УДК 519.2

УСЛОВИЯ ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТИ И СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЧАСТЬ II.

А. Б. Бакушинский[1], М. Ю. Кокурин[2]

Представлен обзор последних результатов авторов по оценкам скорости сходимости методов регуляризации нелинейных операторных уравнений в гильбертовом и банаховом пространствах. Особое внимание уделяется вопросам необходимости условий истокообразной представимости решений для степенных оценок скорости сходимости рассматриваемых методов.

Ключевые слова: линейные некорректные задачи, банахово пространство, регуляризация, скорость сходимости, истокообразное представление.

1. Введение. Настоящая работа продолжает обзор [1] последних результатов авторов, касающихся устойчивых методов решения некорректных операторных уравнений. Пусть $F : X_1 \to X_2$ — нелинейный оператор, X_1 и X_2 — комплексные банаховы пространства. Предметом нашего рассмотрения в этой части работы являются нелинейные некорректные уравнения

$$F(x) = 0, \quad x \in X_1. \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что уравнение (1.1) имеет решение x^*, которое может не быть единственным. Оператор $F(x)$ предположим дважды дифференцируемым по Гато в некоторой окрестности решения x^*. Мы не делаем каких-либо допущений о существовании непрерывного обратного оператора для линейного оператора $F'(x)$, либо $F'^*(x)F'(x)$ в окрестности x^*. Уравнения такого типа часто возникают в процессе моделирования при решении многочисленных обратных задач естественных наук (см. например [2 – 7]). Широкий спектр приложений уравнений (1.1) обуславливает растущий интерес к разработке методов их численного анализа. При сделанных предположениях уравнение (1.1) является, вообще говоря, некорректным [2 – 6], поскольку зависимость решения x^* от малых вариаций оператора F может не быть непрерывной. Иными словами, малое изменение F может привести к значительному изменению решения x^* или даже к замене исходного уравнения уравнением, не имеющим решений. Указанные обстоятельства порождают значительные трудности при практическом решении прикладных некорректных задач вида (1.1) традиционными методами вычислительной математики. Потребности приближенного решения практических некорректных задач стимулировали развитие специальных методов регуляризации, позволяющих для приближенного оператора $\tilde{F}$ и уровня погрешности δ получать такое приближение разыскиваемого решения x^*, которое стремится к x^* при $\delta \to 0$.

Методы регуляризации уравнений (1.1) во многих случаях удобно строить по приведенной ниже схеме (см. [1, 5, 6]). Пусть $\mathbf{F}$ — класс операторов $F : X_1 \to X_2$, содержащий как исходный, так и приближенный операторы для (1.1). На первом этапе будем предполагать, что исходный оператор F доступен без ошибок и параметрическое семейство отображений $\Re_\alpha : \mathbf{F} \to X_1$ построено так, что $\lim\limits_{\alpha \to 0} \Re_\alpha(F) = x^*\ \forall F \in \mathbf{F}$. Отображение $\Re_\alpha$ ставит в соответствие каждому оператору $F \in \mathbf{F}$ и параметру регуляризации $\alpha \in (0, \alpha_0]$ приближенное решение $x_\alpha = \Re_\alpha(F)$ задачи (1.1). На втором этапе вместо точного оператора F предполагаются известными приближение $\tilde{F} \in \mathbf{F}$ и величина δ, оценивающая погрешность приближения F в подходящей метрике. При этом необходимо указать зависимость $\alpha = \alpha(\tilde{F}, \delta)$, т.е. процедуру выбора параметра регуляризации, такую, чтобы для элементов $x^\delta = \Re_{\alpha(\tilde{F},\delta)}(\tilde{F})$ равномерно относительно выбора приближенного оператора $\tilde{F}$ в рамках уровня погрешности δ выполнялось $\lim\limits_{\delta \to 0} x^\delta = x^*$. В силу последнего равенства элемент x^δ может быть взят в качестве искомого приближения к точному решению x^*, соответствующего приближенному оператору $\tilde{F}$. Алгоритм, ставящий в соответствие приближенному оператору $\tilde{F}$ аппроксимацию $\Re_{\alpha(\tilde{F},\delta)}(\tilde{F})$ решения x^*, называется регуляризующим алгоритмом для уравнения (1.1).

Весьма общий подход к построению регуляризующих алгоритмов на базе итеративных процедур доставляет техника линеаризации исходного нелинейного уравнения: имея итерационную точку x_n, в качестве следующего приближения $x = x_{n+1}$ можно взять решение линеаризованного уравнения

$$F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) = 0, \quad x \in X_1. \tag{1.2}$$

[1] Институт системного анализа РАН, пр. 60-летия Октября, 9, 117312, Москва; e-mail: bakush@isa.ru
[2] Марийский государственный университет, пр. Ленина, 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kokurin@marsu.ru

Если оператор $F'(x_n)$ непрерывно обратим, то задача (1.2) является корректно поставленной. Поэтому следующая итерационная точка x_{n+1} может быть получена непосредственно из (1.2), например, с использованием классических методов конечномерной аппроксимации пространств и операторов. В этом случае схема (1.2) приводит к классическому методу Ньютона (Гаусса–Ньютона). Если $R\big(F'(x_n)\big)$ не совпадает с X_2, то уравнение (1.2) оказывается некорректно поставленным и потому прямое нахождение x_{n+1} из (1.2) с использованием прямых методов обычно бывает сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Указанную трудность удается преодолеть путем использования для приближенного нахождения x_{n+1} из (1.2) различных процедур регуляризации линейных операторных уравнений. В [8 – 10] этот подход был разработан для нелинейных уравнений (1.1) с оператором F, действующим из гильбертова пространства X_1 в другое гильбертово пространство X_2. Применяя к линейному уравнению (1.2) процедуру регуляризации из [5, гл. 2, § 1; 11, гл. 2, § 3] и выбирая в качестве x_{n+1} получаемое приближенное квазирешение (1.2), приходим к следующему классу итеративных методов решения уравнений (1.1) в гильбертовом пространстве:

$$x_{n+1} = \xi - \Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n)\alpha_n\big)\ F'^*(x_n)\big(F(x_n) - F'(x_n)\,(x_n - \xi)\big). \tag{1.3}$$

В (1.3) элемент $\xi \in X_1$ есть начальное приближение для x_{n+1}, параметр регуляризации $\alpha_n > 0$ определяет точность решения линеаризованного уравнения (1.2). Именно, если (1.2) имеет непустое множество решений, то при фиксированном x_n правая часть (1.3) сходится к решению (1.2) при $\alpha_n \to 0$. Функция оператора в (1.3) может быть формально определена с использованием техники спектрального разложения самосопряженных операторов в применении к $F'^*(x_n)F'(x_n)$ [12, гл. VII]. Конкретизируя порождающую функцию $\Theta(\lambda,\alpha)$ $(\lambda \in \mathbf{C}, \alpha > 0)$ в рамках нежестких дополнительных условий, из (1.3) будем получать конкретные итеративные алгоритмы для (1.1) (см. [6, 8 – 10]). Распространение вышеупомянутой процедуры из [5, гл. 2, § 1; 11, гл. 2, § 3] на линейные операторные уравнения в банаховых пространствах $X_1 = X_2 = X$ начато в работе [5, гл. 2, § 5]. Алгоритм из [5, гл. 2, § 5] в применении к (1.2) приводит к следующему семейству итеративных методов для решения (1.1):

$$x_{n+1} = \xi - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)\,\big(F(x_n) - F'(x_n)(x_n - \xi)\big). \tag{1.4}$$

Здесь $\xi \in X$ и $\alpha_n > 0$ имеют тот же смысл, что и в (1.3). Для определения функций от операторов в банаховых пространствах будем использовать исчисление Рисса–Данфорда [12, гл. XI]. Пусть $\sigma(A)$ обозначает спектр, $\rho(A) = \mathbf{C}\backslash\sigma(A)$ есть резольвентное множество оператора $A \in L(X)$ и E — единичный оператор. Обозначим через $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ резольвенту оператора A. Предположим, что $\varphi(\lambda)$ есть аналитическая на открытом множестве $S \supset \sigma(A)$ функция спектрального параметра λ. Тогда функция $\varphi(A)$ оператора A может быть определена по формуле Рисса–Данфорда

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \varphi(\lambda)\,R(\lambda, A)\,d\lambda, \tag{1.5}$$

где $\gamma \subset S$ — положительно ориентированный контур, содержащий внутри спектр $\sigma(A)$.

В настоящей работе исследуются классы решений x^* уравнения (1.1), для которых процедуры (1.3) и (1.4) сходятся с выполнением степенных оценок вида

$$\|x_n - x^*\|_{X_1} \le c\,\alpha_n^p \quad (c, p > 0). \tag{1.6}$$

Всюду ниже $\|\cdot\|_X$ означает норму банахова пространства X; $R(A) = \{y \in X_2 : y = Ax, x \in X_1\}$ есть область значений оператора $A \in L(X_1, X_2)$; A^* обозначает сопряженный для A оператор. Требования к свойствам решения x^*, гарантирующие выполнение оценок вида (1.6), удобно формализовать в виде условий истокообразной представимости начальной невязки

$$x^* - \xi \in R\left(\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p\right) \tag{1.7}$$

в случае гильбертовых пространств X_1, X_2 или

$$x^* - \xi \in R\left(F'(x^*)^p\right), \tag{1.8}$$

если пространства $X_1 = X_2 = X$ банаховы. Основной результат относительно итераций (1.3) и (1.4) состоит в том, что условия (1.7) и (1.8) являются достаточными для выполнения (1.6) и “весьма близки” к необходимым для этой оценки. Иными словами, соотношения (1.7) и (1.8) дают достаточно точное описание класса возможных решений уравнения (1.1), для которых выполняется степенная оценка скорости сходимости (1.6).

Структура работы следующая. В разделе 2 представлен единый подход к исследованию сходимости класса итеративных методов регуляризации (1.3) в гильбертовом пространстве. В частности, показана достаточность условия истокопредставимости (1.7) для сходимости этих методов со степенной скоростью. В разделе 3 установлено, что представление (1.7) в действительности весьма близко к необходимому для выполнения (1.6). В разделе 4 проводится распространение схемы (1.3) на случай банаховых пространств $X_1 = X_2$. Основной результат здесь состоит в том, что истокообразное представление (1.8) является достаточным для сходимости итерационного процесса (1.4) с выполнением оценки (1.6). Наконец, в разделе 5 показано, что условие (1.8) весьма близко к необходимому для выполнения (1.6). В разделе 6 приводятся примеры итеративных процедур регуляризации в банаховом пространстве, к которым применимы предыдущие результаты.

В основу данного обзора положены результаты, частично опубликованные в [8 – 10, 20 – 25].

2. Оценки скорости сходимости итеративных методов решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве. В этом разделе в обзорном порядке описываются некоторые результаты авторов, касающиеся сходимости итеративных методов (1.3) решения нелинейных уравнений (1.1). Пусть оператор F действует из гильбертова пространства X_1 в гильбертово пространство X_2, где X_1 и X_2 — комплексные пространства. Предположим, что производные Гато $F'(x)$ и $F''(x)$ существуют и удовлетворяют условию

$$\left.\begin{aligned} &\|F'(x)\|_{L(X_1,X_2)} \le N_1 \\ &\|F''(x)\|_{L\left(X_1,L(X_1,X_2)\right)} \le N_2 \end{aligned}\right\} \quad \forall x\in\Omega_R;\quad \Omega_R=\Bigl\{x\in X_1: \|x-x^*\|_{X_1}\le R\Bigr\},\quad R>0. \tag{2.1}$$

Пусть $x_0 \in \Omega_R$ и приближения $\{x_n\}$ порождаются итеративным процессом

$$x_{n+1} = \xi - \Theta\bigl(F'^*(x_n)F'(x_n),\alpha_n\bigr)\,F'^*(x_n)\,\bigl(F(x_n) - F'(x_n)(x_n-\xi)\bigr). \tag{2.2}$$

Предположим, что комплекснозначная функция $\Theta(\lambda,\alpha)$ аналитична по λ в области $D_\alpha \subset \mathbf{C}$, где $D_\alpha \supset [0, N_1^2]$ для всех $\alpha \in (0,\alpha_0]$.

