозначным решением* уравнения (1.1) (или, что то же самое, системы (2.8)–(2.10)), если оно удовлетворяет условиям (2.6).

По определению 2.1 всякое многозначное решение представляет собой пару (S, σ), состоящую из многообразия S с краем ∂S и отображения σ. Такие решения могут не иметь однозначной проекции на плоскость параметров xy. Поэтому, следуя А. М. Виноградову [10], мы называем их многозначными. Те многозначные решения, для которых выполнено представление (1.2), (2.1), как обычно, будем называть *классическими*. Таким образом, всякое классическое решение является многозначным, но не наоборот.

Определение 2.2. Пусть (S,σ) и $(\widetilde{S},\widetilde{\sigma})$ — многозначные решения уравнения (1.1). Будем называть эти решения эквивалентными и записывать $(S,\sigma)\sim(\widetilde{S},\widetilde{\sigma})$, если существует такой $C^{1+\alpha}$-диффеоморфизм

$$\psi : S \to \widetilde{S}, \tag{2.12}$$

для которого

$$\sigma = \widetilde{\sigma}\circ\psi. \tag{2.13}$$

Иначе говоря, два решения эквивалентны, если одно получается из другого в результате перепараметризации соответствующей интегральной поверхности. Сформулированное определение корректно, так как введенное на множестве многозначных решений отношение "$\sim$" рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример 2.3. Рассмотрим уравнение Лапласа $z_{xx}+z_{yy}=0$. Левой части этого уравнения отвечает эффективная дифференциальная 2-форма $\omega_2 = dp\wedge dy + dx\wedge dq$.

Пусть $S=K$ — замкнутый единичный круг на плоскости параметров $\xi\eta$ и (2.11) — некоторое $C^{1+\alpha}$-гладкое отображение. Предположим, что компоненты $x\circ\sigma$, $y\circ\sigma$, $p\circ\sigma$ и $q\circ\sigma$ этого отображения таковы, что функции

$$f = y\circ\sigma + ix\circ\sigma, \quad t = p\circ\sigma + iq\circ\sigma \tag{2.14}$$

комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$ голоморфны внутри K и $|f_\zeta|+|t_\zeta|\neq 0$. Такое отображение является погружением. Непосредственная подстановка показывает, что, доопределив функцию z в соответствии с условиями полосы (2.5), мы получим отображение $\sigma : K\to\mathbb{R}^5$, удовлетворяющее системе внешних дифференциальных уравнений (2.8) – (2.10). Следовательно, (K,σ) — это многозначное решение уравнения Лапласа. В случае $f=u+iv$ погружение (2.14) задает график голоморфной функции t, а в случае $t=u+iv$ — риманову поверхность аналитической функции f^{-1}, обратной к f. В общем случае отображение (2.14) является регулярной голоморфной кривой в двумерном комплексном пространстве. Таким образом, любая регулярная голоморфная кривая $(f,t) : K\to C^2$ определяет некоторое многозначное решение уравнения Лапласа. Ниже установлено, что верно и обратное утверждение: всякое многозначное решение уравнения Лапласа определяется регулярной голоморфной кривой (лемма 6.1).

Лемма 2.4. *Всякое двумерное хаусдорфово гладкое компактное односвязное многообразие S с краем $\partial S\neq 0$ диффеоморфно замкнутому кругу.*

Доказательство приведено в разделе 8.

По лемме 2.4 можно, не ограничивая общности, считать, что для всякого многозначного решения (S,σ) многообразием S служит замкнутый круг или, более общо, стягиваемая компактная область с гладкой границей на плоскости параметров $\xi\eta$.

Обозначим через Π проекцию $\Pi : \mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^2$ пятимерного пространства параметров x, y, p, q и z на плоскость xy и положим $\pi=\Pi\circ\sigma$:

$$\pi : S\to\mathbb{R}^2. \tag{2.15}$$

Имеет место следующий критерий эквивалентности многозначного решения классическому.

Лемма 2.5. *Пусть выполнено включение*

$$\pi(\partial S)\subseteq\partial G, \tag{2.16}$$

где G — некоторая односвязная компактная область плоскости xy с непустой внутренностью и гладкой границей ∂G. Многозначное решение (2.11) *уравнения* (1.1) *тогда и только тогда эквивалентно классическому, когда во всех точках $(\xi,\eta)\in S$ имеет место оценка*

$$\big((x\circ\sigma)_\xi(y\circ\sigma)_\eta-(x\circ\sigma)_\eta(y\circ\sigma)_\xi\big)(\xi,\eta)\neq 0. \tag{2.17}$$

Доказательство дано в разделе 8.

3. Характеристические расслоения. Пфаффиан эффективной дифференциальной формы ω_2

$$Pf(\omega_2) = -C^2+BD-AE \tag{3.1}$$

с точностью до знака совпадает с дискриминантом характеристической формы уравнения (1.1), вычисленным на решении $z(x,y)$ [11]. Если функция (3.1) положительна

$$Pf(\omega_2)>0, \tag{3.2}$$

то уравнение (1.1) называется *эллиптическим*.

В дальнейшем все рассматриваемые уравнения Монжа–Ампера предполагаются эллиптическими. Как известно, эллиптические уравнения не имеют вещественных характеристик.

Определение 3.1. *Комплексным векторным характеристическим расслоением* H_j, $j = 1$, 2, *уравнения* (1.1) *называется подрасслоение комплексного касательного расслоения* $T^C\mathbb{R}^5$, *слой* $H_j(m)$ *которого в каждой точке* $m \in \mathbb{R}^5$ *определяется равенством*

$$H_j(m) = \Big\{\xi \in T^C_m\mathbb{R}^5 \,\big|\, \xi \lrcorner (\omega_2 - \lambda_j\omega_1) = 0,\, \xi \lrcorner \omega_0 = 0\Big\}. \tag{3.3}$$

Здесь λ_j — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + Pf(\omega_2) = 0$, т.е. $\lambda_1 = i\delta$, $\lambda_2 = -i\delta$, где i — мнимая единица, $\delta = \sqrt{|Pf(\omega_2)|}$, а ω_0, ω_1 и ω_2 — дифференциальные формы (2.7), (2.9).

Непосредственная проверка показывает, что характеристическое расслоение H_j порождается комплексными векторными полями

$$\begin{aligned}
e_{j1} &= E\Big(\frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial z}\Big) - D\,\frac{\partial}{\partial p} + (C - \lambda_j)\,\frac{\partial}{\partial q}\,,\\
e_{j2} &= E\Big(\frac{\partial}{\partial y} + q\,\frac{\partial}{\partial z}\Big) + (C + \lambda_j)\,\frac{\partial}{\partial p} - B\,\frac{\partial}{\partial q}\,,\\
e_{j3} &= B\Big(\frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial z}\Big) + (C - \lambda_j)\,\Big(\frac{\partial}{\partial y} + q\,\frac{\partial}{\partial z}\Big) - A\,\frac{\partial}{\partial p}\,,\\
e_{j4} &= (C + \lambda_j)\Big(\frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial z}\Big) + D\Big(\frac{\partial}{\partial y} + q\,\frac{\partial}{\partial z}\Big) - A\,\frac{\partial}{\partial q}\,.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Среди этих векторных полей ровно два линейно независимых в каждой точке m пространства $\mathbb{R}^5$. Это вытекает из определения λ_j неравенства (3.2). Например, в тех точках, где коэффициент $E \neq 0$, независимы e_{j1} и e_{j2}, а в тех точках, где $B \neq 0$, независимы e_{j3} и e_{j2}.

Двойственным образом по отношению к определению 3.1 векторных расслоений H_j вводятся ковекторные расслоения H_j^*.

Определение 3.2. *Комплексным ковекторным характеристическим расслоением* $H_j^*, j = 1, 2$, *уравнения* (1.1) *называется подрасслоение комплексного кокасательного расслоения* $T^{*C}\mathbb{R}^5$, *слои которого* $H_j^*(m)$ *в каждой точке* $m \in \mathbb{R}^5$ *определяются равенством*

$$H_j^*(m) = \Big\{\omega \in T^{*C}_m\mathbb{R}^5 \,\big|\, \omega \wedge (\omega_2 + \lambda_j\omega_1) = 0\Big\}. \tag{3.5}$$

Можно показать, что характеристическое расслоение H_j^* порождается комплексными линейными дифференциальными формами

$$\begin{aligned}
f_{j1} &= e_{j1} \lrcorner \omega_1 = E\,dp + D\,dx - (C - \lambda_j)\,dy,\\
f_{j2} &= e_{j2} \lrcorner \omega_1 = E\,dq - (C + \lambda_j)\,dx + B\,dy,\\
f_{j3} &= e_{j3} \lrcorner \omega_1 = B\,dp + (C - \lambda_j)\,dq + A\,dx,\\
f_{j4} &= e_{j4} \lrcorner \omega_1 = (C + \lambda_j)\,dp + D\,dq + A\,dy.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Используя определения (3.3), (3.5) и представления (3.4), (3.6), путем прямых вычислений устанавливается

Лемма 3.3. *Для векторных и ковекторных характеристических расслоений* H_j *и* H_j^* *справедливы следующие свойства.*

(a) H_j *— двумерное комплексное подрасслоение в* $T^C\mathbb{R}^5$ *для* $j = 1, 2$.

(b) *Если линейные формы* ω *и* $\widetilde{\omega}$ *независимы и принадлежат характеристическому расслоению* H_j^*, *то* $\omega \wedge \widetilde{\omega} = c(\omega_2 + \lambda_j\omega_1)$, *где* c *— отличный от нуля скаляр, а* λ_j *определено посредством* (3.2).

(c) *Векторы* $g_1 \in H_1$ *и* $g_2 \in H_2$ *кососортогональны относительно* ω_1, *т.е.* $\omega_1(g_1, g_2) = 0$.

(d) *Имеют место представления:*

$$H_j(m) = \Big\{g \in T^C_m\mathbb{R}^5 \,\big|\, g \lrcorner \omega_0 = 0,\ g \lrcorner \omega = 0\,\forall\omega \in H^*_{3-j}(m)\Big\},$$

$$H_j^*(m) = \Big\{\omega \in T^{*C}_m\mathbb{R}^5 \,\Big|\, \frac{\partial}{\partial z} \lrcorner \omega = 0,\ g \lrcorner \omega = 0\,\forall g \in H_{3-j}(m)\Big\}.$$

(e) H_j^* — *двумерное комплексное подрасслоение в* $T^{*C}\mathbb{R}^5$ *для* $j = 1, 2$.

(f) *Отображение* $H_j \ni g \longmapsto g \lrcorner \omega_1 \in H_j^*$ *является изоморфизмом комплексных векторных расслоений* H_j *и* H_j^*.

(g) *Ковекторы* $\alpha_1 \in H_1^*$ *и* $\alpha_2 \in H_2^*$ *косоортогональны относительно* ω_1, *т.е.* $\omega_1 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$.

(h) *В каждой точке* $m \in \mathbb{R}^5$ *выполнено*:

$$H_1(m) \cap H_2(m) = 0, \quad H_1^*(m) \cap H_2^*(m) = 0; \quad \overline{H}_j(m) = H_{3-j}(m), \quad \overline{H}_j^* = H_{3-j}^*(m).$$

Доказательство леммы приведено в [12].

Кроме характеристических расслоений уравнения (1.1) в дальнейшем важную роль играют характеристические расслоения решений этого уравнения.

Лемма 3.4. *Пусть* (S, σ) — *произвольное многозначное решение уравнения* (1.1). *Тогда при* $j = 1, 2$ *включение*

$$\sigma_*\big(h_j(r)\big) \subset H_j\big(\sigma(r)\big), \quad r \in S, \tag{3.7}$$

однозначно определяет на многообразии S *одномерное комплексное* C^α-*подрасслоение*

$$h_j \subset T^C S \tag{3.8}$$

комплексного касательного расслоения $T^C S$.

Доказательство приведено в [13].

Определение 3.5. Заданные включением (3.7) подрасслоения (3.8) называются *характеристическими расслоениями решения* (S, σ).

Замечание 3.6. Из леммы 3.3 (h) и включения (3.7) вытекают соотношения

$$\overline{h}_1(r) \cap h_2(r) = 0, \quad \overline{h}_j(r) = h_{3-j}(r), \tag{3.9}$$

справедливые для всех $r \in S$ и $j = 1, 2$.

Имеет место обратный по отношению к лемме 3.4 результат.

Лемма 3.7. *Пусть на двумерном компактном односвязном многообразии* S *с границей класса* $C^{1+\alpha}$ *заданы отображение* (2.11) *класса* $C^{1+\alpha}$ *и одномерное комплексное подрасслоение* $h \subset T^C S$ *класса* C^α. *Фиксируем некоторое* $j = 1, 2$ *и предположим, что включение* $\sigma_*\big(h(r)\big) \subset H_j\big(\sigma(r)\big)$ *и неравенство* $\sigma_*\big(h(r)\big) \neq 0$ *выполняются для всех* $r \in S$. *Тогда пара* (S, σ) *является многозначным решением уравнения* (1.1).

Доказательство. По условию и по лемме 3.3 (h) имеет место включение $\sigma_*\big(\overline{h}(r)\big) \subset \overline{H}_j\big(\sigma(r)\big)$. Следовательно, пересечение $\sigma_*\big(h(r)\big) \cap \sigma_*\big(\overline{h}(r)\big) = 0$ и отображение (2.11) является погружением. По лемме 3.3 (d) имеем $\sigma_*\big(h(r)\big) \lrcorner \omega_0 = \sigma_*\big(\overline{h}(r)\big) \lrcorner \omega_0 = 0$, тем самым, $\sigma^*(\omega_0) = 0$. Кроме того,

$$\sigma_*\big(h(r)\big) \lrcorner (\omega_2 - \lambda_1\omega_1) = \sigma_*\big(\overline{h}(r)\big) \lrcorner (\omega_2 - \lambda_2\omega_1) = 0$$

по определению 3.1 и лемме 3.3 (h). Это означает, что $\sigma^*(\omega_2 - \lambda_1\omega_1) = \sigma^*(\omega_2 - \lambda_2\omega_1) = 0$; поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\sigma^*(\omega_2) = \sigma^*(\omega_1) = 0$. Таким образом, отображение (2.11) является многозначным решением уравнения (1.1). Лемма доказана.

4. Характеристические диффеоморфизмы. Обозначим через K замкнутый круг единичного радиуса на двумерной плоскости параметров uv: $K = \Big\{(u, v) \,\Big|\, u^2 + v^2 \leqslant 1\Big\}$. Рассмотрим многозначное решение (S, σ) уравнения (1.1) и его характеристические расслоения h_1 и h_2.

Определение 4.1. Диффеоморфизм

$$\chi : S \to K \tag{4.1}$$

класса $C^{1+\alpha}$ называется *характеристическим*, если для всех $r \in S$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\big(\chi(r)\big) \in \chi_*\big(h_1(r)\big). \tag{4.2}$$

Замечание 4.2. В силу замечания 3.6 ясно, что включение (4.2) равносильно включению

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\big(\chi(r)\big) \in \chi_*\big(h_2(r)\big).$$

Сформулируем теорему существования и единственности характеристических диффеоморфизмов. Для этого потребуются дробно-линейные преобразования вида

$$\varphi = e^{i\theta}\,\frac{z-a}{1-z\overline{a}}\,, \tag{4.3}$$

где θ — произвольное вещественное число, a — некоторое комплексное число, лежащее внутри единичного круга, т.е. $|a|<1$, и $z=u+iv$. Как известно, дробно-линейные преобразования вида (4.3) и только они осуществляют конформное отображение единичного круга K на себя [2].

Теорема 4.3 (a) *Для всякого многозначного решения* (S,σ) *уравнения* (1.1) *существует характеристический диффеоморфизм* (4.1).

(b) *Пусть* (4.1) — *характеристический диффеоморфизм многозначного решения* (S,σ). *Диффеоморфизм*

$$\widetilde{\chi} : S \to K \tag{4.4}$$

класса $C^{1+\alpha}$ *тогда и только тогда служит характеристическим диффеоморфизмом решения* (S,σ), *когда для него найдется такое дробно-линейное преобразование* (4.3), *что* $\widetilde{\chi} = \varphi\circ\chi$.

Доказательство дано в разделе 9.

Характеристические диффеоморфизмы позволяют на всяком многозначном решении (S,σ) уравнения (1.1) ввести специальную систему координат $(\chi;u,v)$, которую естественно назвать также *характеристической*. Таким образом, теорема 4.3 утверждает, что для всякого многозначного решения уравнения (1.1) с точностью до дробно-линейного преобразования вида (4.3) существует единственная характеристическая система координат.

Для многозначного решения (S,σ) и его характеристического диффеоморфизма χ определим отображение

$$\sigma^{\chi} = \sigma\circ\chi^{-1} : K \to \mathbb{R}^5. \tag{4.5}$$

Очевидно, что это отображение также является решением уравнения (1.1) и $(S,\sigma)\sim(K,\sigma^{\chi})$. Иначе говоря, пара (K,σ^{χ}) — это многозначное решение (S,σ), отнесенное к характеристической системе координат посредством χ.

Теорема 4.4. *Рассмотрим два многозначных решения* (S,σ) *и* $(\widetilde{S},\widetilde{\sigma})$ *уравнения* (1.1) *и отвечающие им характеристические диффеоморфизмы* χ *и* $\widetilde{\chi}$. *Тогда равносильны следующие условия*:

(a) *решения* (S,σ) *и* $(\widetilde{S},\widetilde{\sigma})$ *эквивалентны*;

(b) *отнесенные к характеристической системе координат решения* (K,σ^{χ}) *и* $(\widetilde{K},\widetilde{\sigma}^{\widetilde{\chi}})$ *отличаются на дробно-линейное преобразование вида* (4.3), *т.е.* $\widetilde{\sigma}^{\widetilde{\chi}} = \varphi\circ\sigma^{\chi}$.

Доказательство приведено в разделе 9.

Таким образом, в любом классе эквивалентных многозначных решений уравнения (1.1) с точностью до дробно-линейных преобразований вида (4.3) существует единственное решение

$$\sigma : K \to \mathbb{R}^5, \tag{4.6}$$

отнесенное к характеристической системе координат.

Теорема 4.5. *Отображение* (4.6) *класса* $C^{1+\alpha}(K)$ *тогда и только тогда является отнесенным к характеристическим координатам многозначным решением уравнения* (1.1), *когда при всех* $(u,v)\in K$

$$\sigma_*\Big(\frac{\partial}{\partial u}+i\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)(u,v)\in H_1\big(\sigma(u,v)\big) \tag{4.7}$$

и справедлива оценка

$$(x\circ\sigma)_u^2+(x\circ\sigma)_v^2+(y\circ\sigma)_u^2+(y\circ\sigma)_v^2+(p\circ\sigma)_u^2+(p\circ\sigma)_v^2+(q\circ\sigma)_u^2+(q\circ\sigma)_v^2\neq 0. \tag{4.8}$$

Доказательство см. в разделе 9.

5. Система характеристических уравнений. Согласно теореме 4.5 для решения (4.6) выполняется включение (4.7). По лемме 3.3 (d) это включение равносильно системе уравнений

$$\sigma_*\Big(\frac{\partial}{\partial u}+i\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)(u,v)\lrcorner\,\omega_0\big(\sigma(u,v)\big)=0, \tag{5.1}$$

$$\sigma_*\Big(\frac{\partial}{\partial u}+i\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)(u,v)\lrcorner\, f_{2k}\big(\sigma(u,v)\big)=0. \tag{5.2}$$

Здесь f_{2k}, $k = 1, 2, 3, 4$, — линейные дифференциальные формы, порождающие ковекторное характеристическое расслоение H_2^* и заданные выражениями (3.6). Уравнение (5.1) равносильно соотношениям полосы

$$\begin{aligned}&(z\circ\sigma)_u-(p\circ\sigma)(x\circ\sigma)_u-(q\circ\sigma)(y\circ\sigma)_u=0,\\&(z\circ\sigma)_v-(p\circ\sigma)(x\circ\sigma)_v-(q\circ\sigma)(y\circ\sigma)_v=0\end{aligned}\tag{5.3}$$

(ср. с (2.5)), а уравнения (5.2) равносильны уравнениям

$$\begin{aligned}&E\big((p\circ\sigma)_u+i(p\circ\sigma)_v\big)+D\big((x\circ\sigma)_u+i(x\circ\sigma)_v\big)-(C+i\delta)\big((y\circ\sigma)_u+i(y\circ\sigma)_v\big)=0,\\&E\big((q\circ\sigma)_u+i(q\circ\sigma)_v\big)-(C-i\delta)\big((x\circ\sigma)_u+i(x\circ\sigma)_v\big)+B\big((y\circ\sigma)_u+i(y\circ\sigma)_v\big)=0,\\&B\big((p\circ\sigma)_u+i(p\circ\sigma)_v\big)+(C+i\delta)\big((q\circ\sigma)_u+i(q\circ\sigma)_v\big)-A\big((x\circ\sigma)_u+i(x\circ\sigma)_v\big)=0,\\&(C-i\delta)\big((p\circ\sigma)_u+i(p\circ\sigma)_v\big)-D\big((q\circ\sigma)_u+i(q\circ\sigma)_v\big)+A\big((y\circ\sigma)_u+i(y\circ\sigma)_v\big)=0.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Из теоремы 4.5 очевидным образом вытекает

Следствие 5.1. *Отображение* (4.6) *класса* $C^{1+\alpha}$ *тогда и только тогда является отнесенным к характеристическим координатам многозначным решением уравнения* (1.1), *когда оно удовлетворяет в* K *системе уравнений* (5.3), (5.4) *и оценке* (4.8).

По лемме 3.3 (e) среди четырех уравнений (5.4) ровно два линейно независимых. Запишем соответствующие уравнения в вещественном виде для случаев, когда коэффициент E уравнения (1.1) отличен от нуля и когда коэффициент B отличен от нуля.

В случае $E \neq 0$ линейно независимы формы f_{21} и f_{22}, т.е. первое и второе уравнения (5.4). Вещественная запись первого из них имеет вид

$$\begin{aligned}&E(p\circ\sigma)_u+D(x\circ\sigma)_u-C(y\circ\sigma)_u+\delta(y\circ\sigma)_v=0,\\&E(p\circ\sigma)_v+D(x\circ\sigma)_v-C(y\circ\sigma)_v-\delta(y\circ\sigma)_u=0,\end{aligned}\tag{5.5}$$

а второго —

$$\begin{aligned}&E(q\circ\sigma)_u+B(y\circ\sigma)_u-C(x\circ\sigma)_u-\delta(x\circ\sigma)_v=0,\\&E(q\circ\sigma)_v+B(y\circ\sigma)_v-C(x\circ\sigma)_v+\delta(x\circ\sigma)_u=0.\end{aligned}\tag{5.6}$$

В случае $B \neq 0$ линейно независимы формы f_{23} и f_{22}, т.е. второе и третье из уравнений (5.4); аналогично предыдущему случаю выводим уравнения (5.6) и

$$\begin{aligned}&B(p\circ\sigma)_u+A(x\circ\sigma)_u+C(q\circ\sigma)_u-\delta(q\circ\sigma)_v=0,\\&B(p\circ\sigma)_v+A(x\circ\sigma)_v+C(q\circ\sigma)_v+\delta(q\circ\sigma)_u=0.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Полученные системы уравнений являются записью эллиптического уравнения в характеристической системе координат и называются *характеристическими.*

Пример 5.2. Рассмотрим уравнение

$$a^2(z_x)z_{xx}+b^2(z_y)z_{yy}=0,\tag{5.8}$$

где $a(p)$ и $b(q)$ — строго положительные функции. Характеристическая система уравнений (5.6), (5.7) для этого уравнения принимает вид

$$a(y\circ\sigma)_u-b(x\circ\sigma)_v=0,\quad a(y\circ\sigma)_v+b(x\circ\sigma)_u=0,\tag{5.9}$$

$$a(p\circ\sigma)_u-b(q\circ\sigma)_v=0,\quad a(p\circ\sigma)_v+b(q\circ\sigma)_u=0.\tag{5.10}$$

Преобразуем уравнения (5.10) к виду $(A\circ p\circ\sigma)_u-(B\circ q\circ\sigma)_v=0$, $(A\circ p\circ\sigma)_v+(B\circ q\circ\sigma)_u=0$, где $A(p)$ и $B(q)$ — первообразные функций $a(p)$ и $b(q)$ соответственно. Таким образом, функции $A\circ p\circ\sigma(u,v)$ и $B\circ q\circ\sigma(u,v)$ удовлетворяют системе уравнений Коши–Римана, т. е. общее решение последней системы определяется выражением

$$A\circ p\circ\sigma(u,v)+iB\circ q\circ\sigma(u,v)=F(u+iv),\tag{5.11}$$

где F — произвольная голоморфная внутри единичного круга K функция класса $C^{1+\alpha}(K)$. По построению функции $A(p)$ и $B(q)$ строго монотонны, поэтому выражение (5.11) однозначно определяет $p\circ\sigma(u,v)$ и $q\circ\sigma(u,v)$. Подставляя их в (5.9), получаем однородную систему линейных уравнений относительно $p\circ\sigma(u,v)$ и $q\circ\sigma(u,v)$. Для нахождения компоненты $z\circ\sigma(u,v)$ следует воспользоваться соотношениями (5.3).

Тем самым, решение нелинейного уравнения (5.8) сведено к решению системы однородных линейных уравнений первого порядка (5.10).

Заметим, что описанная в примере 5.2 процедура приводит к линейным уравнениям, которым удовлетворяют все без исключения многозначные решения уравнения (5.8). Линеаризацию уравнения (5.8) можно также осуществить посредством известного преобразования годографа. Однако получаемое в результате уравнение охватывает лишь те решения, которые регулярно проектируются на плоскость годографа.

Замечание 5.3. По-видимому, первым, кто применил метод характеристик к исследованию нелинейных эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными, был Ганс Леви. В частности, в работах [14, 15] при помощи этого метода он исследовал свойства классических решений эллиптических уравнений Монжа–Ампера с вещественно-аналитическими коэффициентами. Г. Леви продолжил уравнение и его решения в комплексную область и в результате получил фактически гиперболическую систему характеристических уравнений с голоморфными коэффициентами и комплексными неизвестными функциями.