Наложим на последовательность параметров регуляризации $\{\alpha_n\}$ в (2.2) следующее ограничение.

Условие 2.1. Имеют место соотношения

$$0<\alpha_{n+1}\le\alpha_n,\quad n=0,1,\dots;\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0;\quad \sup_n\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}<\infty.$$

Обозначим $r = \sup\limits_n \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$.

Замечание 2.1. Примером последовательности $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющей условию 2.1, является последовательность $\alpha_n = \alpha_0(n+1)^{-a}$ при $\alpha_0, a > 0$.

Будем предполагать также выполненным условие истокопредставимости (1.7): существует элемент $v \in X_1$ такой, что

$$x^*-\xi = \bigl(F'^*(x^*)F'(x^*)\bigr)^p v,\quad p\ge 1/2. \tag{2.3}$$

Рассмотрим вначале случай, когда исходный оператор F в (1.1) доступен без погрешностей. Цель нашего исследования заключается в доказательстве того, что при выполнении условия (2.3) и соответствующих дополнительных ограничений справедлива следующая степенная оценка скорости сходимости:

$$\|x_n-x^*\|_{X_1}\leqslant l\,\alpha_n^p,\quad n=0,1,\dots. \tag{2.4}$$

Наложим на порождающую функцию $\Theta(\lambda,\alpha)$ следующие условия.

Условие 2.2. Найдется константа $\tilde C_0 > 0$, такая, что для всех $\alpha \in (0,\alpha_0]$ выполняется

$$\sup_{\lambda\in[0,N_1^2]}|\Theta(\lambda,\alpha)|\le\frac{\tilde C_0}{\alpha}.$$

Условие 2.3. Для каждого $p \in [0,p_0]$ при $p_0 \ge 1/2$ ($p\in[0,\infty)$, если $p_0=\infty$) выполняется неравенство

$$\sup_{\lambda\in[0,N_1^2]}\bigl|\Theta(\lambda,\alpha)\lambda-1\bigr|\lambda^p\le g(p)\,\alpha^p\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0],$$

где $g(p)$ есть неубывающая функция при $p\ge 0$.

Следствием условий 2.2 и 2.3 (при $p=0$) является неравенство

$$\sup_{\lambda\in[0,N_1^2]}\Bigl|\Theta(\lambda,\alpha)\sqrt{\lambda}\Bigr|\le\frac{C_0}{\sqrt{\alpha}}\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0].$$

Допустим, что представление (2.3) выполнено при $p \in [1/2, p_0]$. Предположим дополнительно, что $x_n \in \Omega_R$, и оценим сверху величину $\|x_{n+1} - x^*\|_{X_1}$. Как и в [10], из (2.2) с учетом (2.3) получаем

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= -\Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n\big)\, F'^*(x_n)\, G(x_n) - \\ &\quad - \Big[E - \Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n\big)\, F'^*(x_n)\, F'(x_n)\Big](x^* - \xi) = \\ &= -\Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n\big)\, F'^*(x_n)\, G(x_n) - \\ &\quad - \Big[E - \Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n\big)\, F'^*(x^*)\, F'(x^*)\Big]\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v - \\ &\quad - \Big[\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n\big)\, F'^*(x^*)\, F'(x^*) - \\ &\quad - \Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n\big)\, F'^*(x_n)\, F'(x_n)\Big]\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$G(x_n) = F(x_n) + F'(x_n)(x^* - x_n).$$

Из (2.1) следует, что

$$\|G(x_n)\|_{X_2} \le N_2\, \|x_n - x^*\|^2_{X_1}\, . \tag{2.6}$$

Объединяя оценки (2.5) и (2.6), с учетом условий 2.2 и 2.3 получаем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|_{X_1} \le \frac{C_0 N_2}{\sqrt{\alpha_n}}\, \|x_n - x^*\|^2_{X_1} + g(p)\, \alpha_n^p\, \|v\|_{X_1} + \Big\|\Big[\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n\big)\, F'^*(x^*)\, F'(x^*) - \\ - \Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n\big)\, F'^*(x_n)\, F'(x_n)\Big]\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v\Big\|_{X_1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Для оценки последней нормы в правой части (2.7) определим семейство положительно ориентированных контуров Γ_α, $\alpha \in (0, \alpha_0]$ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ так, что $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$ и Γ_α содержит внутри отрезок $[0, N_1^2]$ действительной оси. Допустим, что семейство $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0]}$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 2.4. Имеют место соотношения

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]}\ \sup_{\lambda \in \Gamma_\alpha} |\lambda| < \infty, \tag{2.8}$$

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]}\ \sup_{\lambda \in \Gamma_\alpha,\, \mu \in [0, N_1^2]} \frac{|\lambda| + \mu}{|\lambda - \mu|} < \infty. \tag{2.9}$$

Обозначим постоянные в левых частях неравенств (2.8) и (2.9) через M_0 и M_1 соответственно. Используя (1.5), получим

$$\begin{aligned} &\Big\|\Big[\Theta\big(F'^*(x^*)\, F'(x^*), \alpha_n\big)\, F'^*(x^*)\, F'(x^*) - \\ &\quad - \Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n\big)\, F'^*(x_n)\, F'(x_n)\Big]\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v\Big\|_{X_1} \le \\ &\quad \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|\Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda - 1\big|\, \Big\|\Big(R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big) - \\ &\quad - R\big(\lambda, F'^*(x_n)\, F'(x_n)\big)\Big)\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v\Big\|_{X_1} |d\lambda|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'^*(x_n)\,F'(x_n)\big)\Big)\,\big(F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)^p\Big\|_{L(X_1,X_1)} \le \\
&\quad \le \Big\|R\big(\lambda, F'^*(x_n)\,F'(x_n)\big)\,F'^*(x_n)\Big\|_{L(X_2,X_1)} \big\|F'(x^*) - F'(x_n)\big\|_{L(X_1,X_2)} \times \\
&\quad \times \Big\|R\big(\lambda, F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)\,\big(F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)^p\Big\|_{L(X_1,X_1)} + \\
&\quad + \Big\|R\big(\lambda, F'^*(x_n)\,F'(x_n)\big)\Big\|_{L(X_1,X_1)} \big\|F'^*(x^*) - F'^*(x_n)\big\|_{L(X_2,X_1)} \times \\
&\quad \times \Big\|F'(x^*)\,R\big(\lambda, F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)\big(F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)^p\Big\|_{L(X_1,X_2)}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Так как x^*, $x_n \in \Omega_R$, из (2.1) следует

$$\big\|F'^*(x^*) - F'^*(x_n)\big\|_{L(X_2,X_1)} = \big\|F'(x^*) - F'(x_n)\big\|_{L(X_1,X_2)} \le N_2\, \|x_n - x^*\|_{X_1}\,. \tag{2.12}$$

Используя технику спектрального разложения, нетрудно показать, что для каждого $s \ge 0$

$$\Big\|R\big(\lambda, F'^*(x)\,F'(x)\big)\,\big(F'^*(x)\,F'(x)\big)^s\Big\|_{L(X_1,X_1)} \le \frac{M(s)}{|\lambda|^{1-\min\{s,1\}}}, \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered}
\Big\|F'(x)\,R\big(\lambda, F'^*(x)\,F'(x)\big)\,\big(F'^*(x)\,F'(x)\big)^s\Big\|_{L(X_1,X_2)} \le \frac{M(s)}{|\lambda|^{1-\min\{s+1/2,1\}}} \\
\forall \lambda \in \Gamma_\alpha, \quad \alpha \in (0,\alpha_0], \quad x \in \Omega_R,
\end{gathered} \tag{2.14}$$

где $M(s) = M_1 \max\big\{L(s), L(s+1/2)\big\}$ и

$$L(s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s = 0; \\ s^s(1-s)^{1-s}, & \text{если} \quad s \in (0,1); \\ N_1^{2s-2}, & \text{если} \quad s \in [1,\infty). \end{cases}$$

Полагая в (2.13) $s = 1/2,\ s = p,\ s = 0$ и в (2.14) $s = p$, для всех $\lambda \in \Gamma_\alpha,\ \alpha \in (0,\alpha_0]$ получаем

$$\begin{aligned}
&\Big\|R\big(\lambda, F'^*(x_n)\,F'(x_n)\big)\,F'^*(x_n)\Big\|_{L(X_2,X_1)} = \Big\|F'(x_n)\,R\big(\bar\lambda, F'^*(x_n)\,F'(x_n)\big)\Big\|_{L(X_1,X_2)} = \\
&\quad = \Big\|R\big(\lambda, F'^*(x_n)\,F'(x_n)\big)\,\big(F'^*(x_n)\,F'(x_n)\big)^{1/2}\Big\|_{L(X_1,X_1)} \le \frac{c_0}{\sqrt{|\lambda|}},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\Big\|R\big(\lambda, F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)\,\big(F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)^p\Big\|_{L(X_1,X_1)} \le \frac{M(p)}{|\lambda|^{1-\min\{p,1\}}}, \tag{2.16}$$

$$\Big\|R\big(\lambda, F'^*(x_n)\,F'(x_n)\big)\Big\|_{L(X_1,X_1)} \le \frac{c_1}{|\lambda|}, \tag{2.17}$$

$$\Big\|F'(x^*)\,R\big(\lambda, F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)\,\big(F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)^p\Big\|_{L(X_1,X_2)} \le M(p). \tag{2.18}$$

Всюду в работе $c_0, c_1, \ldots$ обозначают положительные абсолютные константы, $\bar z$ — число, комплексно сопряженное для $z \in \mathbf{C}$.

На основании (2.8), (2.12) и (2.15)–(2.18), из (2.11) получаем

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(R\big(\lambda, F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'^*(x_n)\,F'(x_n)\big)\Big)\,\big(F'^*(x^*)\,F'(x^*)\big)^p\Big\|_{L(X_1,X_1)} \le \\
&\quad \le c_2 M(p) N_2 \|x_n - x^*\|_{X_1} \left(\frac{1}{|\lambda|^{3/2-\min\{p,1\}}} + \frac{1}{|\lambda|}\right) \le \frac{c_2 M(p) N(p) N_2 \|x_n - x^*\|_{X_1}}{|\lambda|},
\end{aligned}$$

где

$$N(p)=\begin{cases}\sqrt{M_0}+1, & \text{если}\quad p\geq 1;\\ M_0^{p-1/2}+1, & \text{если}\quad p\in[1/2,1).\end{cases}$$

Поэтому оценки (2.10) и (2.11) дают

$$\begin{gathered}\Big\|\Big[\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha_n\big)F'^*(x^*)F'(x^*)-\Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n),\alpha_n\big)F'^*(x_n)F'(x_n)\Big]\times\\ \times\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v\Big\|_{X_1}\leq c_3M(p)N(p)N_2\|v\|_{X_1}\|x_n-x^*\|_{X_1}\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda-1\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|.\end{gathered}\tag{2.19}$$

В связи с полученной оценкой предположим, что порождающая функция $\Theta(\lambda,\alpha)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию.

Условие 2.5. Справедливо соотношение

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]}\int\limits_{\Gamma_\alpha}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha)\lambda-1\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|<\infty.$$

При выполнении условия 2.5 имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda-1\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\leq c_4,\quad n=0,1,\ldots.$$

Следовательно, в силу (2.19)

$$\begin{gathered}\Big\|\Big[\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha_n\big)F'^*(x^*)F'(x^*)-\Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n),\alpha_n\big)F'^*(x_n)F'(x_n)\Big]\times\\ \times\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p v\Big\|_{X_1}\leq c_5M(p)N(p)N_2\|v\|_{X_1}\|x_n-x^*\|_{X_1}.\end{gathered}\tag{2.20}$$

Объединяя соотношения (2.7) и (2.20), окончательно получаем

$$\|x_{n+1}-x^*\|_{X_1}\leq\frac{C_0N_2}{\sqrt{\alpha_n}}\|x_n-x^*\|_{X_1}^2+g(p)\alpha_n^p\|v\|_{X_1}+c_5M(p)N(p)N_2\|v\|_{X_1}\|x_n-x^*\|_{X_1}.\tag{2.21}$$

Из (2.21) по индукции приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* 2.1 – 2.5. *Предположим, что* $p\in[1/2,p_0]$, *имеет место представление (2.3) и*

$$\|x_0-x^*\|_{X_1}\leq l\alpha_0^p,\tag{2.22}$$

где

$$0<l\leq\min\Big\{\frac{1}{2r^pC_0N_2\alpha_0^{p-1/2}},\frac{R}{\alpha_0^p}\Big\},\tag{2.23}$$

$$\|v\|_{X_1}\leq d=\min\Big\{\frac{1}{4r^pc_5M(p)N(p)N_2},\frac{l}{4r^pg(p)}\Big\}.\tag{2.24}$$

Тогда выполняется оценка (2.4).