6. Уравнения с постоянными коэффициентами. Вернемся к уравнению Лапласа

$$z_{xx} + z_{yy} = 0 \tag{6.1}$$

из примера 2.3. Левой части этого уравнения отвечает эффективная 2-форма

$$\widetilde{\omega}_2 = dp \wedge dy + dx \wedge dq, \tag{6.2}$$

а базисными векторными полями его характеристического расслоения H_1 служат

$$\widetilde{\xi}_1 = \frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial z} - i\left(\frac{\partial}{\partial y} + q\,\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \widetilde{\xi}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial p} + i\,\frac{\partial}{\partial q}\right). \tag{6.3}$$

Согласно примеру 5.2 характеристическая система (5.9), (5.10) для этого уравнения имеет вид

$$(y\circ\sigma)_u - (x\circ\sigma)_v = 0, \quad (y\circ\sigma)_v + (x\circ\sigma)_u = 0, \tag{6.4}$$

$$(p\circ\sigma)_u - (q\circ\sigma)_v = 0, \quad (p\circ\sigma)_v + (q\circ\sigma)_u = 0. \tag{6.5}$$

Каждая из пар уравнений (6.4) и (6.5) представляет собой систему Коши–Римана. Поэтому из следствия 5.1 вытекает

Лемма 6.1. *Отображение* (4.6) *класса* $C^{1+\alpha}(K)$ *тогда и только тогда является отнесенным к характеристическим координатам многозначным решением уравнения Лапласа, когда функции*

$$f = y\circ\sigma + ix\circ\sigma, \quad t = p\circ\sigma + iq\circ\sigma \tag{6.6}$$

голоморфны внутри круга K, *удовлетворяют в* K *оценке*

$$|f_\zeta| + |t_\zeta| \neq 0 \tag{6.7}$$

и для функции $z\circ\sigma$ *имеют место равенства* (5.3).

Из леммы 6.1 и элементарных фактов теории голоморфных и гармонических функций вытекает

Следствие 6.2. *Компоненты* $x\circ\sigma, y\circ\sigma, p\circ\sigma$ *и* $q\circ\sigma$ *отнесенного к характеристическим координатам многозначного решения* (4.6) *уравнения Лапласа гармоничны внутри* K, *а потому достигают своего минимума и максимума на единичной окружности* ∂K.

Теперь рассмотрим произвольное эллиптическое уравнение Монжа–Ампера (1.1) с постоянными коэффициентами A, B, C, D и E. Среди векторов (3.4) можно выбрать линейно независимые комплексные векторные поля ξ_1 и ξ_2, порождающие отвечающее этому уравнению характеристическое расслоение H_1. Пусть эти поля имеют вид

$$\xi_j = \xi_j^1\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial z}\right) + \xi_j^2\left(\frac{\partial}{\partial y} + p\,\frac{\partial}{\partial z}\right) + \xi_j^3\,\frac{\partial}{\partial p} + \xi_j^4\,\frac{\partial}{\partial q}, \tag{6.8}$$

где коэффициенты ξ_j^n, $j = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, 4$, — комплексные числа. По лемме 3.3 (c, h) имеем

$$\omega_1(\xi_l, \overline{\xi}_j) = 0 \tag{6.9}$$

при $l, j = 1, 2$, а по лемме 3.3 (f) векторные поля (6.8) можно выбрать так, чтобы

$$\omega_1(\xi_1, \xi_2) = 1. \tag{6.10}$$

Пусть

$$F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5 \tag{6.11}$$

является отображением, определенным равенствами

$$\begin{aligned}
x \circ F &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}p + a_{14}q,\\
y \circ F &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}p + a_{24}q,\\
p \circ F &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}p + a_{34}q,\\
q \circ F &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}p + a_{44}q,\\
z \circ F &= x\bigl(-p + a_{11}(a_{31}x/2 + a_{32}y + a_{33}p + a_{34}q) + a_{21}(a_{41}x/2 + a_{42}y + a_{43}p + a_{44}q)\bigr) +\\
&\quad + y\bigl(-q + a_{12}(a_{32}y/2 + a_{33}p + a_{34}q) + a_{22}(a_{41}y/2 + a_{42}p + a_{44}q)\bigr) +\\
&\quad + p\bigl(a_{12}(a_{33}p/2 + a_{34}q) + a_{23}(a_{43}p/2 + a_{44}q)\bigr) + q^2(a_{14}a_{34} + a_{24}a_{44})/2 + z,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

где для $k = 1, 2, 3, 4,$ $a_{k1} = \mathrm{Re}\,(\xi_1^k)$, $a_{k2} = -\,\mathrm{Im}\,(\xi_1^k)$, $a_{k3} = 2\,\mathrm{Re}\,(\xi_2^k)$, $a_{k4} = 2\,\mathrm{Im}\,(\xi_2^k)$.

Лемма 6.3. *Отображение* (6.11), (6.12) *является контактным диффеоморфизмом, переводящим уравнение* (1.1) *в уравнение* (6.1). *Иными словами, найдутся такие гладкие функции c_0, c_1 и форма c_2, что*

$$F^*\omega_0 = c_0\omega_0, \quad F^*\omega_2 = c_1\widetilde{\omega}_2 + c_2 \wedge \omega_0. \tag{6.13}$$

Доказательство. Непосредственная проверка с использованием условий (6.9), (6.10) показывает, что для отображения (6.11), (6.12) при $j = 1, 2$ выполняются соотношения $F_*(\,\widetilde{\xi}_j) = \xi_j$, $F_*\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}$, где $\widetilde{\xi}_j$ — векторные поля (6.3), а ξ_j — векторные поля (6.8). По лемме 3.3 (h) пять векторных полей $\widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{\xi}_2$, $\overline{\widetilde{\xi}}_1$, $\overline{\widetilde{\xi}}_2$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}$ линейно независимы. Аналогичным образом линейно независимы пять векторных полей ξ_1, ξ_1, $\overline{\xi}_1$, $\overline{\xi}_2$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}$. Следовательно, отображение (6.11), (6.12) является контактным диффеоморфизмом, который переводит характеристические расслоения уравнения (6.1) в характеристические расслоения уравнения (1.1). Тем самым, уравнения (1.1) и (4.1) контактно эквивалентны [16], т.е. имеет место выражение (6.13). Лемма доказана.

Следствие 6.4. *Отображение* (2.11) *тогда и только тогда является многозначным решением уравнения* (6.1), *когда отображение $F \circ \sigma : S \to \mathbb{R}^5$ является многозначным решением уравнения* (1.1).

Доказательство. Согласно (6.13) имеем

$$\begin{aligned}
(F \circ \sigma)^*(\omega_0) &= \sigma^* \circ F^*(\omega_0) = \sigma^*(c_0\omega_0) = 0,\\
(F \circ \sigma)^*(\omega_2) &= \sigma^* \circ F^*(\omega_2) = \sigma^*(c_1\widetilde{\omega}_2 + c_2 \wedge \omega_0) = 0.
\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Это следствие позволяет использовать следующий алгоритм нахождения всех многозначных решений произвольного эллиптического уравнения (1.1) с постоянными коэффициентами. По коэффициентам A, B, C, D, E и формулам (3.4) строятся характеристические векторные поля (6.8), удовлетворяющие равенствам (6.10), и контактный диффеоморфизм (6.11), (6.12). Далее, в соответствии с леммой 6.1 определяются все многозначные решения (K, σ) уравнения Лапласа (6.1). По следствию 6.2 пары $(F \circ \sigma, K)$ образуют множество всех многозначных решений уравнения (1.1).

Пример 6.5. Применение описанного алгоритма к нелинейному уравнению

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 - 1 = 0 \tag{6.14}$$

дает следующее описание множества всех его многозначных решений. Отображение (4.6) класса $C^{1+\alpha}(K)$ тогда и только тогда является отнесенным к характеристическим координатам многозначным решением уравнения Лапласа, когда функции

$$f = y \circ \sigma + ip \circ \sigma, \quad t = q \circ \sigma + ix \circ \sigma \tag{6.15}$$

голоморфны внутри круга K и удовлетворяют в K оценке (6.7), а для функции $z \circ \sigma$ имеют место равенства (5.3).

В силу следствий 6.2 и 6.4 имеет место

Следствие 6.6. *Компоненты $x \circ \sigma$, $y \circ \sigma$, $p \circ \sigma$ и $q \circ \sigma$ отнесенного к характеристическим координатам многозначного решения* (4.6) *эллиптического уравнения Монжа–Ампера* (1.1) *с постоянными коэффициентами A, B, C, D и E гармоничны внутри K, а потому достигают своего минимума и максимума на единичной окружности ∂K.*

7. Приложение к оптике. Рассмотрим приложение полученных выше результатов к решению обратной задачи оптики — формированию когерентного излучения из области в область.

Физическая постановка задачи. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\xi\eta\zeta$ расположен источник монохроматического светового излучения. Предположим, что этот источник — лежащая в плоскости $\zeta = 0$ фиксированная компактная выпуклая область G, а излучение распространяется в сторону $\zeta > 0$. Требуется выяснить, при каких характеристиках указанный излучатель сформирует в плоскости $\zeta = R$, где R — фиксированное положительное число, изображение заданной формы и интенсивности.

Обозначим через $w(\xi, \eta, \zeta)$ излучаемое комплексное скалярное поле. В приближении Френеля значение этого поля в точке (p, q) плоскости $\zeta = R$ вычисляется по формуле

$$w(p,q,R) = \frac{ke^{ikR}}{2\pi iR} \iint\limits_G w(x,y,0) e^{ik((x-p)^2+(y-q)^2)/(2R)}\, dx\, dy, \tag{7.1}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, отвечающее длине волны λ рассматриваемого монохроматического излучения [17]. В случае светового диапазона выполнено

$$k \gg 1. \tag{7.2}$$

Выразим поле w через амплитуду и фазу:

$$w(\xi,\eta,\zeta) = W(\xi,\eta,\zeta) e^{ik\varphi(\xi,\eta,\zeta)}, \tag{7.3}$$

где W и φ — вещественные гладкие функции. Предположим, что фаза φ такова, что функция

$$z(x,y) = R\varphi(x,y,0) + \frac{x^2+y^2}{2} \tag{7.4}$$

имеет положительно определенную матрицу Гессе. Тогда эта функция сильно выпукла и для любой точки (p, q) функция $\varphi(x,y,0) + \dfrac{(x-p)^2+(y-q)^2}{2R}$ имеет единственную стационарную точку $(x_0, y_0) \in G$ (см. [1]). По определению (7.4) в этой точке выполнены равенства

$$p = z_x(x_0,y_0), \quad q = z_y(x_0,y_0). \tag{7.5}$$

Наложенные на фазовую функцию ограничения и оценка (7.2) позволяют применить к правой части выражения (7.1) метод стационарной фазы [18]:

$$w(p,q,R) = \frac{W(x,y,0)\exp\Bigl(ik\Bigl(R + \bigl(z - xz_x - yz_y + \bigl(z_x^2+z_y^2\bigr)/2\bigr)/R\Bigr)\Bigr)}{\sqrt{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}}(x_0,y_0) + O(k^{-1/2}). \tag{7.6}$$

Здесь значения $x_0 = x_0(p,q)$ и $y_0 = y_0(p,q)$ однозначно определены уравнениями (7.5).

Как известно, с физической точки зрения отбрасывание остаточного члена в асимптотическом разложении (7.6) означает переход от волновой оптики к геометрической [17]. Таким образом, в приближении геометрической оптики имеем

$$I_R\bigl(z_x(x,y), z_y(x,y)\bigr)(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2)(x,y) = I_0(x,y), \tag{7.7}$$

$$\varphi\bigl(z_x(x,y), z_y(x,y), R\bigr) = R + \bigl(z - xz_x - yz_y + (z_x^2+z_y^2)/2\bigr)(x,y)/R,$$

где функции

$$I_0(x,y) = W^2(x,y,0), \quad I_R(p,q) = W^2(p,q,R) \tag{7.8}$$

соответствуют интенсивности светового излучения при $\zeta = 0$ и $\zeta = R$.

Математическая постановка задачи. Пусть выпуклая компактная область G плоскости $\zeta = 0$ ограничена кривой

$$g(x, y) = 0, \tag{7.9}$$

и пусть в плоскости $\zeta = R$ задана выпуклая компактная область L, ограниченная кривой

$$l(p, q) = 0, \tag{7.10}$$

где функции g и l принадлежат классу $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и $dg(x, y) \neq 0$, $dl(p, q) \neq 0$ в некоторой окрестности границ ∂G и ∂L соответственно. Предположим, что заданы положительные и непрерывные по Гельдеру функции (7.8), т.е. $I_0 \in C^\alpha(G)$ и $I_R \in C^\alpha(L)$, $0 < \alpha < 1$, для которых

$$\int\limits_G I_0(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_L I_R(p, q)\, dp\, dq. \tag{7.11}$$

Требуется отыскать строго выпуклое решение эллиптического уравнения Монжа–Ампера (7.7) класса $C^{2+\alpha}(G)$, для которого отображение (7.5) является диффеоморфизмом области G на область L.

Как известно, градиент дважды дифференцируемой сильно выпуклой функции является диффеоморфизмом [1]. Тем самым, поставленная задача сводится к нахождению в G выпуклого решения уравнения (7.7) класса $C^{2+\alpha}(G)$, которое на границе (7.9) удовлетворяет нелинейному краевому условию (7.10). Имеет место

Лемма 7.1. *Пусть выполнены все сформулированные в математической постановке задачи условия. Тогда с точностью до постоянного слагаемого уравнение* (7.7) *имеет в области G ровно два решения $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, удовлетворяющих краевому условию* (7.10), *первое из которых выпукло* (*направлено выпуклостью вниз*), *а второе — вогнуто* (*направлено выпуклостью вверх*).

Доказательство см. в [19].

Иными словами, по лемме 7.1 поставленная задача с точностью до постоянного слагаемого имеет единственное классическое выпуклое решение. Для многозначных решений аналогом леммы 7.1 служит

Теорема 7.2. *Пусть выполнены все сформулированные в математической постановке задачи условия. Тогда с точностью до дробно-линейного преобразования вида* (4.3) *для уравнения* (7.7) *существует единственное отнесенное к характеристическим координатам многозначное решение* (4.6), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$g(x \circ \sigma, y \circ \sigma) = 0, \quad l(p \circ \sigma, q \circ \sigma) = 0, \tag{7.12}$$

оценке

$$\big((x \circ \sigma)_u (y \circ \sigma)_v - (x \circ \sigma)_v (y \circ \sigma)_u\big)(u, v)\,\big((p \circ \sigma)_u (y \circ \sigma)_v - (p \circ \sigma)_v (y \circ \sigma)_u\big)(u, v) > 0 \tag{7.13}$$

и равенству

$$z \circ \sigma(0, 0) = 0. \tag{7.14}$$

Более того, это решение эквивалентно классическому выпуклому решению краевой задачи (7.9), (7.10) *для уравнения* (7.7).

Доказательство. По лемме 7.1 с точностью до постоянного слагаемого существует единственное классическое выпуклое решение

$$z : G \to R^1 \tag{7.15}$$

краевой задачи (7.9), (7.10) для уравнения (7.7). По теореме 4.3 на всяком таком решении можно ввести характеристическую систему координат. В результате получаются отнесенные к характеристической системе координат многозначные решения уравнения (7.7), среди которых одно удовлетворяет равенству (7.14). Выберем его в качестве искомого решения (4.6). По лемме 2.5 для него выполнена оценка (2.17), которая вместе с выпуклостью решения (7.15) обеспечивает справедливость оценки (7.13) (см. формулы (2.3)). Таким образом, для уравнения (7.7) существует отнесенное к характеристическим координатам многозначное решение (4.6) краевой задачи (7.12), удовлетворяющее оценке (7.13) и равенству (7.14). Предположим, что такое решение не единственно, т.е. существует еще одно решение

$$\widetilde{\sigma} : K \to \mathbb{R}^5 \tag{7.16}$$

уравнения (7.7), обладающее всеми перечисленными свойствами. В силу равенств (7.12), оценки (7.13) и леммы 2.5 решение (7.16) эквивалентно классическому выпуклому решению (7.15) краевой задачи (7.9), (7.10) для уравнения (7.7). Согласно лемме 7.1 такое решение (7.15) определено однозначно с точностью до константы. Произвол в выборе этой константы устраняется равенством (7.14). Тем самым, решения (4.6) и (7.16) эквивалентны одному и тому же решению, а потому эквивалентны между собой: $(K,\sigma) \sim (K,\widetilde{\sigma})$. Отсюда по теореме 4.4 заключаем, что эти решения отличаются на дробно-линейное преобразование вида (4.3). Теорема доказана.

Для некоторых приложений особый интерес представляет ситуация, когда функции интенсивности (7.8) постоянны. Для определенности предположим, что

$$I_0(x,y) = 1, \quad I_R(p,q) = 1. \tag{7.17}$$

В этом случае уравнение (7.7) принимает вид (6.14) и имеет место

Следствие 7.3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 7.2 *и, сверх того, равенства* (7.17). *Тогда многозначное решение* (4.6) *из теоремы* 7.2 *обладает следующими свойствами:*

(a) *компоненты* $x\circ\sigma, y\circ\sigma, p\circ\sigma$ *и* $q\circ\sigma$ *этого решения гармоничны внутри* K*, а потому достигают своего минимума и максимума на единичной окружности* ∂K*;*

(b) *определенные равенствами* (6.15) *функции* f *и* t *голоморфны внутри* K*;*

(c) *для функций* f*,* t *и их первых производных* $f^{'}$*,* $t^{'}$ *ряды Тейлора с центром в точке* $(0,0)$ *равномерно сходятся во всем круге* K*.*

Доказательство. Свойство (a) является частным случаем следствия 6.6. Свойство (b) установлено в примере 6.5. Ограничения

$$f\big|_{\partial K}, \quad t\big|_{\partial K}, \quad f^{'}\big|_{\partial K}, \quad t^{'}\big|_{\partial K} \tag{7.18}$$

функций (6.15) и их первых производных на окружность ∂K можно рассматривать как периодические комплекснозначные функции класса $C^\alpha(R^1)$. Ограничения на ∂K рядов Тейлора с центром в точке $(0,0)$ для функций $f, t, f^{'}$ и $t^{'}$ представляют собой разложения ограничений (7.18) в ряды Фурье. Эти ряды равномерно сходятся в силу принадлежности функций (7.18) к классу $C^\alpha(\mathbb{R}^1)$, что доказывает свойство (c). Следствие доказано.

Подведем итог. По лемме 7.1 поставленная краевая задача (7.9), (7.10) для уравнения (6.14) с точностью до постоянного слагаемого имеет единственное классическое выпуклое решение. Существование эквивалентного многозначного решения (4.6) краевой задачи (7.12) и его единственность с точностью до дробно-линейного преобразования вида (4.3) гарантирована теоремой 7.2. По следствию 7.3 комбинации (6.15) компонент $x\circ\sigma$, $y\circ\sigma$, $p\circ\sigma$ и $q\circ\sigma$ являются внутри K голоморфными функциями, которые вместе со своими первыми производными разлагаются в равномерно сходящиеся в замкнутом круге K ряды Тейлора

$$y\circ\sigma + ip\circ\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(u+iv)^n, \quad q\circ\sigma + ix\circ\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(u+iv)^n. \tag{7.19}$$

Следовательно, искомое решение краевой задачи (7.12) для уравнения (6.14) можно таким образом приблизить комплексными многочленами

$$f_N = \sum_{n=0}^{N} \widetilde{a}_n(u+iv)^n, \quad t_N = \sum_{n=0}^{N} \widetilde{b}_n(u+iv)^n, \tag{7.20}$$

чтобы в замкнутом круге K имела место равномерная сходимость:

$$\lim_{N\to\infty} f_N = y\circ\sigma + ip\circ\sigma, \quad \lim_{N\to\infty} t_N = q\circ\sigma + ix\circ\sigma.$$

По следствию 7.3 разности $y\circ\sigma + ip\circ\sigma - f_N$ и $q\circ\sigma + ix\circ\sigma - t_N$ голоморфны внутри круга K, а потому $x\circ\sigma - \mathrm{Im}\,(t_N)$, $y\circ\sigma - \mathrm{Re}\,(f_N)$, $p\circ\sigma - \mathrm{Im}\,(f_N)$, $q\circ\sigma - \mathrm{Re}\,(t_N)$ достигают наибольшего и наименьшего значения на единичной окружности ∂K. Иначе говоря, модули погрешностей приближений принимают максимальные значения на границе.

Исходя из этого можно предложить следующий алгоритм равномерного приближения в K искомого решения (7.19) краевой задачи (7.12) для уравнения (6.14) комплексными многочленами (7.20) фиксированной степени N. Выберем некоторое целое число $M > N$ и разобьем окружность ∂K точками $r_k = e^{i2\pi k/M}$, $k = 1,\dots,M$, на M дуг равной длины. Невязка

$$\Xi\,(f_N, t_N) = \sum_{k=0}^{M} \Big(g^2\big(Im(t_{Nk}), Re(f_{Nk})\big) + l^2\big(Im(f_{Nk}), Re(t_{Nk})\big) \Big),$$

где $f_{Nk} = f_N(r_k)$ и $t_{Nk} = t_N(r_k)$, представляет собой функцию класса $C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{4N+4})$ от вещественных и мнимых частей комплексных коэффициентов $\widetilde{a}_0, \dots, \widetilde{a}_N$ и $\widetilde{b}_0, \dots, \widetilde{b}_N$. Выбор многочленов $\widetilde{f}_N$ и $\widetilde{t}_N$, приближающих искомое решение (7.19), подчиним условию

$$\Xi\,(\widetilde{f}_N, \widetilde{t}_N) = \inf\, \Xi(f_N, t_N). \tag{7.21}$$

Здесь inf берется по всем комплексным многочленам f_N и t_N степени N, у которых во всех точках (u, v) замкнутого круга K якобиан

$$\frac{\mathfrak{D}\big(\mathrm{Im}\,(t_N), Re(f_N)\big)}{\mathfrak{D}(u, v)}\,(u, v) \neq 0. \tag{7.22}$$

Замечание 7.4. Пусть (7.20) — произвольные комплексные многочлены, удовлетворяющие в круге K оценке (7.22). В таком случае, согласно примеру 6.5, соотношения $y \circ \sigma + ip \circ \sigma = f_N$, $q \circ \sigma + ix \circ \sigma = t_N$ вместе с (5.3) и (7.14) однозначно определяют многозначное решение (4.6) уравнения (6.14). По лемме 2.5 это решение эквивалентно классическому решению уравнения (6.14). Другими словами, предложенный алгоритм позволяет равномерно приблизить искомое решение (7.19) точными классическими решениями уравнения (6.14), отнесенными к характеристической системе координат.

Замечание 7.5. Описанный алгоритм равномерного приближения функций (7.19) многочленами (7.20) был использован авторами для составления программы аппроксимации минимума (7.21) с помощью градиентного метода [1]. Выполненные по этой программе расчеты дали положительные результаты для широкого класса заданных равенствами (7.9), (7.10) выпуклых областей [20]. Подстановка вычисленных таким образом аппроксимаций в правую часть выражения (7.4) позволяет определить фазовую функцию искомого оптического элемента. В свою очередь, подстановка найденной фазовой функции φ и амплитуды $W \equiv 1$ в равенства (7.3) и (7.1) позволяет построить для соответствующего оптического элемента дифракционную картину в приближении Френеля.

8. Доказательство лемм 2.4 и 2.5.

Доказательство леммы 2.4. По условию леммы граница ∂S — это замкнутое одномерное многообразие. Следовательно, ∂S диффеоморфно несвязному объединению конечного числа окружностей [21]. Из односвязности S вытекает, что каждая из этих окружностей стягиваема по S в точку, а потому служит границей для некоторой диффеоморфной кругу подобласти многообразия S [21]. Указанные подобласти не пересекаются, поскольку не пересекаются ограничивающие их компоненты границы ∂S. Другими словами, S разлагается в объединение непустых непересекающихся компактных подмножеств. В силу связности S подобное разложение состоит из единственного подмножества, которое совпадает с S. Тем самым, граница ∂S диффеоморфна окружности и ограничивает область, диффеоморфную кругу. Лемма доказана.

Прежде, чем приступить к доказательству леммы 2.5, установим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 8.1. *Пусть S и G — компактные подмножества в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с непустой внутренностью, причем внутренность* int G *множества G, его граница ∂G и его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus G$ связны. Допустим, что $\pi : S \to \mathbb{R}^n$ — такое непрерывное отображение, для которого $\pi(\partial S) \subseteq \partial G$, а ограничения π на границу ∂S*

$$\pi\big|_{\partial S}\colon \partial S \to \partial G \tag{8.1}$$

и на внутренность G

$$\pi\big|_{\mathrm{int}\ S}\colon \mathrm{int}\ S \to \mathbb{R}^n \tag{8.2}$$

являются открытыми отображениями. Тогда

$$\pi(\partial S) = \partial G, \tag{8.3}$$

$$\pi(\mathrm{int}\ S) = \mathrm{int}\ G. \tag{8.4}$$

Доказательство. Граница ∂S компактна. Следовательно, множество $\pi(\partial S)$ также компактно, а значит и замкнуто в ∂G. По условию отображение (8.1) открыто, поэтому множество $\pi(\partial S)$ как замкнуто, так и открыто в топологическом пространстве ∂G. По условию пространство ∂G связно, а $\partial S \neq \emptyset$. Следовательно, выполнено равенство (8.3).

По условию отображение (8.2) открыто. Поэтому всякая внутренняя точка множества S отображается во внутреннюю точку множества $\pi(S)$. Тем самым, никакая внутренняя точка множества S не может отобразиться в границу множества $\pi(S)$, т.е. $\partial\pi(S) \cap \pi(\mathrm{int}\ S) = \emptyset$. По условию множество S компактно.