Замечание 2.2. В силу (2.22) – (2.24) постоянные $d=d(p)$ и $l=l(p)$ отделены от нуля для значений $p\geq 1/2$, содержащихся в любом ограниченном интервале.

Перейдем теперь к случаю, когда исходный оператор F в (1.1) доступен лишь приближенно. Предположим, что вместо F доступно его приближение $\tilde F$, дважды дифференцируемое по Гато, причем производные $\tilde F'(x)$ и $\tilde F''(x)$ удовлетворяют условиям (2.1). Кроме того предполагается выполненной оценка погрешности приближения

$$\big\|\tilde F(x^*)\big\|_{X_2}\leq\delta,\quad \|\tilde F'(x)-F'(x)\|_{L(X_1,X_2)}\leq\delta\quad\forall x\in\Omega_R.$$

В этом случае для начального приближения $x_0 \in \Omega_R$ определим итерационный процесс

$$x_{n+1} = \xi - \Theta\big(\tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}'(x_n), \alpha_n\big)\, \tilde{F}'^*(x_n)\,\big(\tilde{F}(x_n) - \tilde{F}'(x_n)(x_n - \xi)\big). \tag{2.25}$$

Поскольку исходный оператор F недоступен, естественно предположить, что условие истокопредставимости (2.3) также выполняется приближенно. Поэтому будем считать, что начальная невязка $x^* - \xi$ допускает представление

$$x^* - \xi = \big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^p \tilde{v} + \tilde{w}, \quad p \geq 1/2, \tag{2.26}$$

где $\tilde{v}, \tilde{w} \in X_1$ и $\|\tilde{w}\|_{X_1} \leq \Delta$. Рассуждения, подобные приведенным выше, позволяют получить оценку

$$\|x_{n+1} - x^*\|_{X_1} \leq \frac{C_0 N_2}{\sqrt{\alpha_n}} \|x_n - x^*\|^2_{X_1} + g(p)\alpha_n^p \|\tilde{v}\|_{X_1} +$$

$$+ c_6 \|\tilde{v}\|_{X_1} \|x_n - x^*\|_{X_1} + c_7\Big(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha_n}} + \Delta\Big).$$

Непосредственным следствием этой оценки является

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* 2.1–2.5. *Предположим, что имеет место представление* (2.26) *при* $p \in [1/2, p_0]$ *и*

$$\|x_0 - x^*\|_{X_1} \leq \tilde{l}\alpha_0^p, \tag{2.27}$$

где

$$0 < \tilde{l} \leq \min\Big\{\frac{1}{4r^p C_0 N_2 \alpha_0^{p-1/2}}, \frac{R}{\alpha_0^p}\Big\}, \quad \|v\|_{X_1} \leq \tilde{d} = \min\Big\{\frac{\tilde{l}}{4r^p g(p)}, \frac{1}{4r^p c_6}\Big\}.$$

Тогда для любого $0 < d < (4r^p c_7)^{-1}\tilde{l}$ *выполняется*

$$\|x_n - x^*\|_{X_1} \leq \tilde{l}\alpha_n^p, \quad n = 0, 1, \dots, N(\delta, \Delta),$$

$$N(\delta, \Delta) = \max\Big\{n = 0, 1, \dots : \frac{\delta}{\alpha_n^{p+1/2}} + \frac{\Delta}{\alpha_n^p} \leq d\Big\}. \tag{2.28}$$

Следствие 2.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.2. *Тогда*

$$\|x_{N(\delta,\Delta)} - x^*\|_{X_1} \leq r^p \tilde{l}\Big(\frac{\delta + \sqrt{\alpha_{N(\delta,\Delta)}}\Delta}{d}\Big)^{\frac{2p}{2p+1}}. \tag{2.29}$$

Неравенство (2.29) непосредственно следует из (2.28). Из (2.29) получаем

$$\lim_{(\delta,\Delta)\to 0} \|x_{N(\delta,\Delta)} - x^*\|_{X_1} = 0.$$

Последнее соотношение означает, что отображение $\Re_{\alpha(\delta,\Delta)}$, ставящее в соответствие приближенному оператору $\tilde{F}$ элемент $x_{N(\delta,\Delta)}$, определяет регуляризующий алгоритм для уравнения (1.1), если выполняются условия теоремы 2.2. Условия (2.22), (2.27) означают, что начальное приближение x_0 в процессах (2.2), (2.25) должно быть достаточно близко к решению x^*.

В заключение этого раздела приведем примеры порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$, удовлетворяющих условиям 2.2, 2.3 и 2.5. Для проверки условия 2.5 определим контуры $\Gamma_\alpha, \alpha \in (0, \alpha_0]$ следующим образом (см. [5, с. 52]):

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^{(1)} \cup \Gamma_\alpha^{(2)+} \cup \Gamma_\alpha^{(2)-} \cup \Gamma_\alpha^{(3)}, \tag{2.30}$$

где

$$\Gamma_\alpha^{(1)} = \big\{\lambda : |\lambda| = \alpha/2,\ |\arg\lambda| \geq \varphi_0\big\}, \quad \varphi_0 \in (0, \pi/2),$$

$$\Gamma_\alpha^{(2)\pm} = \big\{\lambda : \lambda = \rho\exp(\pm i\varphi_0),\ \alpha/2 \leq \rho \leq \rho_0\big\}, \quad \rho_0 > N_1^2,$$

$$\Gamma_\alpha^{(3)} = \big\{\lambda : |\lambda| = \rho_0,\ |\arg\lambda| \leq \varphi_0\big\}.$$

Для семейства $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0]}$, определенного в (2.30), неравенство (2.8) очевидно, оценка (2.9) следует из теоремы косинусов для треугольника $O\lambda\mu$, поэтому условие 2.4 выполнено. Обратимся теперь к примерам порождающих функций (ср. с примерами 2.1, 2.2, 2.4 и 2.5 из [1]). Непосредственные вычисления показывают, что все приведенные ниже функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ удовлетворяют условию 2.5 для семейства контуров (2.30).

Пример 2.1. Рассмотрим порождающую функцию метода М. М. Лаврентьева

$$\Theta(\lambda,\alpha)=\frac{1}{\lambda+\alpha},\quad \alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{2.31}$$

В этом случае основной итерационный процесс (2.2) принимает вид

$$\big(F'^*(x_n)F'(x_n)+\alpha_n E\big)(x_{n+1}-\xi)=F'^*(x_n)\,\big(F'(x_n)(x_n-\xi)-F(x_n)\big).$$

Заметим, что условие 2.3 выполняется при $p_0=1$ [1].

Пример 2.2. Функция (2.31) содержится при $N=1$ в следующем семействе порождающих функций:

$$\Theta(\lambda,\alpha)=\frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\right)^N\right],\quad N=1,2,\dots. \tag{2.32}$$

Напомним, что функция (2.32) порождает так называемый итерированный метод М. М. Лаврентьева решения линейных некорректных операторных уравнений. Шаг метода (2.2), (2.32) может быть реализован в виде конечного итерационного процесса: $x_{n+1}=x_{n+1}^{(N)}$, где $x_{n+1}^{(0)}=\xi$ и $\left\{x_{n+1}^{(k)}\right\}$ является решением линейного корректного уравнения

$$\big(F'^*(x_n)F'(x_n)+\alpha_n E\big)\,x_{n+1}^{(k+1)}=\alpha_n x_{n+1}^{(k)}+F'^*(x_n)\big(F'(x_n)x_n-F(x_n)\big),\quad k=0,1,\dots,N-1.$$

В этом случае условие 2.3 выполняется при $p_0=N$.

Пример 2.3. Рассмотрим функцию

$$\Theta(\lambda,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda/\alpha}\right), & \lambda\neq 0,\\[2mm] \dfrac{1}{\alpha}, & \lambda=0,\end{cases} \tag{2.33}$$

аналитическую на всей комплексной плоскости. Итерация метода (2.2), (2.33) может быть реализована следующим образом: $x_{n+1}=u(\alpha_n^{-1})$, где $u=u(t)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt}+F'^*(x_n)F'(x_n)u(t)=F'^*(x_n)\,\big(F'(x_n)x_n-F(x_n)\big),\quad u(0)=\xi.$$

Пример 2.4. Пусть

$$\Theta(\lambda,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\big[1-(1-\mu_0\lambda)^{1/\alpha}\big], & \lambda\neq 0,\\[2mm] \dfrac{\mu_0}{\alpha}, & \lambda=0\end{cases} \tag{2.34}$$

при $\mu_0>0$. Параметр регуляризации $\alpha=\alpha_n$ принимает значения $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\dots$. Итерация метода (2.2), (2.34) имеет следующий вид: $x_{n+1}=x_{n+1}^{(n)}$, где $x_{n+1}^{(0)}=\xi$ и $\left\{x_{n+1}^{(k)}\right\}$ строится итеративно:

$$x_{n+1}^{(k+1)}=\big(E-\mu_0F'^*(x_n)F'(x_n)\big)\,x_{n+1}^{(k)}-F'^*(x_n)\,\big(F'(x_n)x_n-F(x_n)\big),\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Отметим, что функции (2.33) и (2.34) удовлетворяют условию 2.3 при $p_0=\infty$.

3. Необходимые условия сходимости итеративных методов решения нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве. В этом разделе покажем, что при выполнении подходящих условий на порождающую функцию $\Theta(\lambda,\alpha)$ истокообразное представление (2.3) близко к необходимому для справедливости оценки (2.4). Более точно, будет показано, что оценка

$$\|x_n-x^*\|_{X_1}\le C_1\alpha_n^p,\quad n=0,1,\dots\quad (C_1>0,\ \ p>1/2) \tag{3.1}$$

влечет включение $x^*-\xi\in R\Big(\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p-\varepsilon}\Big)$ для любого $\varepsilon\in(0,p)$ (ср. с теоремами 3.1 и 3.2 из [1]).

Итак, предположим, что выполняются оценка (3.1), соотношения (2.1), условия 2.1, 2.2 и 2.4. Не умаляя общности рассуждений, можем считать, что $C_1\alpha_0^p\le R$, и значит, $x_n\in\Omega_R, n=0,1,\dots$. Из (2.5), (2.6) и (3.1) получаем

$$\Big\|\Big[E-\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha_n\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big]\,(x^*-\xi)\Big\|_{X_1}\le C_1\alpha_{n+1}^p+C_0\,C_1^2N_2\,\alpha_n^{2p-1/2}+$$
$$+\Big\|\Big[\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha_n\big)F'^*(x^*)F'(x^*)-\Theta(F'^*(x_n)F'(x_n),\alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)\Big](x^*-\xi)\Big\|_{X_1}\le \tag{3.2}$$
$$\le c_8\,\alpha_n^p+c_9\Big\|\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha_n\big)F'^*(x^*)F'(x^*)-\Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n),\alpha_n\big)F'^*(x_n)F'(x_n)\Big\|_{L(X_1,X_1)}.$$

В силу неравенств (2.10) – (2.12) (при $p=0$), (2.15) и (2.16) для последней нормы в (3.2) имеем оценку

$$\Big\|\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha_n\big)F'^*(x^*)F'(x^*)-\Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n),\alpha_n\big)F'^*(x_n)F'(x_n)\Big\|_{L(X_1,X_1)}\le$$
$$\le c_{10}\,\alpha_n^p\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda-1\big|}{|\lambda|^{3/2}}\,|d\lambda|,\quad n=0,1,\dots\,. \tag{3.3}$$

В дальнейшем будем предполагать выполненным следующее обобщение условия 2.5.