Следовательно, множество $\pi(\partial S)$ также компактно, а значит и замкнуто, т.е. $\partial\pi(S) \subseteq \pi(S)$. Из очевидного разложения $\pi(S) = \pi(\partial S) \cup \pi(\text{int } S)$ и двух предыдущих соотношений вытекает включение

$$\partial\pi(S) \subseteq \pi(\partial S). \tag{8.5}$$

Рассмотрим топологическое пространство $\mathbb{R}^n \diagdown G$, а в нем открытое множество $B = \pi(\text{int } S) \cap (\mathbb{R}^n \diagdown G)$. По определению его граница ∂B лежит внутри $\mathbb{R}^n \diagdown G$. В то же время, ∂B — это часть границы замкнутого множества $\pi(S)$ и потому содержится в $\partial\pi(S)$. В силу установленного включения (8.5) и равенства (8.3)

$$\partial\pi(S) \cap (\mathbb{R}^n \diagdown G) \subseteq \pi(\partial S) \cap (\mathbb{R}^n \diagdown G) = \partial G \cap (\mathbb{R}^n \diagdown G) = \emptyset,$$

и, следовательно, $\partial B = \emptyset$. Тем самым, множество B одновременно открыто и замкнуто в топологическом пространстве $\mathbb{R}^n \diagdown G$. По условию леммы $\mathbb{R}^n \diagdown G$ связно, поэтому либо $B = \mathbb{R}^n \diagdown G$, либо $B = \emptyset$. Первое невозможно, ибо, будучи по построению подмножеством компакта $\pi(S)$, множество B ограничено. Таким образом, $B = \emptyset$, что равносильно равенству

$$\pi(\text{int } S) \cap (\mathbb{R}^n \diagdown G) = \emptyset. \tag{8.6}$$

Отсюда и из очевидного разложения $\mathbb{R}^n = G \cup (\mathbb{R}^n \diagdown G)$ выводим включение

$$\pi(\text{int } S) \subseteq G. \tag{8.7}$$

По условию отображение (8.2) открыто. Поэтому если $\pi(\text{int } S) \cap \partial G \neq \emptyset$, то и $\pi(\text{int } S) \cap (\mathbb{R}^n \diagdown G) \neq \emptyset$, что противоречит равенству (8.6). Тем самым, $\pi(\text{int } S) \cap \partial G = \emptyset$ и согласно (8.7) получаем включение $\pi(\text{int } S) \subseteq \text{int } G$. Рассмотрим топологическое пространство $\text{int } G$, а в нем открытое множество $\pi(\text{int } S)$. По определению его граница $\partial\pi(\text{int } S)$ лежит внутри $\text{int } G$. В то же время, $\partial\pi(\text{int } S)$ — это часть границы замкнутого множества $\pi(S)$ и потому содержится в $\partial\pi(S)$. В силу установленного включения (8.5) и равенства (8.3) имеем

$$\partial\pi(\text{int } S) \cap \text{int } G \subseteq \pi(\partial S) \cap \text{int } G = \partial G \cap \text{int } G = \emptyset.$$

Следовательно, $\partial\pi(\text{int } S) = \emptyset$. Тем самым, множество $\pi(\text{int } S)$ одновременно открыто и замкнуто в топологическом пространстве $\text{int } G$. По условию леммы $\text{int } G$ связно, а $\text{int } S$ непусто. Следовательно, выполнено равенство (8.4). Лемма доказана.

Следствие 8.2. *Пусть выполнены все условия леммы* 2.5. *Тогда образ отображения* (2.15) *совпадает с* G*, причем* $\pi(\partial S) = \partial G$, $\pi(\text{int } S) = \text{int } G$.

Доказательство. Внутренность круга S непуста. По условию леммы 2.5 область G компактна и ее внутренность непуста. Кроме того, имеет место включение (2.16). В силу этого включения определено отображение (8.1), которое согласно неравенству (2.17) невырожденно, а потому открыто и является локальным диффеоморфизмом. Аналогичным образом, в силу неравенства (2.17) отображение (8.2) невырожденно, а потому также открыто и является локальным диффеоморфизмом. Тем самым, выполнены все условия леммы 8.1, из которой и вытекает справедливость доказываемого следствия.

Доказательство леммы 2.5. Согласно неравенству (2.17) и следствию 8.2 отображение (2.15) является накрытием области G [22]. Поскольку эта область односвязна, то отображение (2.15) — диффеоморфизм класса $C^{1+\alpha}(S)$ [23]. Рассмотрим функцию $z(x, y) = z \circ \sigma \circ \pi^{-1}(x, y)$, производные которой вычисляются по формулам $z_x(x, y) = p \circ \sigma \circ \pi^{-1}(x, y)$, $z_y(x, y) = q \circ \sigma \circ \pi^{-1}(x, y)$. Эта функция служит классическим решением класса $C^{2+\alpha}$ уравнения (1.1), которое эквивалентно решению (S, σ). Лемма доказана.

9. Доказательство теорем 4.3, 4.4 и 4.5. По лемме 2.4, не ограничивая общности, можно считать, что S — лежащая на плоскости параметров $\xi\eta$ стягиваемая компактная область с гладкой границей. Пусть

$$\zeta = \zeta^1 \, \frac{\partial}{\partial\xi} + \zeta^2 \, \frac{\partial}{\partial\eta} \tag{9.1}$$

— произвольный комплексный касательный вектор в точке r области S, где

$$\zeta^1 = \zeta^1_1 + i\zeta^1_2, \quad \zeta^2 = \zeta^2_1 + i\zeta^2_2$$

— его координаты. Положим

$$\text{sgn } \zeta = \text{sgn} \begin{vmatrix} \zeta^1_1 & \zeta^2_1 \\ \zeta^1_2 & \zeta^2_2 \end{vmatrix}. \tag{9.2}$$

Эта величина может принимать значения -1, 0 и 1. Будем называть ее *знаком комплексного вектора* ζ.

Теперь рассмотрим одномерное комплексное подпространство

$$h \subset T_r^C S; \tag{9.3}$$

пусть вектор (9.1) служит базисом этого подпространства. Положим

$$\operatorname{sgn} h = \operatorname{sgn} \zeta \tag{9.4}$$

и будем называть эту величину знаком комплексного подпространства h.

Лемма 9.1. *Определение знака подпространства h корректно, т.е. значение* (9.4) *не зависит от выбора базисного вектора ζ подпространства h.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\zeta}$ — другой базисный вектор подпространства (9.3). В силу одномерности h найдется такое отличное от нуля комплексное число $c = c_1 + ic_2$, что $\widetilde{\zeta} = c\,\zeta$. Отсюда по определению (9.2) можно записать

$$\operatorname{sgn} \widetilde{\zeta} = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} c_1\zeta_1^1 - c_2\zeta_2^1 & c_1\zeta_1^2 - c_2\zeta_2^2 \\ c_2\zeta_1^1 + c_1\zeta_2^1 & c_1\zeta_1^2 + c_2\zeta_2^2 \end{vmatrix}.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} c_1\zeta_1^1 - c_2\zeta_2^1 & c_1\zeta_1^2 - c_2\zeta_2^2 \\ c_2\zeta_1^1 + c_1\zeta_2^1 & c_1\zeta_1^2 + c_2\zeta_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \zeta_1^1 & \zeta_1^2 \\ \zeta_2^1 & \zeta_2^2 \end{vmatrix},$$

то $\operatorname{sgn} \widetilde{\zeta} = \operatorname{sgn} \zeta$. Лемма доказана.

Замечание 9.2. Знак определен для любого одномерного подпространства комплексного касательного пространства к двумерному ориентированному многообразию. Имеет место инвариантность этого знака относительно сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов двумерных многообразий.

Рассмотрим характеристические расслоения h_1 и h_2 многозначного решения (S, σ) уравнения (1.1). Это одномерные комплексные подрасслоения касательного пространства $T^C S$, которые тривиальны в силу стягиваемости области S [21]. Иначе говоря, для $j = 1, 2$ в области S найдется такое комплексное векторное поле

$$\zeta = \zeta^1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{9.5}$$

класса C^α, что $\zeta(r) \neq 0$ при всех $r \in S$ и $\zeta(r) \in h_1(r)$.

Замечание 9.3. Из соотношений (3.9) вытекает, что $\overline{\zeta}(r) \in h_2(r)$ и векторное поле имеет вид (9.5), а потому и характеристические расслоения h_1 и h_2 обладают отличными от нуля знаками. Точнее, имеет место одна из двух возможностей: либо $\operatorname{sgn} h_1(r) = 1$, $\operatorname{sgn} h_2(r) = -1$ во всех точках $r \in S$, либо $\operatorname{sgn} h_1(r) = -1$, $\operatorname{sgn} h_2(r) = 1$.

Вернемся к определению 4.1 характеристического диффеоморфизма. Если ζ — базисное сечение расслоения h_1, то включение (4.2) равносильно равенству

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\bigl(\chi(r)\bigr) \wedge \chi_*\bigl(\zeta(r)\bigr) = 0. \tag{9.6}$$

Поскольку $\chi_*\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi}\right) = (u \circ \chi)_\xi \dfrac{\partial}{\partial u} + (v \circ \chi)_\xi \dfrac{\partial}{\partial v}$ и $\chi_*\left(\dfrac{\partial}{\partial \eta}\right) = (u \circ \chi)_\eta \dfrac{\partial}{\partial u} + (v \circ \chi)_\eta \dfrac{\partial}{\partial v}$,то согласно координатному представлению (9.5) имеем

$$\chi_*(\zeta) = \zeta^1\left((u \circ \chi)_\xi \frac{\partial}{\partial u} + (v \circ \chi)_\xi \frac{\partial}{\partial v}\right) + \zeta^2\left((u \circ \chi)_\eta \frac{\partial}{\partial u} + (v \circ \chi)_\eta \frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Тем самым, равенство (9.6) приводится к следующему виду:

$$\Bigl(\bigl((u \circ \chi)_\xi + i(v \circ \chi)_\xi\bigr)\zeta^1 + \bigl((u \circ \chi)_\eta + i(v \circ \chi)_\eta\bigr)\zeta^2\Bigr)\,\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v} = 0.$$

Рассматривая отображение χ как комплексную функцию комплексного переменного и используя обычные обозначения

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i\,\frac{\partial}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i\,\frac{\partial}{\partial \eta}\right),$$

окончательно получаем уравнение

$$(\zeta^1 - i\zeta^2)\chi_{\overline{z}} + (\zeta^1 + i\zeta^2)\chi_z = 0. \tag{9.7}$$

Тем самым, установлена

Лемма 9.4. *Включение* (4.2) *равносильно уравнению* (9.7).

О разрешимости уравнений Бельтрами

$$\chi_{\overline{z}} + q\chi_z = 0 \tag{9.8}$$

известна следующая лемма.

Лемма 9.5. *Предположим, что в области S определена функция q класса $C^\alpha(S)$, модуль которой меньше единицы. Тогда*

(a) *для уравнения* (9.8) *существует решение, являющееся диффеоморфизмом класса $C^{1+\alpha}(S)$:*

$$\widetilde{\chi} : S \to \widetilde{\chi}(S); \tag{9.9}$$

(b) *комплексная функция χ класса $C^{1+\alpha}(S)$ тогда и только тогда является решением уравнения* (9.8) *в области S, когда найдется такая голоморфная внутри области $\widetilde{\chi}(S)$ функция ϑ, для которой выполнено представление*

$$\chi = \vartheta \circ \widetilde{\chi}. \tag{9.10}$$

Доказательство приведено в [24]. Имеет место

Лемма 9.6.

(a) *Для уравнения* (9.7) *существует решение* (9.9), *являющееся диффеоморфизмом класса $C^{1+\alpha}(S)$.*

(b) *Функция комплексного переменного χ класса $C^{1+\alpha}(S)$ тогда и только тогда является решением уравнения* (9.7) *в области S, когда найдется такая голоморфная внутри области $\widetilde{\chi}(S)$ функция ϑ, для которой выполнено представление* (9.10).

Доказательство. Обозначим через ζ^j_1 и ζ^j_2 вещественную и мнимую части соответствующей комплексной координаты векторного поля (9.5) и положим

$$F_1 = \zeta^1 - i\zeta^2 = \zeta^1_1 + \zeta^2_2 + i(\zeta^1_2 - i\zeta^2_1), \quad F_2 = \zeta^1 + i\zeta^2 = \zeta^1_1 - \zeta^2_2 + i(\zeta^1_2 + i\zeta^2_1).$$

В результате уравнение (9.7) запишется в виде

$$F_1\chi_{\overline{z}} + F_2\chi_z = 0. \tag{9.11}$$

Непосредственные вычисления показывают, что $|F_1|^2 - |F_2|^2 = 4\begin{vmatrix} \zeta^1_1 & \zeta^2_1 \\ \zeta^1_2 & \zeta^2_2 \end{vmatrix}$, откуда по определению (9.2) и (9.4) $\operatorname{sgn}\left(|F_1|^2 - |F_2|^2\right) = \operatorname{sgn}\zeta = \operatorname{sgn} h_1$. Следовательно, неравенство

$$|F_1| > |F_2| \tag{9.12}$$

равносильно условию $\operatorname{sgn} h_1 = 1$, а обратное неравенство

$$|F_1| < |F_2| \tag{9.13}$$

равносильно условию $\operatorname{sgn} h_1 = -1$.