Условие 3.1. Для любого $s\in(0,3/2]$

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]}\ \alpha^{s-1}\int\limits_{\Gamma_\alpha}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha)\lambda-1\big|}{|\lambda|^s}\,|d\lambda|<\infty. \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) получаем

$$\Big\|\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha_n\big)F'^*(x^*)F'(x^*)-\Theta\big(F'^*(x_n)F'(x_n),\alpha_n\big)F'^*(x_n)F'(x_n)\Big\|_{L(X_1,X_1)}\le c_{11}\alpha_n^{p-1/2}. \tag{3.5}$$

Для произвольного $\alpha\in(0,\alpha_0]$ обозначим

$$\Phi(\alpha)=\Big\|\Big[E-\Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big]\,(x^*-\xi)\Big\|_{X_1}. \tag{3.6}$$

Из (3.2), (3.5) и (3.6) следует

$$\Phi(\alpha_n)\le c_{12}\,\alpha_n^{p-1/2}. \tag{3.7}$$

Анализ оценки (3.7) продолжим, считая выполненным следующее условие.

Условие 3.2. Для каждого $\lambda\in[0,N_1^2]$ функция $\eta(\lambda,\alpha)=\big|\Theta(\lambda,\alpha)\lambda-1\big|$ является неубывающей при $\alpha\in(0,\alpha_0]$.

Пусть E_λ, $\lambda\in[0,N_1^2]$ — семейство спектральных проекторов оператора $F'^*(x^*)F'(x^*)$. В силу условия 3.2

$$\Phi(\alpha)=\left(\int\limits_0^{N_1^2}\eta(\lambda,\alpha)^2d\big\|E_\lambda(x^*-\xi)\big\|_{X_1}^2\right)^{1/2}$$

есть неубывающая на промежутке $\alpha\in(0,\alpha_0]$ функция. Согласно (3.7), для всех $\alpha\in(\alpha_{n+1},\alpha_n]$, $n=0,1,\dots$ выполняется

$$\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^{p-1/2}}\le\frac{\Phi(\alpha_n)}{\alpha^{p-1/2}}\le\frac{c_{12}\,\alpha_n^{p-1/2}}{\alpha_{n+1}^{p-1/2}}\le c_{12}\,r^{p-1/2}<\infty.$$

Следовательно,

$$\Phi(\alpha)\le c_{12}\,r^{p-1/2}\alpha^{p-1/2}\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{3.8}$$

Теорема 3.1 работы [1] в силу (3.8) влечет включение

$$x^*-\xi\in R\Big(\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p-1/2-\varepsilon_1}\Big)\quad\forall\varepsilon_1\in(0,p-1/2]. \tag{3.9}$$

Отметим, что тот же результат может быть получен с использованием вместо условия 3.1 из упомянутой теоремы условия 2.2 (подробности см. в [7, с. 82]). Поэтому, для обоснования (3.9) обратимся к условию 2.2, которое мы уже использовали в предыдущих рассуждениях. Обозначим $p_1 = p - 1/2 - \varepsilon_1$. Вследствие (3.9) существует элемент $v^{(0)} \in X_1$, такой, что

$$x^* - \xi = \big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p_1} v^{(0)}. \tag{3.10}$$

Полученное представление может быть использовано вновь для оценки величины $\Phi(\alpha_n)$. Подставляя (3.10) в (3.2), вместо (3.7) будем иметь

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha_n) = \Big\| \Big[E - \Theta\big(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n\big)F'^*(x^*)F'(x^*)\Big]\,(x^* - \xi)\Big\|_{X_1} \le c_{13}\Bigg(\alpha_n^p + \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|\Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda - 1\big| \times \\ \times \Big\|\Big(R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'^*(x_n)F'(x_n)\big)\Big)\,\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p_1}\Big\|_{L(X_1,X_1)} |d\lambda|\Bigg).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Аналогично (2.11),

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'^*(x_n)F'(x_n)\big)\Big)\,\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p_1}\Big\|_{L(X_1,X_1)} \le \\ \le \Big\|R\big(\lambda, F'^*(x_n)F'(x_n)\big)F'^*(x_n)\Big\|_{L(X_2,X_1)} \big\|F'(x^*) - F'(x_n)\big\|_{L(X_1,X_2)} \times \\ \times \Big\|R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big)\,\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p_1}\Big\|_{L(X_1,X_1)} + \\ + \Big\|R\big(\lambda, F'^*(x_n)F'(x_n)\big)\Big\|_{L(X_1,X_1)} \big\|F'^*(x^*) - F'^*(x_n)\big\|_{L(X_2,X_1)} \times \\ \times \Big\|F'(x^*)R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big)\,\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p_1}\Big\|_{L(X_1,X_2)}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Из (2.1) и (3.1) получаем

$$\big\|F'^*(x^*) - F'^*(x_n)\big\|_{L(X_2,X_1)} = \big\|F'(x^*) - F'(x_n)\big\|_{L(X_1,X_2)} \le c_{14}\alpha_n^p. \tag{3.13}$$

Полагая в (2.13) и (2.14) $s = p_1$, находим

$$\Big\|R\big(\lambda, F'^*(x)F'(x)\big)\,\big(F'^*(x)F'(x)\big)^{p_1}\Big\|_{L(X_1,X_1)} \le \frac{c_{15}}{|\lambda|^{1-\min\{p_1,1\}}}, \tag{3.14}$$

$$\Big\|F'(x)R\big(\lambda, F'^*(x)F'(x)\big)\,\big(F'^*(x)F'(x)\big)^{p_1}\Big\|_{L(X_1,X_2)} \le \frac{c_{15}}{|\lambda|^{1-\min\{p_1+1/2,1\}}} \quad \forall\lambda \in \Gamma_{\alpha_n}. \tag{3.15}$$

В силу (3.12) – (3.15) выполняется

$$\Big\|\Big(R\big(\lambda, F'^*(x^*)F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'^*(x_n)F'(x_n)\big)\Big)\,\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p_1}\Big\|_{L(X_1,X_1)} \le \frac{c_{16}\alpha_n^p}{|\lambda|^{2-\min\{p_1+1/2,1\}}}.$$

Поэтому из (3.11) для $n = 0, 1, \ldots$ имеем

$$\Phi(\alpha_n) \le c_{17}\alpha_n^p\Bigg(1 + \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \frac{\big|\Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda - 1\big|}{|\lambda|^{2-\min\{p_1+1/2,1\}}}\,|d\lambda|\Bigg). \tag{3.16}$$

Рассмотрим два возможных случая. При $p_1 \ge 1/2$ условие 3.1 и (3.16) дают $\Phi(\alpha_n) \le c_{18}\alpha_n^p$. Это означает, что

$$x^* - \xi = \big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p-\varepsilon_1} v^{(1)}, \quad v^{(1)} \in X_1 \tag{3.17}$$

для всех $\varepsilon_1 \in (0, p)$.

Пусть теперь $p_1 \in (0, 1/2)$. В этом случае в силу (3.16) имеем

$$\Phi(\alpha_n) \le c_{19}\,\alpha_n^{p-(1/2-p_1)}. \tag{3.18}$$

Следовательно, существует элемент $v^{(2)} \in X_1$ такой, что

$$x^* - \xi = \big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p-(1/2-p_1)-\varepsilon_2} v^{(2)} \tag{3.19}$$

для всех $\varepsilon_2 \in \big(0, p-(1/2-p_1)\big)$. Представлением (3.19) можно воспользоваться для уточнения оценки (3.18) путем подстановки (3.19) в (3.2). Продолжая процесс итерирования оценок для $\Phi(\alpha_n)$, получаем положительные последовательности $\{p_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$p_{k+1} = p - (1/2 - p_k) - \varepsilon_{k+1}, \quad \varepsilon_{k+1} \in \big(0, p - (1/2 - p_k)\big), \tag{3.20}$$

$$x^* - \xi = \big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p_{k+1}} v^{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть последовательность $\{\varepsilon_k\}$ выбрана так, что

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0, \quad \sup_k \varepsilon_k < p - 1/2. \tag{3.21}$$

Если на k-м шаге получаем $p_k \geq 1/2$, то представление (3.17) имеет место. Покажем, что неравенство $p_k \geq 1/2$ наверняка выполняется на некотором конечном шаге $k = k_0$. Предположим противное, т.е. что $p_k < p$ для всех номеров $k = 1, 2, \ldots$. Так как $p > 1/2$, на основании (3.20) и (3.21) заключаем, что $p_{k+1} > p_k$. Поэтому ограниченная последовательность $\{p_k\}$ имеет предел: $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \tilde{p} \leq p$. Переходя к пределу в обеих частях равенства (3.20), приходим к соотношению $p = 1/2$, противоречащему первоначальному предположению (см. (3.1)). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия* 2.1, 2.2, 2.3 *(при* $p = 0$*),* 2.4, 3.1, 3.2. *Если итеративный процесс* (2.2) *порождает последовательность* $\{x_n\}$*, для которой справедлива оценка* (3.1)*, то для каждого* $\varepsilon \in (0, p)$ *имеет место включение*

$$x^* - \xi \in R\Big(\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{p-\varepsilon}\Big).$$

4. Итеративные методы регуляризации нелинейных уравнений в банаховом пространстве. В этом разделе изучается класс итеративных методов

$$x_{n+1} = \xi - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)\,\big(F(x_n) - F'(x_n)(x_n - \xi)\big), \quad x_0 \in \Omega_R \tag{4.1}$$

решения некорректных операторных уравнений (1.1) при условии, что $X_1 = X_2 = X$ есть комплексные банаховы пространства. Будем предполагать, что оператор F обладает первой и второй производными Гато, а операторы $F'(x), F''(x)$ удовлетворяют неравенствам (2.1) при $X_1 = X_2 = X$. Пусть последовательность параметров регуляризации $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условию 2.1. Обозначим для простоты $L(X) = L(X, X)$.

Наша цель состоит в распространении результатов гильбертовой теории, развитой в разделах 2 и 3, на случай итераций (4.1) в банаховом пространстве X. Тогда представление (1.7), где $p \geq 1/2$, следует заменить равенством (1.8) при $p \geq 1$. Отметим, что в наиболее интересном случае, когда $0 \in \sigma(F'(x^*))$, степень $F'(x^*)^p$ может быть определена непосредственно соотношением (1.5) только при натуральном показателе p. Определение и свойства дробных степеней A^p $(p > 0)$ операторов $A \in L(X)$, для которых $0 \in \sigma(A)$, даны, например, в [13, гл.4; 14, гл. I]. Всюду в этом разделе мы рассматриваем уравнения (1.1) с оператором F, известным без погрешности. Если же F задан приближенно, то, следуя схеме раздела 2, нетрудно указать критерий останова итераций (4.1), преобразующий (4.1) в регуляризующий алгоритм для задачи (1.1).

Для обоснования процесса (4.1) покажем, что формула (1.5) применима к оператору $A = F'(x_n)$. Зафиксируем $R_0 > \|F'(x^*)\|_{L(X)}$ и для произвольных $r > 0$, $z \in \mathbf{C}$ и $\varphi \in (0, \pi)$ положим

$$K(\varphi) = \big\{\zeta \in \mathbf{C} : |\arg\zeta| \leq \varphi\big\}, \quad S_r(z) = \big\{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta - z| \leq r\big\}, \quad K(r, \varphi) = K(\varphi) \cap S_r(0).$$

Предположим, что оператор $F'(x^*)$ удовлетворяет следующему условию (ср. с условием 4.1 из [1]).

Условие 4.1. Существуют постоянные $\varphi_0 \in (0, \pi)$ и $C_2 > 0$, такие, что $\sigma(F'(x^*)) \subset K(R_0, \varphi_0)$ и

$$\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)} \leq \frac{C_2}{|\lambda|} \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C} \setminus K(R_0, \varphi_0). \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. Условие 4.1 выполняется с некоторым $\varphi_0 \in (0, \pi)$ в каждом из следующих случаев.

1) $F'(x^*)$ — аккретивный оператор в гильбертовом пространстве X, т.е.

$$\mathrm{Re}\big(F'(x^*)u,u\big)_X \geq 0 \quad \forall u \in X,$$

где $(\cdot,\cdot)_X$ есть скалярное произведение в X.

2) $F'(x^*)$ есть спектральный оператор скалярного типа, для которого $\sigma\big(F'(x^*)\big) \subset K(R_0,\psi_0)$ при $\psi_0 \in (0,\pi)$ [15, гл. XV, § 6].

3) $F'(x^*)$ удовлетворяет условию $\sigma\big(F'(x^*)\big) \subset K(R_0,\psi_0)$ при $\psi_0 \in (0,\pi)$, и для всех $t > 0$ выполняется неравенство (см. [13, гл. 4, § 14])

$$\Big\|R\big(-t,F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)} \leq \frac{c_{20}}{t}.$$

Кроме того, наложим на порождающую функцию $\Theta(\lambda,\alpha)$ следующее ограничение.

Условие 4.2. Для каждого $\alpha > 0$ функция $\Theta(\lambda,\alpha)$ аналитична по λ на открытом подмножестве $D_\alpha \subset \mathbf{C}$ и

$$D_\alpha \supset K_\alpha(R_0,C_3,\varphi_0),$$

где

$$K_\alpha(R_0,C_3,\varphi_0) = K(R_0,\varphi_0) \cup S_{\min\{R_0,C_3\alpha\}}(0)$$

и постоянная $C_3 \in (0,1)$.

Условия 4.1 и 4.2 позволяют определить функцию оператора $F'(x_n)$ в (4.1) в виде

$$\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \Theta(\lambda,\alpha_n)R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\,d\lambda \tag{4.3}$$

при подходящем положительно ориентированном контуре Γ_n. Для обоснования (4.3) напомним следующее известное предложение (см., например, [16, § 5.4]).

Лемма 4.1. *Пусть* $\lambda \in \rho(A)$, $A \in L(X)$ *и* $B \in L(X)$.

1) *Если* $\big\|BR(\lambda,A)\big\|_{L(X)} < 1$, *то* $\lambda \in \rho(A+B)$. *Кроме того, справедливо представление:*

$$R(\lambda,A+B) = R(\lambda,A)\sum_{k=0}^{\infty}\big(BR(\lambda,A)\big)^k. \tag{4.4}$$

2) *Если* $\big\|R(\lambda,A)B\big\|_{L(X)} < 1$, *то* $\lambda \in \rho(A+B)$ *и*

$$R(\lambda,A+B) = \sum_{k=0}^{\infty}\big(R(\lambda,A)B\big)^k R(\lambda,A). \tag{4.5}$$

Ряды в (4.3) *и* (4.5) *сходятся абсолютно в* $L(X)$.

Для подмножества $G \subset \mathbf{C}$ обозначим через $\mathrm{int\,G}$ и $\mathrm{fr}\,G = G \setminus \mathrm{int}\,G$ внутренность и границу G соответственно.

Лемма 4.2. *Пусть выполняются условия*

$$\|x_n - x^*\|_X \leq \frac{C_3\,\alpha_n\,\nu_0}{N_2\,C_2}, \quad \frac{C_3\,\alpha_0\,\nu_0}{N_2\,C_2} \leq R, \tag{4.6}$$

где $\nu_0 \in (0,1)$. *Тогда* $\sigma\big(F'(x_n)\big) \subset \mathrm{int}\,K_{\alpha_n}(R_0,C_3,\varphi_0)$.

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathrm{int}\,K_{\alpha_n}(R_0,C_3,\varphi_0)$ по построению $K_\alpha(R_0,C_3,\varphi_0)$ имеем $|\lambda| \geq C_3\alpha_n$. Заметим, что в силу (4.6) будет $x_n \in \Omega_R$. Полагая в (4.4) $A = F'(x^*)$ и $B = F'(x_n) - F'(x^*)$, используя (2.1) и (4.2), получаем

$$\big\|BR(\lambda,A)\big\|_{L(X)} \leq \big\|F'(x_n) - F'(x^*)\big\|_{L(X)}\,\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)} \leq \frac{N_2C_2\|x_n - x^*\|_X}{|\lambda|} \leq \nu_0.$$

Следовательно, $\lambda \in \rho\big(F'(x_n)\big)$. Лемма доказана.

Пусть $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in(0,\infty)}$ — семейство таких положительно ориентированных контуров, что $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$ и Γ_α окружает $\mathrm{int}\,K_\alpha(R_0,C_3,\varphi_0)$ для любого $\alpha > 0$. Предположим, кроме того, что Γ_α не содержит внутри точку $\lambda = -C_4\alpha$ при фиксированном $C_4 \in (C_3,1)$. Заметим, что такие семейства существуют в силу условий 4.1 и 4.2. Лемма 4.2 означает, что если выполняются неравенства (4.6), то при $\Gamma_n = \Gamma_{\alpha_n}$ имеет место (4.3).

Предположим, что начальная невязка $x^* - \xi$ допускает истокообразное представление

$$x^* - \xi = F'(x^*)^p v, \quad v \in X, \quad p \geq 1. \tag{4.7}$$

Напомним в этой связи необходимые понятия и результаты теории дробных степеней линейных операторов в банаховом пространстве.

Пусть $A \in L(X)$. Для показателей $p \in \{1, 2, \dots\}$ согласно обычному определению,

$$A^p \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{p \text{ раз}}.$$

Допустим теперь, что оператор $A \in L(X)$ удовлетворяет условию 4.1 (с заменой $F'(x^*)$ на A), и показатель $p \in (0, 1)$. Тогда степень A^p определяется равенством (см. [14, гл. I, § 5; 17])

$$A^p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin \pi p}{\pi} \int\limits_0^\infty t^{p-1}(tE + A)^{-1} A \, dt. \tag{4.8}$$

В силу (4.2) интеграл в (4.8) сходится в смысле Бохнера и представляет собой оператор $A^p \in L(X)$. Если $p \in (m, m+1)$ с $m \in \{1, 2, \dots\}$, то оператор A^p определяется следующим образом

$$A^p \stackrel{\text{def}}{=} A^{p-m} A^m \equiv A^m A^{p-m}.$$

Пусть оператор $A \in L(X)$ удовлетворяет условию 4.1. Обозначим $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$, $\varepsilon > 0$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$ и $p > 0$ степень A_ε^p может быть определена формулой (1.5) с $\varphi(\lambda) = \lambda^p$ при условии, что контур γ содержит внутри спектр $\sigma(A_\varepsilon) = \big\{\lambda + \varepsilon \colon \lambda \in \sigma(A)\big\}$ и не содержит точку $\lambda = 0$.

Лемма 4.3 ([14, гл. I, § 5]). *Пусть оператор $A \in L(X)$ удовлетворяет условию 4.1. Тогда для любого $p \in (0, 1)$*

$$\|A_\varepsilon^p - A^p\|_{L(X)} \leq c_{21}\, \varepsilon^p \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{4.9}$$

с постоянной c_{21}, зависящей только от A и p.

Наши дальнейшие построения имеют целью получение оценки

$$\|x_n - x^*\|_X \leq l\alpha_n^p \tag{4.10}$$

скорости сходимости итераций (4.1). Величина коэффициента l, а также необходимые ограничения на другие параметры процедуры (4.1) будут уточнены ниже по ходу наших рассуждений. Предположим, что оценка (4.10) выполняется на n-й итерации и $l\alpha_0^p \leq R$. Покажем, что неравенство (4.10) останется в силе и на $(n+1)$-м шаге. Из (4.10) и леммы 4.2 следует, что если

$$\frac{\alpha_0^{p-1} N_2\, C_2\, l}{C_3} \leq \nu_0, \quad l\alpha_0^p \leq R, \tag{4.11}$$

то при $\Gamma_n = \Gamma_{\alpha_n}$ имеет место представление (4.3). Допустим, что выполняются неравенства (4.11). В силу (4.1),

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* = -\Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)\, G(x_n) - \Big[E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)\, F'(x^*)\Big](x^* - \xi) - \\ - \Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)\, F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)\, F'(x_n)\Big](x^* - \xi), \end{aligned} \tag{4.12}$$

где

$$G(x_n) = F(x_n) + F'(x_n)(x^* - x_n).$$

Как и в разделе 2, из (2.1) следует

$$\big\|G(x_n)\big\|_X \leq N_2 \|x_n - x^*\|_X^2. \tag{4.13}$$

Используя (4.7) и (4.12), получаем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|_X \leq \Big\|\Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)\Big\|_{L(X)} \big\|G(x_n)\big\|_X + \Big\|\Big[E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big) F'(x^*)\Big] F'(x^*)^p v\Big\|_X + \\ + \Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big) F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big) F'(x_n)\Big] F'(x^*)^p v\Big\|_X. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ввиду (4.3),

$$\Big\|\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)\Big\|_{L(X)} \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|\Theta(\lambda,\alpha_n)\big|\,\Big\|R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\Big\|_{L(X)}\,|d\lambda|.$$

В силу (2.1), (4.2) и (4.11),

$$\big\|F'(x_n)-F'(x^*)\big\|_{L(X)}\,\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)} \le \nu_0 < 1. \tag{4.15}$$

Из леммы 4.1 следует, что для любого $\lambda\in\Gamma_{\alpha_n}$

$$\Big\|R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\Big\|_{L(X)} \le \Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)}\sum_{k=0}^{\infty}\bigg(\big\|F'(x_n)-F'(x^*)\big\|_{L(X)}\,\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)}\bigg)^k. \tag{4.16}$$

Используя (4.2), (4.15) и (4.16), получаем

$$\Big\|R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\Big\|_{L(X)} \le \frac{C_2}{(1-\nu_0)|\lambda|}\quad \forall\lambda\in\Gamma_{\alpha_n}.$$

Следовательно,

$$\Big\|\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)\Big\|_{L(X)} \le \frac{C_2}{2\pi(1-\nu_0)}\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha_n)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|. \tag{4.17}$$

Примем далее следующее предположение.

Условие 4.3.

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]}\Bigg(\alpha\int\limits_{\Gamma_\alpha}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\Bigg) < \infty. \tag{4.18}$$

Используя (4.18), получаем $\displaystyle\int\limits_{\Gamma_\alpha}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \le \frac{c_{22}}{\alpha_n}$, $n=0,1,\ldots$. Из (4.10), (4.13) и (4.17) для первого слагаемого в правой части (4.14) находим

$$\Big\|\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)\Big\|_{L(X)}\,\big\|G(x_n)\big\|_X \le c_{23}\,l^2\,\alpha_n^p. \tag{4.19}$$

Пусть $m=[p]$ и $\mu=\{p\}$ $\big(\{p\}=p-[p]\big)$ есть целая и дробная части p соответственно. Для второго слагаемого в (4.14) запишем

$$\begin{aligned}
&\bigg\|\Big[E-\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big]F'(x^*)^p v\bigg\|_X \le \\
&\quad\bigg\|\Big[E-\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big]F'(x^*)^m\big(F'(x^*)+C_4\alpha_n E\big)^\mu v\bigg\|_X + \\
&\quad+\bigg\|\Big[E-\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big]F'(x^*)^m\Big[\big(F'(x^*)+C_4\alpha_n E\big)^\mu - F'(x^*)^\mu\Big]v\bigg\|_X.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

В связи с (4.20) наложим на $\Theta(\lambda,\alpha)$ следующее дополнительное ограничение.

Условие 4.4. Для всех $\alpha\in(0,\alpha_0]$ и $\tau\in\{0\}\cup[1,p_0]$

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}\big|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big|\,|\lambda|^{\tau-1}|\,d\lambda| \le c_{24}\,\alpha^\tau \tag{4.21}$$

с постоянной c_{24}, зависящей только от p_0.