Рассмотрим сначала случай $\operatorname{sgn} h_1 = 1$. В этом случае в силу неравенства (9.12) $F_1 \neq 0$ и для функции $q = F_2/F_1$ имеем оценку

$$|q| < 1. \tag{9.14}$$

После деления левой и правой частей уравнения (9.11) на F_1 получаем уравнение Бельтрами (9.8) и доказываемое утверждение сводится к лемме 9.5.

В случае $\operatorname{sgn} h_1 = -1$ применим к левой и правой частям уравнения (9.11) операцию комплексного сопряжения. Поскольку выполнены равенства $\overline{\chi}_z = \overline{\chi_{\overline{z}}}$ и $\overline{\chi_{\overline{z}}} = \overline{\chi}_z$, то в результате получим равносильное уравнение $\overline{F}_2\overline{\chi}_{\overline{z}} + \overline{F}_1\overline{\chi}_z = 0$. В силу неравенства (9.13) $F_2 \neq 0$ и для функции $q = \overline{F}_1/\overline{F}_2$ имеем оценку (9.14). После деления левой и правой частей уравнения (9.11) на $\overline{F}_2$ приходим к уравнению Бельтрами

$$X_{\overline{z}} + qX_z = 0 \tag{9.15}$$

относительно неизвестной функции $X = \overline{\chi}$.

По лемме 9.5 в области S найдется решение $\widetilde{X}$ уравнения (9.15), которое является диффеоморфизмом класса $C^{1+\alpha}$. При этом функция X класса $C^{1+\alpha}$ тогда и только тогда является решением уравнения (9.15) в области S, когда найдется такая голоморфная внутри области $\widetilde{X}(S)$ функция Θ, для которой выполнено представление $X = \Theta \circ \widetilde{X}$. Следовательно, диффеоморфизм $\widetilde{\chi} = \overline{\widetilde{X}}$ служит решением уравнения (9.11) и для произвольного решения $\chi = \overline{X}$ этого уравнения имеем представление $\chi = \overline{\Theta} \circ \overline{\widetilde{\chi}} = \vartheta \circ \overline{\chi}$, где функция $\vartheta(z) = \overline{\Theta}(\overline{z})$ является голоморфной внутри области $\widetilde{\chi}(S)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.3. (a) По лемме 9.4 включение (4.2) для отображения (4.1) выполняется тогда и только тогда, когда функция комплексного переменного χ удовлетворяет уравнению (9.7). По лемме 9.6 (a) для этого уравнения существует решение (9.9), являющееся диффеоморфизмом класса $C^{1+\alpha}(S)$. По теореме Римана найдется конформное отображение Φ : int $\widetilde{\chi}(S) \to$ int K, отображающее внутренность области $\widetilde{\xi}(S)$ на внутренность единичного круга K [8]. Поскольку диффеоморфизм $\widetilde{\chi}$ и граница области S являются $C^{1+\alpha}$-гладкими, то граница области $\widetilde{S}$ также $C^{1+\alpha}$-гладкая. Следовательно, по теореме Келлога отображение Φ продолжается до диффеоморфизма класса $C^{1+\alpha}(\widetilde{\chi}(S))$ замкнутой области $\widetilde{\chi}(S)$ на замкнутый круг K [8]. Положим $\chi = \Phi \circ \widetilde{\chi}$. Эта композиция является диффеоморфизмом класса $C^{1+\alpha}(S)$ и по построению отображает S на K. По лемме 9.6 (b) диффеоморфизм χ служит решением уравнения (9.7), а по лемме 9.4 удовлетворяет включению (4.2). Тем самым, χ — характеристический диффеоморфизм.

(b) Пусть наряду с характеристическим диффеоморфизмом (4.1) задан еще один характеристический диффеоморфизм (4.4). По лемме 9.4 функции комплексного переменного χ и $\widetilde{\chi}$ служат решениями уравнения (9.7), а по лемме 9.6 (b) для этих функций найдется такое голоморфное отображение ϑ внутренности круга K в себя, для которого справедливо представление (9.10). Отображение ϑ является взаимно-однозначным, т.е. конформным. Положив $\varphi = \vartheta^{-1}$, получим конформное отображение круга K на себя, для которого в силу (9.10) выполняется представление

$$\widetilde{\chi} = \varphi \circ \chi. \tag{9.16}$$

Как известно, любое конформное отображение единичного круга K на себя имеет вид (4.3).

Обратно, пусть χ — характеристический диффеоморфизм, φ — дробно-линейное преобразование вида (4.3) и $\widetilde{\chi}$ — композиция (9.16). Тогда по лемме 9.4 χ является решением уравнения (9.7), по лемме 9.6 (b) $\widetilde{\chi}$ — решение уравнения (9.7), а по лемме 9.4 отображение $\widetilde{\chi}$ — характеристический диффеоморфизм. Теорема доказана.

Для доказательства теоремы 4.4 потребуется

Лемма 9.7. *Пусть* (S,σ) *и* $(\widetilde{S},\widetilde{\sigma})$ *— эквивалентные многозначные решения уравнения* (1.1) *и пусть* h_j *и* $\widetilde{h}_j, j = 1, 2,$ *— соответствующие характеристические расслоения этих решений. Тогда при* $r \in S$ *и* $j = 1, 2$ *для диффеоморфизма* (2.12) *выполняется равенство*

$$\psi_*\big(h_j(r)\big) = \widetilde{h}_j\big(\psi(r)\big). \tag{9.17}$$

Доказательство. Из равенства (2.13) получим $\sigma_* = \widetilde{\sigma}_* \circ \psi_*$. Следовательно, согласно включению (3.7) имеем $\widetilde{\sigma}_*\Big(\psi_*\big(h_j(r)\big)\Big) = \sigma_*\big(h_j(r)\big) \subset H_j\big(\sigma(r)\big)$. Таким образом, пространство в левой части равенства (9.17) удовлетворяет определению 3.5 и в силу леммы 3.4 совпадает с пространством в правой части этого равенства. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.4. (a)$\Rightarrow$(b). Пусть решения (S,σ) и $(\widetilde{S},\widetilde{\sigma})$ эквивалентны, т.е. найдется такой $C^{1+\alpha}$-диффеоморфизм (2.12), для которого выполнено равенство (2.13). Рассмотрим отображение $F = \widetilde{\chi} \circ \psi$, являющееся диффеоморфизмом области S на единичный круг K. По лемме 9.7 выполнено

$$F_*\big(h_1(r)\big) = \widetilde{\chi}_* \circ \psi_*\big(h_1(r)\big) = \widetilde{\chi}_*\Big(\widetilde{h}_1\big(\psi(r)\big)\Big);$$

в силу определения 4.1 имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\big(F(r)\big) \in F_*\big(h_1(r)\big).$$

Отсюда заключаем, что F — характеристический диффеоморфизм решения (S,σ) и по теореме 4.3 (b) найдется такое дробно-линейное преобразование $\widetilde{\varphi}$ вида (4.3), что $F = \widetilde{\varphi} \circ \chi$. Тем самым, $\widetilde{\chi} = \widetilde{\varphi} \circ \chi \circ \psi^{-1}$ и в силу (2.13)

$$\widetilde{\sigma}^{\,\widetilde{\chi}} = \widetilde{\sigma} \circ \widetilde{\chi}^{-1} = \widetilde{\sigma} \circ \psi \circ \chi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \sigma \circ \chi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}.$$

Таким образом, положив $\varphi = \widetilde{\varphi}^{-1}$, получим

$$\widetilde{\sigma}^{\,\widetilde{\chi}} = \sigma^{\chi} \circ \varphi. \tag{9.18}$$

(b)⇒(a). Пусть выполнено равенство (9.18), где φ — дробно-линейное преобразование (4.3). Иначе говоря, $\widetilde{\sigma} \circ \widetilde{\chi}^{-1} = \sigma \circ \chi^{-1} \circ \varphi$. Положив $\psi = \widetilde{\chi}^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \chi$, получим такой диффеоморфизм области S на $\widetilde{S}$, для которого справедливо представление (2.13); следовательно, решения (S, σ) и $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma})$ эквивалентны. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.5. Пусть отображение (4.6) является отнесенным к характеристическим координатам многозначным решением уравнения (1.1). Тогда согласно определениям (4.5) и 4.1 имеем $\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + i\,\dfrac{\partial}{\partial v}\right)(u, v) \in h_1(u, v)$, откуда по определению 3.5 получим (4.7). Поскольку отображение (4.6) — погружение, то в силу определения (3.3) справедлива оценка (4.8). Обратно, пусть отображение (4.6) удовлетворяет в K оценке (4.8) и включению (4.7). Из оценки (4.8) вытекает, что левая часть этого включения отлична в K от нуля и по лемме 3.7 отображение (4.6) является многозначным решением уравнения (1.1), отнесенным к характеристическим координатам. Теорема доказана.

Таким образом, для многозначных односвязных решений уравнений указанного класса доказана возможность введения глобальных характеристических координат. В результате осуществлено сведение эллиптических уравнений Монжа–Ампера к соответствующим однородным системам квазилинейных уравнений первого порядка в единичном круге. На основании этого сведения для уравнений Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами, в том числе нелинейных, найдено множество всех многозначных решений. Полученные теоретические результаты могут быть успешно использованы для решения обратных задач синтеза изображений.

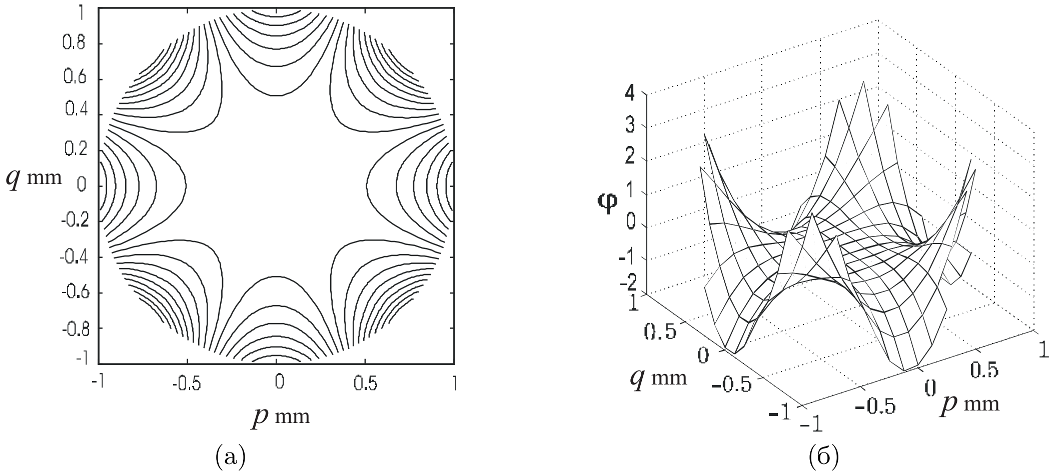


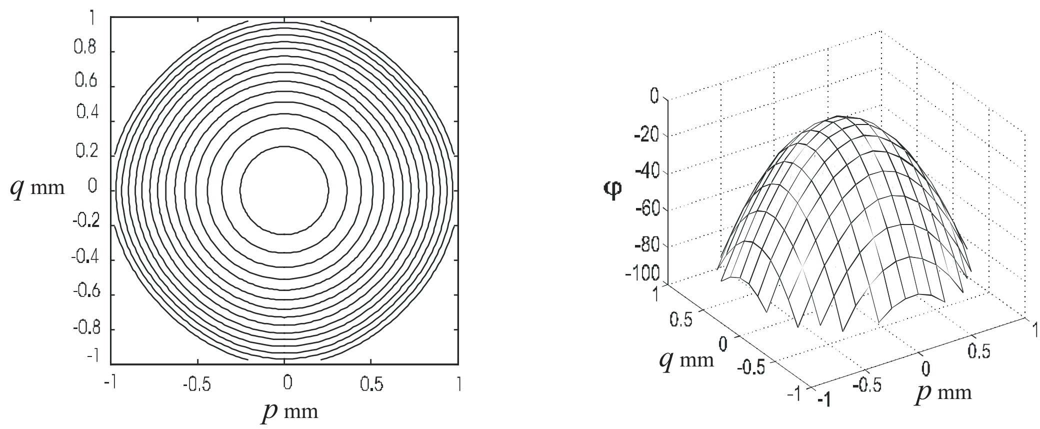
Рис. 3. Фазовая функция $\varphi_1(x, y)$. Задача формирования в плоскости $z = f$ квадрата с равномерным распределением интенсивности: (а) $\varphi_1(x, y)$ как поверхность в трехмерном пространстве, (б) линии уровня $\varphi_1(x, y)$

10. Расчет модельных задач. В качестве модельной задачи рассматривалась задача формирования излучения из круга с равномерным распределением амплитуды в квадрат с равномерным распределением амплитуды. Были рассчитаны две фазовые функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ оптических элементов, преобразующих излучение из круга в квадрат.