Пусть $p\in[1,p_0]$ и контур Γ_α таков, что точка $\lambda=-C_4\alpha_n$ лежит вне Γ_{α_n}. Тогда на основании (1.5) имеем

$$\Big[E-\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big]F'(x^*)^m\big(F'(x^*)+C_4\alpha_n E\big)^\mu =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}}\big(1-\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda\big)\,\lambda^m(\lambda+C_4\alpha_n)^\mu R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\,d\lambda.$$

В силу (4.2), (4.21) и неравенства $|\lambda| \geq C_3\alpha_n \ \forall\lambda \in \Gamma_{\alpha_n}$ выполняется

$$\begin{aligned}
&\Big\| \Big[E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big] F'(x^*)^m \big(F'(x^*) + C_4\alpha_n E\big)^\mu v \Big\|_X \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\|v\|_X \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda\big| \, |\lambda|^m \, |\lambda + C_4\alpha_n|^\mu \, \Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)} |d\lambda| \leq \\
&\leq \frac{C_2}{2\pi}\|v\|_X \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda\big| \, |\lambda|^{m-1} \big(|\lambda|^\mu + (C_4\alpha_n)^\mu\big) \, |d\lambda| \leq \\
&\leq c_{25}\|v\|_X \alpha_n^p.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Поскольку $m \in [1, p_0]$, соотношения (4.9) и (4.21) при $\tau = m$ дают

$$\begin{aligned}
&\Big\| \Big[E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big] F'(x^*)^m \Big[\big(F'(x^*) + C_4\alpha_n E\big)^\mu - F'(x^*)^\mu\Big] v \Big\|_X \leq \\
&\leq c_{21}(C_4\alpha_n)^\mu \|v\|_X \Big\| \Big[E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big] F'(x^*)^m \Big\|_{L(X)} \leq c_{26}\|v\|_X \alpha_n^p.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Сопоставляя неравенства (4.20), (4.22) и (4.23), получаем

$$\Big\| \Big[E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big] F'(x^*)^p v \Big\|_X \leq c_{27}\|v\|_X \alpha_n^p. \tag{4.24}$$

Для третьего слагаемого в (4.14) имеем оценку

$$\begin{aligned}
&\Big\| \Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big] F'(x^*)^p v \Big\|_X \leq \\
&\leq \Big\| \Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big] F'(x^*)^m \big(F'(x^*) + C_4\alpha_n E\big)^\mu v \Big\|_X + \\
&+ \Big\| \Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big] F'(x^*)^m \times \\
&\times \Big[\big(F'(x^*) + C_4\alpha_n E\big)^\mu - F'(x^*)^\mu\Big] v \Big\|_X.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Из (4.2) и (4.3) следует

$$\begin{aligned}
&\Big\| \Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big] F'(x^*)^m \big(F'(x^*) + C_4\alpha_n E\big)^\mu v \Big\|_X \leq \\
&\leq \Big\| \Big[\Big(E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big) - \Big(E - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big)\Big] F'(x^*)^m \Big\|_{L(X)} \times \\
&\times \Big\| \big(F'(x^*) + C_4\alpha_n E\big)^\mu \Big\|_{L(X)} \|v\|_X \leq \frac{1}{2\pi} \Big\| \big(F'(x^*) + C_4\alpha_n E\big)^\mu \Big\|_{L(X)} \|v\|_X \times \\
&\times \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda\big| \, \Big\| \Big[R\big(\lambda, F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'(x_n)\big)\Big] F'(x^*)^m \Big\|_{L(X)} |d\lambda|.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

В силу (4.9)

$$\Big\| \big(F'(x^*) + C_4\,\alpha_n E\big)^\mu \Big\|_{L(X)} \leq \big\| F'(x^*)^\mu \big\|_{L(X)} + c_{21}(C_4\alpha_0)^\mu. \tag{4.27}$$

Соотношения (4.5), (4.10) и (4.16) означают, что для всех $\lambda \in \Gamma_{\alpha_n}$

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big[R\big(\lambda, F'(x^*)\big)-R\big(\lambda, F'(x_n)\big)\Big]F'(x^*)^m\Big\|_{L(X)} \le \\
&\le \frac{\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)}\big\|F'(x_n)-F'(x^*)\big\|_{L(X)}}{1-\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)}\big\|F'(x_n)-F'(x^*)\big\|_{L(X)}}\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)F'(x^*)^m\Big\|_{L(X)} \le \\
&\le \frac{C_2N_2}{(1-\nu_0)|\lambda|}\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)F'(x^*)^m\Big\|_{L(X)}\, l\alpha_n^p.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Поскольку $m \ge 1$, неравенство

$$R\big(\lambda, F'(x^*)\big)F'(x^*) = -E + \lambda R\big(\lambda, F'(x^*)\big)$$

и (4.2) дают

$$\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)F'(x^*)^m\Big\|_{L(X)} \le (1+C_2)\,\big\|F'(x^*)\big\|_{L(X)}^{m-1}. \tag{4.29}$$

Из (4.21) и (4.26)–(4.29) получаем

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big]F'(x^*)^m\big(F'(x^*)+C_4\alpha_n E\big)^\mu v\Big\|_X \le \\
&\le \frac{C_2(1+C_2)N_2}{2\pi(1-\nu_0)}\Big(\big\|F'(x^*)^\mu\big\|_{L(X)} + c_{21}(C_4\alpha_n)^\mu\Big)\,\big\|F'(x^*)\big\|_{L(X)}^{m-1}\, l\,\|v\|_X\alpha_n^p \times \\
&\times \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \frac{\big|1-\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \le c_{28}\, l\,\|v\|_X\alpha_n^p.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Подобным же образом для второго слагаемого в (4.25) получаем

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big]\,F'(x^*)^m\,\Big[\big(F'(x^*)+C_4\alpha_n E\big)^\mu - F'(x^*)^\mu\Big]v\Big\|_X \le \\
&\le c_{29}\, l\,\|v\|_X\alpha_n^p.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Объединяя оценки (4.14), (4.19), (4.24), (4.25), (4.30) и (4.31), получаем

$$\|x_{n+1}-x^*\|_X \le \big(c_{23}\, l^2 + c_{27}\,\|v\|_X + c_{30}\, l\,\|v\|_X\big)\,\alpha_n^p \tag{4.32}$$

В силу (4.32) и условия 2.1,

$$\|x_{n+1}-x^*\|_X \le \big(c_{23}\, l\, r^p + c_{27}\, l^{-1}\|v\|_X r^p + c_{30}\,\|v\|_X r^p\big)\, l\,\alpha_{n+1}^p. \tag{4.33}$$

Используя (4.10), (4.11) и (4.33), по индукции приходим к следующему результату о сходимости итераций (4.1).

Теорема 4.1. *Пусть выполняются неравенства* (4.11), *условия* 2.1 *и* 4.1–4.4. *Предположим, что невязка* $x^*-\xi$ *допускает истокообразное представление* (4.7) *при* $p\in[1,p_0]$. *Предположим также, что*

$$\|x_0-x^*\|_X \le l\,\alpha_0^p,$$

$$0 < l \le \min\Big\{\frac{1}{2r^pc_{23}}, \frac{R}{\alpha_0^p}\Big\}, \quad \|v\|_X \le d = \min\Big\{\frac{1}{4r^pc_{30}}, \frac{l}{4r^pc_{25}}\Big\}.$$

Тогда для любого $n=0,1,\ldots$ *справедлива оценка*

$$\|x_n-x^*\|_X \le l\,\alpha_n^p. \tag{4.34}$$

Следствие 4.1. *В условиях теоремы* 4.1

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\|_X = 0.$$

5. О необходимости истокообразного представления для оценок скорости сходимости итерационных методов. В этом разделе при соответствующих условиях на порождающую функцию $\Theta(\lambda,\alpha)$ будет показано, что представление (4.7) является почти необходимым для выполнения (4.34). Более точно, будет установлено, что оценка

$$\|x_n - x^*\|_X \le C_5\, \alpha_n^p, \quad n = 0,1,\dots \quad (p > 1) \tag{5.1}$$

с независящей от n константой C_5 влечет включение $x^* - \xi \in R\big(F'(x^*)^{p-\varepsilon}\big)$ для любого $\varepsilon \in (0,p)$ (ср. с теоремой 3.1).

Будем предполагать выполненными условия 2.1 и 4.1–4.4. Без потери общности можем считать, что условие (4.6) выполнено для всех номеров $n = 0,1,\dots$. Поэтому утверждение леммы 4.2 остается в силе, и представление (4.3) имеет место при $\Gamma_n = \Gamma_{\alpha_n}$, $n = 0,1,\dots$. Из равенства (4.12) следует

$$\begin{gathered}\Big\|\Big[E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big](x^*-\xi)\Big\|_X \le \|x_{n+1}-x^*\|_X + \Big\|\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)\Big\|_{L(X)}\,\big\|G(x_n)\big\|_X + \\ + \Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^*-\xi)\Big\|_X .\end{gathered} \tag{5.2}$$

В силу условия 2.1 и соотношений (4.13), (4.17), (4.18), (5.1) имеем

$$\|x_{n+1}-x^*\|_X + \Big\|\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)\Big\|_{L(X)}\,\big\|G(x_n)\big\|_X \le c_{31}\,\alpha_n^p. \tag{5.3}$$

Третье слагаемое в (5.2) оценим следующим образом

$$\begin{gathered}\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^*-\xi)\Big\|_X = \\ = \Big\|\Big[\Big(E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big) - \Big(E - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big)\Big](x^*-\xi)\Big\|_X \le \\ \le \frac{1}{2\pi}\,\|x^*-\xi\| \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda - 1\big|\,\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big) - R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\Big\|_{L(X)}\,|d\lambda|.\end{gathered} \tag{5.4}$$

Пользуясь (5.1) и неравенством $|\lambda| \ge C_3\alpha_n\ \forall\lambda\in\Gamma_{\alpha_n}$, как и в (4.28) (при $m=0$), для всех $\lambda\in\Gamma_{\alpha_n}$ получаем

$$\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big) - R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\Big\|_{L(X)} \le \frac{c_{32}\|x_n-x^*\|_X}{|\lambda|^2} \le \frac{c_{33}\,\alpha_n^{p-1}}{|\lambda|}. \tag{5.5}$$

Полагая в (4.21) $\tau = 0$, из (5.4) и (5.5) находим

$$\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^*-\xi)\Big\|_X \le c_{34}\,\alpha_n^{p-1}. \tag{5.6}$$

Для $\alpha > 0$ обозначим (ср. с (3.6))

$$y_\alpha = \Big[E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha\big)F'(x^*)\Big](x^*-\xi), \quad \Phi(\alpha) = \|y_\alpha\|_X. \tag{5.7}$$

Сопоставляя (5.2), (5.3), (5.6) и (5.7), приходим к следующему утверждению.

Лемма 5.1. *Пусть выполняется оценка* (5.1) *и условия* 2.1, 4.1 – 4.4. *Тогда*

$$\Phi(\alpha_n) \le c_{35}\,\alpha_n^{p-1}, \quad n = 0,1,\dots . \tag{5.8}$$

Ниже нам будет удобнее иметь дело с непрерывным параметром регуляризации $\alpha > 0$ вместо последовательности $\{\alpha_n\}$. Обозначим

$$\gamma_\alpha = \mathrm{fr}\, K_\alpha(R_0, C_3, \varphi_0), \quad \alpha > 0.$$

Из условия 4.2 следует, что оператор

$$\Theta\big(F'(x^*),\alpha\big)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\alpha}\Theta(\lambda,\alpha)R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\,d\lambda \tag{5.9}$$

корректно определен и является ограниченным для любого $\alpha>0$. Наложим на порождающую функцию $\Theta(\lambda,\alpha)$ ряд дальнейших ограничений.

Условие 5.1. Для любого $\alpha>0$, $1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\neq 0$ $\forall\lambda\in K_\alpha(R_0,C_3,\varphi_0)$. Для произвольных α, $\beta>0$ обозначим

$$\chi(\lambda,\alpha,\beta)=\frac{1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda}{1-\Theta(\lambda,\beta)\lambda},\quad \lambda\in\mathbf{C}.$$

Условие 5.2. Существует постоянная $r_0>0$ такая, что

$$\int\limits_{\gamma_{\alpha_{n+1}}}\frac{\big|\chi(\lambda,\alpha,\alpha_n)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\le c_{36}\big(1+|\ln\alpha_n|^{r_0}\big)\quad\forall\alpha\in(\alpha_{n+1},\alpha_n],\quad n=0,1,\ldots. \tag{5.10}$$

В силу условия 5.1 оператор $\chi\big(F'(x^*),\alpha,\beta\big)$ определен и является ограниченным для всех $\alpha,\beta>0$. Из (5.8) и (5.10) следует, что для любых $\alpha\in(\alpha_{n+1},\alpha_n]$ выполняется

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha)=\Big\|&\Big(E-\Theta\big(F'(x^*),\alpha\big)F'(x^*)\Big)\Big(E-\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big)^{-1}\times\\ &\times\Big(E-\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big)(x^*-\xi)\Big\|_X\le\Big\|\chi\big(F'(x^*),\alpha,\alpha_n\big)\Big\|_{L(X)}\Phi(\alpha_n)\le\\ &\le\frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha_n)\int\limits_{\gamma_{\alpha_{n+1}}}\big|\chi(\lambda,\alpha,\alpha_n)\big|\,\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)}|d\lambda|\le c_{37}\big(1+|\ln\alpha_n|^{r_0}\big)\alpha_n^{p-1}\end{aligned} \tag{5.11}$$

(см. [12, с. 456]). Пусть $\kappa\in(0,p-1)$. Из условия 2.1 и (5.11) для любых $\alpha\in(\alpha_{n+1},\alpha_n]$ получаем

$$\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^\kappa}=\frac{\Phi(\alpha)\alpha^{p-1-\kappa}}{\alpha^{p-1}}\le c_{37}\big(1+|\ln\alpha_n|^{r_0}\big)\alpha_n^{p-1-\kappa}\Big(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\Big)^{p-1}\le c_{38},$$

где c_{38} зависит от выбранного κ. Тем самым доказано следующее предложение.