Расчеты фазовых функций проводились при следующих параметрах: площади круга и квадрата равны; радиус круга 1 мм; сторона квадрата $\sqrt{\pi}$ мм; расстояние f между оптическим элементом и изображением 20 мм, длина волны $\lambda = 0.63$ микрона. На рис. 3 а показана фазовая функция $\varphi_1(x, y)$ как поверхность, на рис. 3 б изображены ее линии уровня. На рис. 4 иллюстрируется фазовая функция $\varphi_2(x, y)$.

Приближение геометрической оптики не учитывает волновых эффектов. Приближение Френеля более точно описывает процесс распространения излучения.

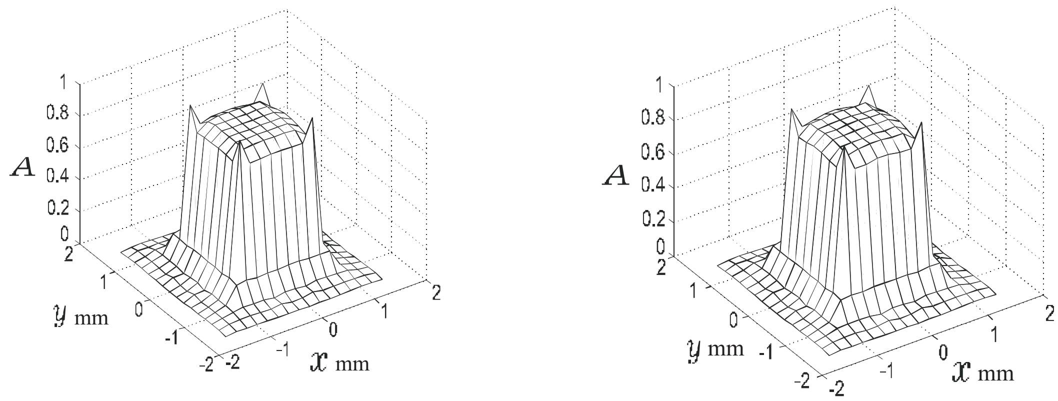
Поэтому для проверки найденных решений были выполнены расчеты амплитуды волнового поля в приближении Френеля. Вычисление интеграла Френеля производилось с помощью быстрого преобразования Фурье, при этом использовалась сетка 512 на 512 точек. На рис. 5 слева и справа показаны амплитуды волнового поля, созданные оптическим элементом соответственно с фазой $\varphi_1(x, y)$ и с фазой $\varphi_2(x, y)$. Из



(а) (б)

Рис. 4. Фазовая функция $\varphi_2(x, y)$. Задача формирования в плоскости $z = f$ квадрата с равномерным распределением интенсивности: (а) $\varphi_2(x, y)$ как поверхность в трехмерном пространстве, (б) линии уровня $\varphi_2(x, y)$

этого рисунка следует, что несмотря на разный вид фазовых функций (рис. 3, 4) рассчитанные амплитуды практически совпадают. На рис. 6 представлена амплитуда в плоскости изображения в разрезе при $q = 0$ для первого и второго решений.



(а) (б)

Рис. 5. Амплитуды изображения: (а) при $\varphi_1(x, y)$; (b) при $\varphi_2(x, y)$. Задача формирования в плоскости $z = f$ квадрата с равномерным распределением интенсивности

Рассмотрим задачу формирования прямоугольного изображения из круга. В качестве модельной задачи была рассмотрена задача формирования излучения в прямоугольник с отношением сторон 1 к 4. Задача рассматривалась при следующих параметрах. Радиус круга 1 мм, площади круга и квадрата предполагались равными. Фокусное расстояние между круглой апертурой и сформированным изображением прямоугольника 20 мм. Длина волны излучения 0.63 микрона.

Так же, как и при решении задачи формирования квадрата, были найдены два гладких решения — две фазовые функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ оптического элемента для формирования излучения из круга в заданный прямоугольник.

На рис. 7 иллюстрируется фазовая функция $\varphi_1(x, y)$: слева изображены линии уровня, справа — $\varphi_1(x, y)$ представлена как поверхность в трехмерном пространстве.

Аналогично, на рис. 8 справа фазовая функция $\varphi_2(x, y)$ представлена как поверхность, а слева изображены ее линии уровня.

Фазовые функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ имеют совершенно разный вид, но тем не менее они являются двумя решениями одной и той же задачи. Оба эти решения формируют в плоскости изображения прямоугольник с равномерным распределением интенсивности.

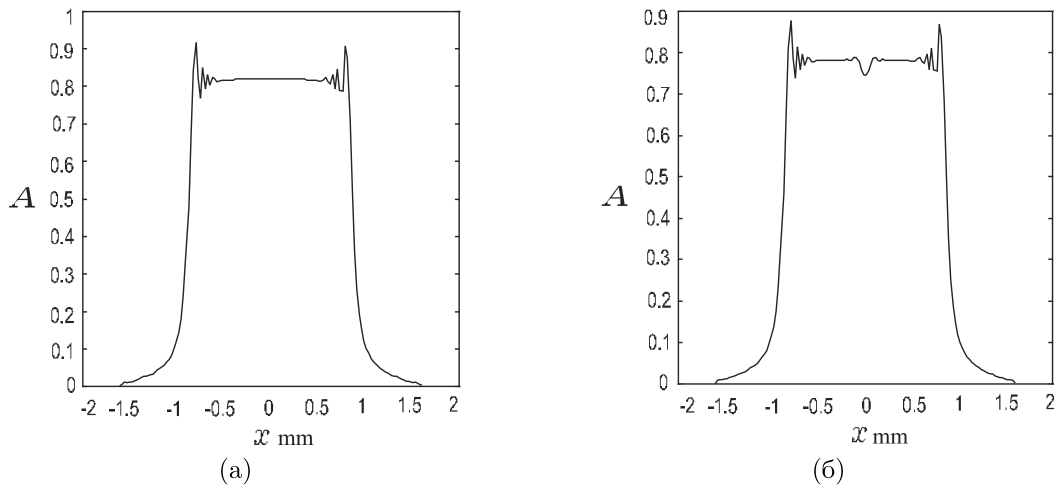


Рис. 6. Амплитуда изображения в разрезе ($q = 0$): (а) при $\varphi_1(x, y)$; (б) при $\varphi_2(x, y)$. Задача формирования в плоскости $z = f$ квадрата с равномерным распределением интенсивности

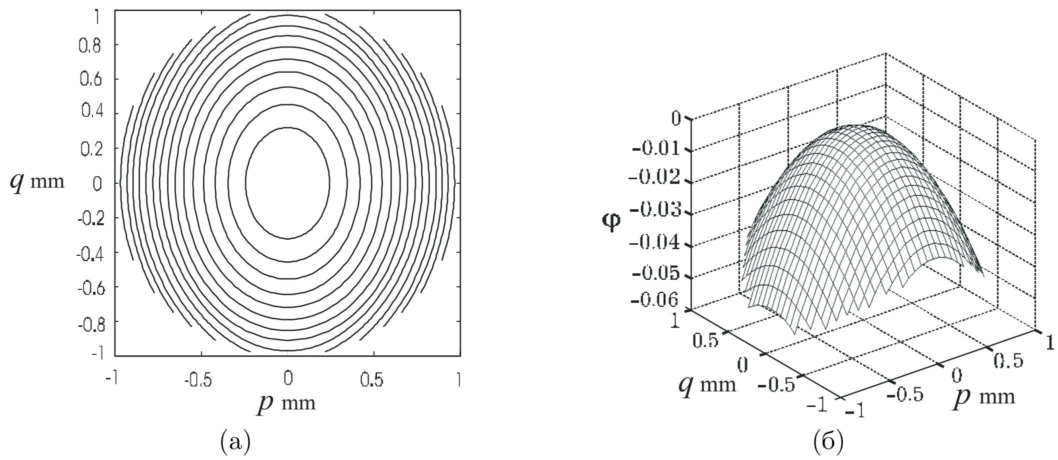


Рис. 7. Фазовая функция $\varphi_1(x, y)$: (а) линии уровня и (б) $\varphi_1(x, y)$ как поверхность в трехмерном пространстве. Задача формирования в плоскости $z = f$ прямоугольника 1:4 с равномерным распределением интенсивности

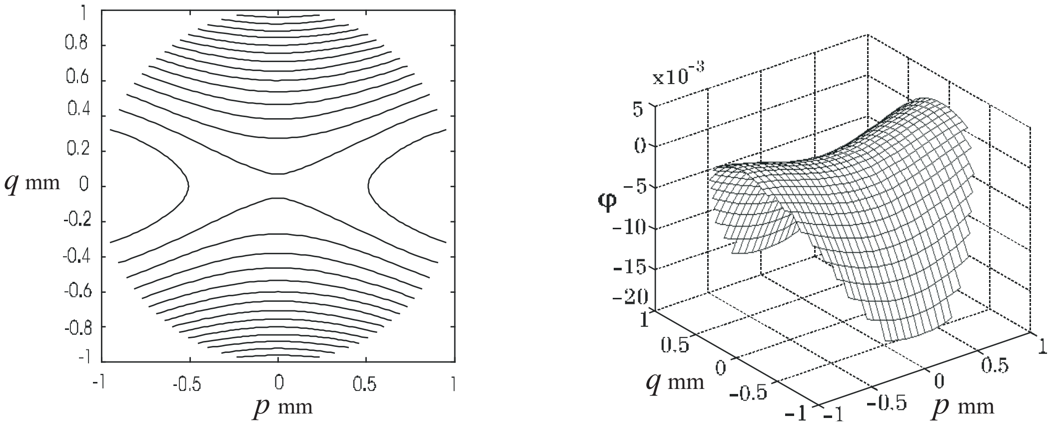
На рис. 9 показаны амплитуды излучения в фокальной плоскости $z = f$, рассчитанные в приближении Френеля для $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ соответственно.

Как видно из рис. 9, оба решения $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ в плоскости изображения формируют прямоугольник с заданными параметрами.

Остановимся подробнее на распределении амплитуд в плоскости изображения. Для этого рассмотрим разрез распределения амплитуды излучения при $q = 0$, т.е. разрез вдоль прямоугольника по его осевой линии. На рис. 10 слева показан разрез амплитуды волнового поля для первого решения $\varphi_1(x, y)$, справа — для второго решения $\varphi_2(x, y)$.

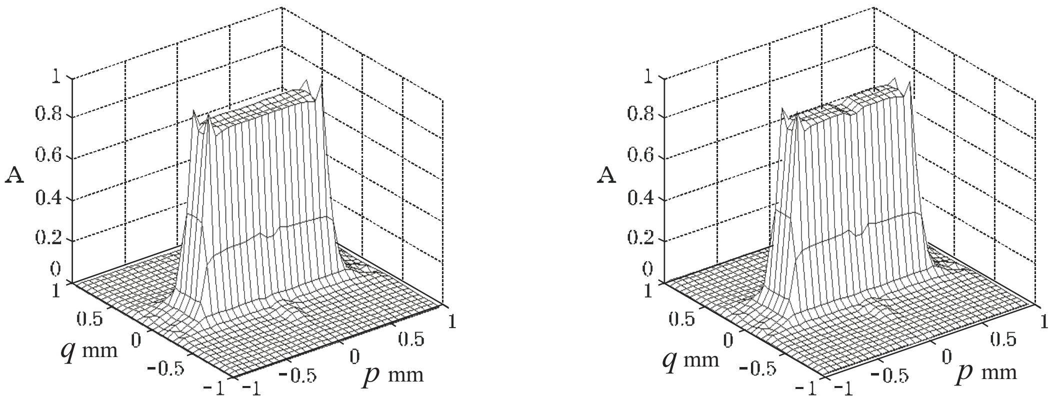
Из рис. 9 и 10 следует, что в целом амплитуда излучения в плоскости изображения постоянна внутри прямоугольника (с точностью до дифракционных эффектов), спадает до нуля на границе прямоугольника и равна нулю всюду за его пределами для обоих решений. Можно сказать, что оба найденных в приближении геометрической оптики решения успешно решают поставленную задачу. Рассчитанные в приближении Френеля распределения амплитуд волнового поля на краях сформированного прямоугольника испытывают небольшие колебания. Если сравнивать рассчитанные в приближении Френеля амплитуды для двух решений, то на рис. 10 видно, что у второго решения прямо в центре изображения существует незначительный спад амплитуды.

Таким образом, на уровне математического моделирования в рамках приближения Френеля удается эффективно контролировать результаты решения обратных задач синтеза, полученных в рамках приближения геометрической оптики.