Лемма 5.2. *Пусть выполняется оценка* (5.1) *и условия* 2.1, 4.1–4.4, 5.1, 5.2. *Тогда*

$$\Phi(\alpha)\le c_{38}\,\alpha^\kappa\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{5.12}$$

Наложим на функции $\Theta(\lambda,\alpha)$ два дополнительных условия.

Условие 5.3. Существует $s_0>0$ такое, что для всех $s\in(0,s_0]$

$$\sup_{\alpha\in[\alpha_0,\infty)}\Big(\alpha^{-s}\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha)\lambda-1\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\Big)<\infty. \tag{5.13}$$

Условие 5.4. Существует $\varepsilon_0>0$ такое, что функция $\Theta(\lambda,\alpha)$ непрерывна по λ, α на множестве

$$D(R_0,\varepsilon_0,C_3,\varphi_0)=\big\{(\lambda,\alpha):\ \ \lambda\in K_\alpha(R_0+\varepsilon_0,C_3,\varphi_0),\ \ \alpha>0\big\}.$$

Условие 5.4 обеспечивает непрерывность отображения $\alpha\to y_\alpha$ из $(0,\infty)$ в X. В силу (5.7), (5.9), (5.12) и (5.13), для всех q, $0<q<\min\{2\kappa/3,2s_0\}$, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty\alpha^{-\kappa-1+q}\|y_\alpha\|_X\,d\alpha&=\int\limits_0^{\alpha_0}\alpha^{-\kappa-1+q}\Phi(\alpha)\,d\alpha+\int\limits_{\alpha_0}^\infty\alpha^{-\kappa-1+q}\Phi(\alpha)\,d\alpha\le\\ &\le c_{38}\int\limits_0^{\alpha_0}\alpha^{-1+q}\,d\alpha+c_{39}\int\limits_{\alpha_0}^\infty\alpha^{-\kappa-1+3q/2}\Big(\alpha^{-q/2}\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha)\lambda-1\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\Big)d\alpha<\infty.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Следовательно, интеграл

$$w_q = \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} y_\alpha \, d\alpha \tag{5.15}$$

существует в смысле Бохнера и определяет элемент $w_q \in X$.

Ближайшая задача последующих рассуждений состоит в доказательстве того, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$\big(F'(x^*) + \varepsilon E\big)^{\kappa-q} w_q^{(\varepsilon)} = C(\kappa, q)\,(x^* - \xi), \tag{5.16}$$

где

$$w_q^{(\varepsilon)} = \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} \Big[E - \Theta\big(F'(x^*) + \varepsilon E, \alpha\big)\,\big(F'(x^*) + \varepsilon E\big)\Big](x^* - \xi)\, d\alpha \tag{5.17}$$

и $C(\kappa, q) \neq 0$. Для начала установим существование интеграла Бохнера

$$u_q^{(\varepsilon)} = \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} \Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha\big) F'(x^*) - \Theta\big(F'(x^*) + \varepsilon E, \alpha\big)\,\big(F'(x^*) + \varepsilon E\big)\Big](x^* - \xi)\, d\alpha \tag{5.18}$$

для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Из теоремы об отображении спектра [12, гл. XI, § 1] и условия 5.1 следует, что оператор $E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha\big) F'(x^*)$ непрерывно обратим для любого $\alpha > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} \Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha\big) F'(x^*) - \Theta\big(F'(x^*) + \varepsilon E, \alpha\big)\,\big(F'(x^*) + \varepsilon E\big)\Big](x^* - \xi)\, d\alpha = \\
&\qquad = \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} \Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha\big) F'(x^*) - \Theta\big(F'(x^*) + \varepsilon E, \alpha\big)\,\big(F'(x^*) + \varepsilon E\big)\Big] \times \\
&\qquad \times \Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha\big) F'(x^*)\Big)^{-1} \Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha\big) F'(x^*)\Big)\,(x^* - \xi)\, d\alpha = \\
&\qquad = \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} \psi\big(F'(x^*), \alpha, \varepsilon\big)\, y_\alpha \, d\alpha.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

В (5.19) использовано обозначение

$$\psi(\lambda, \alpha, \varepsilon) = \frac{\Theta(\lambda, \alpha)\lambda - \Theta(\lambda + \varepsilon, \alpha)(\lambda + \varepsilon)}{1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda}. \tag{5.20}$$

В силу (5.20) и условий 5.1, 5.4, функция $\psi(\lambda, \alpha, \varepsilon)$ непрерывна по λ, α на $D(R_0, 0, C_3, \varphi_0)$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Поэтому операторная функция $\psi\big(F'(x^*), \alpha, \varepsilon\big)$ непрерывна по α при $\alpha > 0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Для доказательства существования интегралов Бохнера в (5.18) и (5.19) достаточно установить сходимость интеграла Лебега в правой части оценки

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} \Big\|\psi\big(F'(x^*), \alpha, \varepsilon\big)\, y_\alpha\Big\|_X \, d\alpha \le \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} \Phi(\alpha) \Big\|\psi\big(F'(x^*), \alpha, \varepsilon\big)\Big\|_{L(X)} \, d\alpha. \tag{5.21}$$

Из (4.2) вытекает, что

$$\Big\|\psi\big(F'(x^*), \alpha, \varepsilon\big)\Big\|_{L(X)} \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\alpha} |\psi(\lambda, \alpha, \varepsilon)|\, \Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|_{L(X)} |d\lambda| \le c_{40} \int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{|\psi(\lambda, \alpha, \varepsilon)|}{|\lambda|} |d\lambda|.$$

Имея это в виду, пополним список условий на $\Theta(\lambda, \alpha)$ следующим предположением.

Условие 5.5. Существуют $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ и $t_0 > 0$, такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{|\psi(\lambda, \alpha, \varepsilon)|}{|\lambda|} |d\lambda| = M(\alpha, \varepsilon) < \infty \quad \forall \alpha > 0. \tag{5.22}$$

Кроме того, для всех $t \in (0, t_0]$

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]} \big(\alpha^t M(\alpha,\varepsilon)\big) + \sup_{\alpha\in[\alpha_0,\infty)} \big(\alpha^{-t} M(\alpha,\varepsilon)\big) < \infty, \tag{5.23}$$

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]} \Big(\alpha^t \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon\Big) + \sup_{\alpha\in[\alpha_0,\infty)} \Big(\alpha^{-t} \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon\Big) < \infty. \tag{5.24}$$

Из (5.12)–(5.14), (5.21) и (5.23) для всех q, $0 < q < \min\{2\kappa/3, 2s_0, 2t_0\}$, получаем

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q}\Phi(\alpha)\Big\|\psi\big(F'(x^*),\alpha,\varepsilon\big)\Big\|_{L(X)}\, d\alpha \le$$

$$\le c_{40}\Bigg(\int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-\kappa-1+q/2}\Phi(\alpha)\big(\alpha^{q/2}M(\alpha,\varepsilon)\big)\, d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-\kappa-1+3q/2}\Phi(\alpha)\big(\alpha^{-q/2}M(\alpha,\varepsilon)\big)\, d\alpha\Bigg) \le$$

$$\le c_{41}\Bigg(\int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-1+q/2}\, d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-\kappa-1+2q}\Big(\alpha^{-q/2}\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{\big|\Theta(\lambda,\alpha)\lambda-1\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\Big)\, d\alpha\Bigg) < \infty.$$

Поскольку $w_q^{(\varepsilon)} = u_q^{(\varepsilon)} + w_q$, интегралы в (5.17) и (5.18) существуют для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$.

Используя (5.13), (5.19), (5.22) и теорему Фубини, приходим к оценке

$$\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\big\|w_q^{(\varepsilon)} - w_q\big\|_X}{\varepsilon}\, d\varepsilon \le \int\limits_0^{\varepsilon_1} \varepsilon^{-1}\alpha^{-\kappa-1+q}\Phi(\alpha)\Big\|\psi\big(F'(x^*),\alpha,\varepsilon\big)\Big\|_{L(X)}\, d\alpha \le$$

$$\le c_{42}\Bigg(\int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-\kappa-1+q/2}\Phi(\alpha)\Big(\alpha^{\frac{q}{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon\Big)\, d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-\kappa-1+3q/2}\Phi(\alpha)\Big(\alpha^{-q/2}\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon\Big)\, d\alpha\Bigg)$$

для всех $q \in (0, q_0)$, где $q_0 = \min\{2\kappa/3, 2s_0, 2t_0\}$. Далее из (5.12) и (5.24) получаем

$$\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\big\|w_q^{(\varepsilon)} - w_q\big\|_X}{\varepsilon}\, d\varepsilon \leqslant c_{43}\Big(\int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-1+q/2}\, d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-\kappa-1+3q/2}\, d\alpha\Big) < \infty. \tag{5.25}$$

Полученные выше оценки приводят к следующему утверждению.

Лемма 5.3. *Пусть выполняются условия* 2.1, 4.1–4.4, 5.1 – 5.5 *и* $q \in (0, q_0)$. *Тогда существует последовательность* $\{\varepsilon_n\}$, *такая, что* $\varepsilon_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \big\|w_q^{(\varepsilon_n)} - w_q\big\|_X = 0.$$

Доказательство. Пусть, напротив, существуют $\omega_0 > 0$ и $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ такие, что

$$\big\|w_q^{(\varepsilon)} - w_q\big\|_X \ge \omega_0 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_2].$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\big\|w_q^{(\varepsilon)} - w_q\big\|_X}{\varepsilon}\, d\varepsilon \ge \int\limits_0^{\varepsilon_2} \frac{\omega_0}{\varepsilon}\, d\varepsilon = \infty,$$

что противоречит (5.25). Лемма доказана.