(а) (б)

Рис. 8. Фазовая функция $\varphi_2(x,y)$: (а) линии уровня и (б) $\varphi_2(x,y)$ как поверхность в трехмерном пространстве. Задача формирования в плоскости $z=f$ прямоугольника 1:4 с равномерным распределением интенсивности сфокусированного излучения



(а) (б)

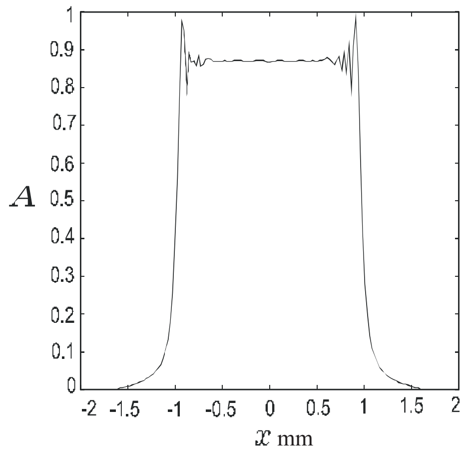
Рис. 9. Амплитуда излучения в плоскости изображения для первого решения (а) и для второго (б). Задача формирования в плоскости $z=f$ прямоугольника 1:4 с равномерным распределением интенсивности

Чем же отличаются два решения $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$? Эти решения отличаются размером минимальных зон оптического элемента. Минимальный размер зон больше у элемента, соответствующему решению с фазовой функцией $\varphi_1(x,y)$. Этот факт может быть решающим при выборе одного из решений задачи синтеза.

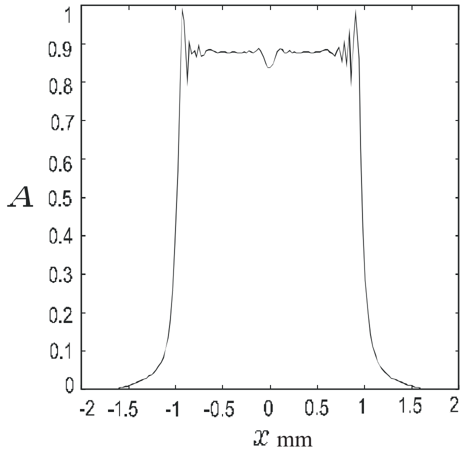
Рассмотрим случай, когда у сформированного прямоугольника одна сторона существенно больше другой. Как показали расчеты, предложенный метод позволяет получить решение и в этом случае. Были проведены расчеты фазовой функции оптического элемента, формирующего прямоугольник с соотношением сторон 1 к 10. Параметры задачи возьмем такими же, как и ранее: радиус круга 1 мм, площади круга и прямоугольника равны, расстояние между оптическим элементом и изображением 20 мм.

В целом задача решается так же, как и для прямоугольника с соотношением сторон 1 к 4. Точно так же, как и в предыдущем случае, можно построить два решения $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$. Приведем одно из них — первое. Вид фазовой функции $\varphi_1(x,y)$ иллюстрируется на рис. 11, где слева изображены линии уровня и справа функция $\varphi_1(x,y)$ представлена как поверхность в трехмерном пространстве. В рамках математического моделирования вычислялось распределение амплитуды в плоскости $z=f$ в приближении Френеля (рис. 12). И в этом случае предложенный алгоритм достаточно хорошо решает поставленную задачу. Дифракционные эффекты больше всего, как обычно, проявляются на концах сформированного прямоугольника.

11. Сравнение гладких решений задачи формирования излучения из области в область с решениями, полученными итерационным методом. В данной статье предложен метод решения

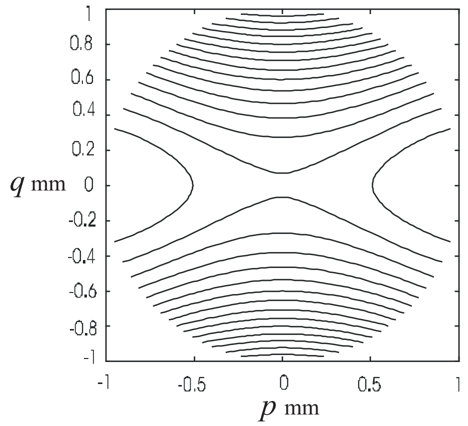


(а)

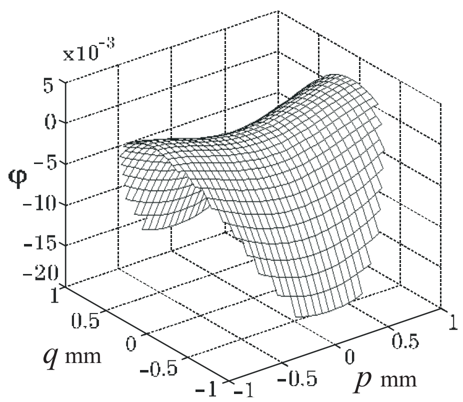


(б)

Рис. 10. Разрез амплитуды излучения ($q = 0$) в плоскости изображения для первого решения (а) и для второго (б). Задача формирования в плоскости $z = f$ прямоугольника 1:4 с равномерным распределением интенсивности



(а)



(б)

Рис. 11. Фазовая функция $\varphi_1(x, y)$: линии уровня (а) и как поверхность в трехмерном пространстве (б). Задача формирования в плоскости $z = f$ прямоугольника 1:10 с равномерным распределением интенсивности сфокусированного излучения

задачи формирования излучения из выпуклой области в выпуклую область с помощью плоских оптических элементов с гладкой фазовой функцией. Проведенные модельные расчеты в приближении Френеля показывают, что предложенный метод успешно решает поставленную задачу.

В то же время существуют другие методы решения задач синтеза изображений и формирования излучения. Сфера возможностей классической оптики, базирующейся на использовании таких стандартных элементов, как призмы, линзы и зеркала, весьма ограниченна. Широкими возможностями обладают элементы плоской оптики с многослойными покрытиями [8], однако для рассмотренных задач формирования лазерного излучения элементы с многослойными покрытиями не подходят.

Представляется интересным сравнить предложенный в этой статье метод формирования изображений с итерационным методом [7]. Этим методом также возможно рассчитать фазовую функцию плоского элемента, формирующего заданное изображение.

С использованием итерационного алгоритма были проведены расчеты круглого оптического элемента, который формирует изображение квадрата с равномерным распределением интенсивности. Использовались следующие параметры эксперимента: радиус элемента 1 мм, фокусное расстояние $f = 20$ мм, длина волны $\lambda = 0.63$ микрона, площади круглого оптического элемента и квадрата равны.

Рассчитанная итерационным методом фазовая функция $\varphi(x, y)$ показана на рис. 13. На этом рисунке фазовая функция принимает значения от $-\pi$ (черный цвет) до $+\pi$ (белый). Видно, что рассчитанная

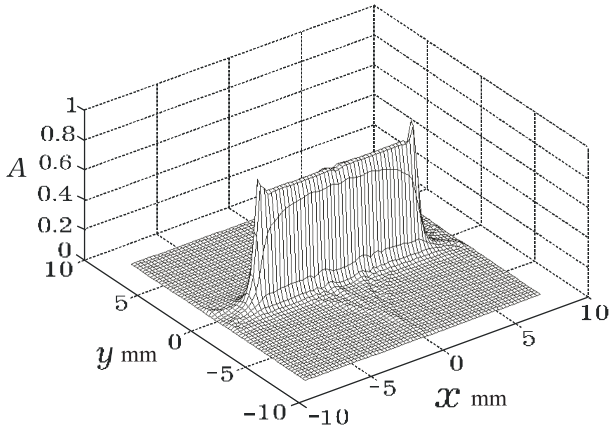


Рис. 12. Распределение амплитуды в фокальной плоскости. Задача формирования прямоугольника 1:10 с равномерным распределением интенсивности

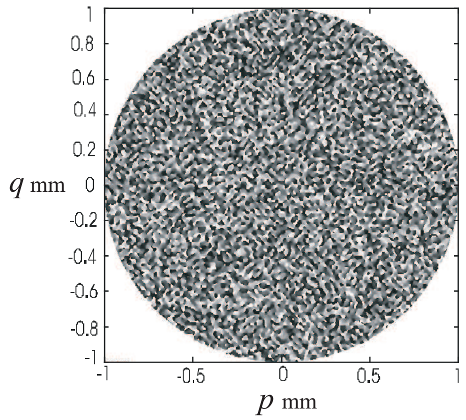
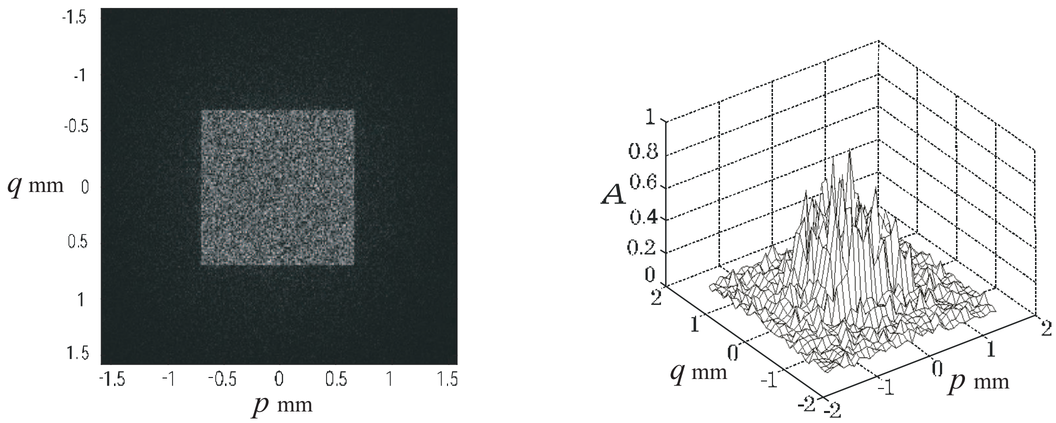


Рис. 13. Фазовая функция круглого оптического элемента

итерационным алгоритмом фазовая функция представляет собой нерегулярную структуру.



(а) (б)

Рис. 14. Изображение квадрата (а). Амплитуда изображения квадрата как поверхность в трехмерном пространстве (б)

В рамках математического моделирования в приближении Френеля для найденной фазовой функции оптического элемента была решена прямая задача. Создаваемое оптическим элементом изображение показано на рис. 14 а. Амплитуда поля в точках (p, q) обратно пропорциональна потемнению в точках (p, q): черные участки имеют амплитуду, равную нулю, белые — максимальную. Видно, что почти вся энергия излучения сфокусирована внутри заданного квадрата. Если говорить об усредненной яркости изображения, то она достаточно равномерна. Однако если рассмотреть амплитуду изображения более детально, то видно, что внутри квадрата амплитуда сильно колеблется (рис. 14 б).

Можно утверждать, что итерационный метод дает приемлемое решение задачи — практически вся энергия излучения, падающая на оптический элемент, фокусируется внутри заданного квадрата.

Однако найденная итерационным методом фазовая функция представляет собой нерегулярную структуру. Как следствие, рельеф оптического элемента с такой фазовой функцией тоже имеет нерегулярную структуру. Следует заметить, что практическая реализация рельефа оптических элементов представляет собой непростую практическую задачу: для нерегулярного рельефа в процессе изготовления сложно достичь теоретической эффективности. С этой точки зрения гладкие решения обладают серьезными преимуществами. Амплитуда изображения внутри квадрата, изображение которого создано элементом, рассчитанным итерационным методом, подвержена сильным осцилляциям.

Следует отметить все же и достоинства итерационного метода по сравнению с подходом, предложенным в настоящей статье. Итерационный метод универсален и может быть пригоден для расчета практически любых растровых изображений. Область применения методов построения гладкого решения задачи формирования излучения из области в область представляется весьма специальной — изображения могут быть только выпуклыми областями. Однако в этой узкой области предложенный метод построения гладких решений обладает существенными преимуществами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1988.
2. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. Москва: Наука, 1991.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Москва: Наука, 1977.
4. *Лычагин В.В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. 1979. **34**, вып. 1(205). 137–165.
5. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. Москва: Наука, 1979.
6. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. Москва: Мир, 1987.
7. *Jordan J.A., Hirsch P.M., Lesem L.B., Van Roy D.L.* Kinoform lenses // Appl. Opt. 1970. **9**, N 8. 1883–1887.
8. *Furman Sh.A., Tikhonravov A.V.* Basics of optics of multilayer systems. Gif-sur-Yvette: Editions Frontier, 1992.
9. *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1962.
10. *Виноградов А.М.* Многозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1973. **210**, № 1. 11–14.
11. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
12. *Туницкий Д.В.* О контактной линеаризации уравнений Монжа–Ампера // Известия РАН. Сер. матем. 1996. **60**, № 2. 195–220.
13. *Туницкий Д.В.* О глобальной разрешимости гиперболических уравнений Монжа–Ампера // Известия РАН. Сер. матем. 1997. **61**, № 5. 177–224.
14. *Lewy H.* A priory limitations for solutions of Monge–Ampere equations. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1935. **37**. 417–434.
15. *Lewy H.* A priory limitations for solutions of Monge–Ampere equations. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. **41**. 365–374.
16. *Туницкий Д.В.* Эквивалентность и характеристические связности уравнений Монжа–Ампера // Матем. сб-к. 1997. **188**, № 5. 131–157.
17. *Гончарский А.В., Попов В.В., Степанов В.В.* Введение в компьютерную оптику. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
18. *Федорюк М.В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
19. *Погорелов А.В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
20. *Гончарский А.А., Романов С.Ю., Туницкий Д.В.* О некоторых обратных задачах синтеза плоской компьютерной оптики // Численный анализ: теория, приложения, программы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 163–172.
21. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
22. *Постников М.М.* Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
23. *Постников М.М.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1988.
24. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
15.03.06