Обозначим $m = [\kappa - q]$. Выбрав $q > 0$ достаточно малым, получим $\kappa - q \in (m, m+1)$. Согласно (4.8)

$$\big(F'(x^*) + \varepsilon E\big)^{\kappa-q} w_q^{(\varepsilon)} = \frac{(-1)^m \sin\pi(\kappa-q)}{\pi}\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1}\big(F'(x^*) + (t+\varepsilon)E\big)^{-1}\big(F'(x^*) + \varepsilon E\big)^{m+1} w_q^{(\varepsilon)}\, dt.$$

Поэтому из (5.17) следует

$$\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon)}=\frac{(-1)^m\sin\pi(\kappa-q)}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1}\alpha^{-\kappa-1+q}\big(F'(x^*)+(t+\varepsilon)E\big)^{-1}\times$$
$$\times\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{m+1}\Big[E-\Theta\big(F'(x^*)+\varepsilon E,\alpha\big)\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)\Big](x^*-\xi)\,d\alpha\,dt. \tag{5.26}$$

Для положительных r,r_1,r_2 и $z,z_1,z_2\in\mathbf{C}$, таких, что $r_1\le r_2$, $z\ne 0$, $\arg z_1\le\arg z_2$, обозначим

$$\Gamma_r(z_1,z_2)=\big\{\zeta\in\mathbf{C}\colon |\zeta|=r,\arg z_1\le\arg\zeta\le\arg z_2\big\},\quad \Gamma_{(r_1,r_2)}(z)=\big\{\zeta\in\mathbf{C}\colon \arg\zeta=\arg z, r_1\le|\zeta|\le r_2\big\}.$$

Пусть $Z(\lambda,t,\alpha)=(t+\lambda)^{-1}\lambda^{m+1}\big(1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big)$. Для применения представления (1.5) к оператору

$$\big(F'(x^*)+(t+\varepsilon)E\big)^{-1}\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{m+1}\Big[E-\Theta\big(F'(x^*)+\varepsilon E,\alpha\big)\,\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)\Big]=Z\big(F'(x^*)+\varepsilon E,t,\alpha\big)$$

определим контур $\gamma\subset\mathbf{C}$ в виде $\gamma=\Gamma^{(\varepsilon)}$, где

$$\Gamma^{(\varepsilon)}=\Gamma_{\varepsilon/2}\big(e^{-i\varphi_0},e^{i\varphi_0}\big)\cup\Gamma_{R_0}\big(e^{-i\varphi_0},e^{i\varphi_0}\big)\cup\Gamma_{(\varepsilon/2,R_0)}\big(e^{i\varphi_0}\big)\cup\Gamma_{(\varepsilon/2,R_0)}\big(e^{-i\varphi_0}\big).$$

Очевидно, что $\Gamma^{(\varepsilon)}$ содержит внутри спектр $\sigma\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)=\Big\{\lambda+\varepsilon\colon\lambda\in\sigma\big(F'(x^*)\big)\Big\}$ и для всех $t,\alpha>0$ содержится в области аналитичности по λ функции $Z(\lambda,t,\alpha)$. Поэтому на основании (1.5) и (5.26) имеем

$$\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon)}=$$
$$=D(\kappa,q)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}}\alpha^{-\kappa-1+q}\,t^{\kappa-q-m-1}Z(\lambda,t,\alpha)R\big(\lambda,F'(x^*)+\varepsilon E\big)(x^*-\xi)\,d\lambda\,d\alpha\,dt, \tag{5.27}$$

где

$$D(\kappa,q)=\frac{(-1)^m\sin\pi(\kappa-q)}{2\pi^2 i}.$$

Поскольку для каждого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$

$$\sup_{\lambda\in\Gamma^{(\varepsilon)}}\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)+\varepsilon E\big)(x^*-\xi)\Big\|_X=E(\varepsilon)<\infty,$$

то выполняется

$$J=\int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}}\Big(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\alpha^{-\kappa-1+q}t^{\kappa-q-m-1}\,\big|Z(\lambda,t,\alpha)\big|\,\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)+\varepsilon E\big)(x^*-\xi)\Big\|_X\,d\alpha\,dt\Big)\,|d\lambda|\le$$
$$\le E(\varepsilon)\int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}}|\lambda|^{m+1}\Big(\int\limits_0^\infty\alpha^{-\kappa-1+q}\big|\Theta(\lambda,\alpha)\lambda-1\big|\,d\alpha\Big)\,\Big(\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1}|t+\lambda|^{-1}\,dt\Big)\,|d\lambda|. \tag{5.28}$$

Для получения оценки величины первого внутреннего интеграла в (5.28) наложим на $\Theta(\lambda,\alpha)$ еще одно ограничение.

Условие 5.6. Функция $g(\zeta)=1-\Theta(\lambda,\lambda\zeta)\lambda$ не зависит от λ при $\lambda\in K(\varphi_0)\setminus\{0\}$; $g(\zeta)$ аналитична на открытом множестве $D_0\supset K(\varphi_0)\setminus\{0\}$. Далее, для любого $\omega\in(0,p)$

$$\sup_{|\varphi|\le\varphi_0}\int\limits_0^\infty\tau^{-\omega-1}\big|g(e^{i\varphi}\tau)\big|\,d\tau=N(\omega)<\infty, \tag{5.29}$$

причем

$$\lim_{r\to 0+}r^{-\omega-1}\int\limits_{\Gamma_r(e^{-i\varphi_0},e^{i\varphi_0})}|g(\zeta)|\,|d\zeta|=0, \tag{5.30}$$

$$\lim_{R\to\infty} R^{-\omega-1} \int\limits_{\Gamma_R(e^{-i\varphi_0},e^{i\varphi_0})} |g(\zeta)|\,|d\zeta| = 0. \tag{5.31}$$

Используя подстановки $\alpha = |\lambda|\tau, t = |\lambda|\tau$ и (5.29), оценим внутренние интегралы в (5.28) следующим образом:

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q}\big|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big|\,d\alpha = |\lambda|^{-\kappa+q}\int\limits_0^\infty \tau^{-\kappa-1+q}\big|g(e^{-i\arg\lambda}\tau)\big|\,d\tau \le N(\kappa-q)|\lambda|^{-\kappa+q}, \tag{5.32}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1}|t+\lambda|^{-1}\,dt = |\lambda|^{\kappa-q-m-1}\int\limits_0^\infty \tau^{\kappa-q-m-1}|\tau+|\lambda|^{-1}\lambda|^{-1}\,d\tau \le \\ \le P(\kappa,q)|\lambda|^{\kappa-q-m-1}\end{gathered} \tag{5.33}$$

для всех $\lambda\in\Gamma^{(\varepsilon)}$ и всех $q\in(0,q_0)$. Используя совместно (5.28), (5.32) и (5.33), получим $J<\infty$. По теореме Фубини для интегралов Бохнера [18, гл. V, § 8] возможно изменение порядка интегрирования в (5.27). Поэтому для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$

$$\begin{gathered}\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon)} = D(\kappa,q)\int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}}\lambda^{m+1}\Big(\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q}\big(1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big)\,d\alpha\Big)\times \\ \times\Big(\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1}(t+\lambda)^{-1}dt\Big)R\big(\lambda,F'(x^*)+\varepsilon E\big)(x^*-\xi)\,d\lambda.\end{gathered} \tag{5.34}$$

Для комплексного $z\ne 0$ обозначим

$$\Lambda(z) = \big\{\zeta\in\mathbf{C}\colon\ \zeta = tz,\ t\geqslant 0\big\}.$$

Полагая $\alpha=\lambda\zeta$, перепишем первый из внутренних интегралов в (5.34) в виде

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q}\big(1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big)\,d\alpha = \lambda^{-\kappa+q}\int\limits_{\Lambda(\bar\lambda)}\zeta^{-\kappa-1+q}g(\zeta)\,d\zeta, \tag{5.35}$$

где интегрирование осуществляется по $\Lambda(\bar\lambda)$ по направлению от $\zeta=0$ до $\zeta=\infty$. Пусть

$$G(\lambda,\kappa,q) = \int\limits_{\Lambda(\bar\lambda)}\zeta^{-\kappa-1+q}g(\zeta)\,d\zeta.$$

Величина интеграла $G(\lambda,\kappa,q)$ на деле не зависит от $\lambda\in\Gamma^{(\varepsilon)}$. Для доказательства этого выберем произвольные $\lambda_1,\lambda_2\in\Gamma^{(\varepsilon)}$, такие, что $\arg\bar\lambda_1<\arg\bar\lambda_2$ и обозначим

$$\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2) = \Gamma_r(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)\cup\Gamma_R(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)\cup\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1)\cup\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_2),$$

где $0<r<R$. Поскольку функция $g(\zeta)$ аналитична на области $D_0\supset\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)}\zeta^{-\kappa-1+q}g(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{\Gamma_r(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)}\zeta^{-\kappa-1+q}g(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{\Gamma_R(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)} + \int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1)} + \int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_2)} = 0.$$

Переходя здесь к пределам при $r\to 0+$ и $R\to\infty$ и пользуясь (5.30), (5.31), получаем

$$\int\limits_{\Lambda(\bar\lambda_1)}\zeta^{-\kappa-1+q}g(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{\Lambda(\bar\lambda_2)}\zeta^{-\kappa-1+q}g(\zeta)\,d\zeta.$$

Таким образом, величина $G(\lambda,\kappa,q)\equiv G(\kappa,q)$ не зависит от выбора $\lambda\in\Gamma^{(\varepsilon)}$. Аналогично, для второго внутреннего интеграла в (5.34) получаем

$$\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1}(t+\lambda)^{-1}\,dt = \lambda^{\kappa-q-m-1}\int\limits_{\Lambda(\bar\lambda)}\zeta^{\kappa-q-m-1}(1+\zeta)^{-1}\,d\zeta \equiv \lambda^{\kappa-q-m-1}H(\kappa,q). \tag{5.36}$$

Из (5.34) – (5.36) следует, что

$$\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon)} = D(\kappa,q)G(\kappa,q)H(\kappa,q)\int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}} R\big(\lambda, F'(x^*)+\varepsilon E\big)(x^*-\xi)\,d\lambda = C(\kappa,q)(x^*-\xi),$$

где $C(\kappa,q)=2\pi i D(\kappa,q)G(\kappa,q)H(\kappa,q)$. Тем самым установлено следующее утверждение.

Лемма 5.4. *Пусть выполняются условия* 2.1, 4.1–4.4, 5.1 – 5.6. *Тогда для некоторой ненулевой постоянной* $C(\kappa,q)$ *выполняется равенство* (5.16).

Докажем теперь основной результат этого раздела. Следующее утверждение является в некотором смысле обратным по отношению к теореме 4.1.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* 2.1, 4.1–4.4, 5.1 – 5.6. *Если итерационный процесс* (4.1) *порождает последовательность* $\{x_n\}$, *для которой справедлива оценка* (5.1), *то для любого* $\varepsilon\in(0,p)$ *имеет место включение*

$$x^*-\xi\in R\big(F'(x^*)^{p-\varepsilon}\big).$$

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1) Прежде всего для любых $\kappa\in(0,p-1)$ и достаточно малых $q>0$ установим равенство

$$\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon_n)} = F'(x^*)^{\kappa-q}w_q, \tag{5.37}$$

где $w_q^{(\varepsilon)}$ и w_q определены в (5.17) и (5.15), а $\{\varepsilon_n\}$ определена в лемме 5.3. Предполагая q достаточно малым, получим $\kappa-q\in(m,m+1)$, $\mu\in(0,1)$, где $m=[\kappa-q], \mu=\{\kappa-q\}$. Тогда

$$\begin{aligned}\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon_n)} - F'(x^*)^{\kappa-q}w_q\Big\|_X &= \Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{m+\mu}w_q^{(\varepsilon_n)} - F'(x^*)^{m+\mu}w_q\Big\|_X \le \\ \le \Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{m+\mu} - F'(x^*)^{m+\mu}\Big\|_{L(X)}&\big\|w_q^{(\varepsilon_n)}\big\|_X + \big\|F'(x^*)^{m+\mu}\big\|_{L(X)}\big\|w_q^{(\varepsilon_n)}-w_q\big\|_X.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{m+\mu} - F'(x^*)^{m+\mu}\Big\|_{L(X)} &\le \Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{m} - F'(x^*)^{m}\Big\|_{L(X)}\big\|F'(x^*)^{\mu}\big\|_{L(X)} + \\ + \Big(\big\|F'(x^*)\big\|_{L(X)}+\varepsilon_n\Big)^m &\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\mu} - F'(x^*)^{\mu}\Big\|_{L(X)}.\end{aligned} \tag{5.39}$$

Заметим, что

$$\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{m} - F'(x^*)^{m}\Big\|_{L(X)} \le c_{44}\,\varepsilon_n. \tag{5.40}$$

Из (4.9) следует

$$\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\mu} - F'(x^*)^{\mu}\Big\|_{L(X)} \le c_{45}\,\varepsilon_n^{\mu}. \tag{5.41}$$

Объединяя неравенства (5.38) – (5.41) и используя лемму 5.3, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon_n)} - F'(x^*)^{\kappa-q}w_q\Big\|_X = 0. \tag{5.42}$$

В силу леммы 5.4 элемент $\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon)}$ не зависит от ε, поэтому (5.42) влечет (5.37).

2) Для произвольного $\kappa\in(0,p-1)$ в силу леммы 5.4 при малых $q>0$ имеем

$$x^*-\xi = F'(x^*)^{\kappa-q}v_q, \quad v_q = C(\kappa,q)^{-1}w_q.$$

Поскольку

$$F'(x^*)^{\alpha+\beta} = F'(x^*)^{\alpha}F'(x^*)^{\beta} \quad \forall\alpha,\beta>0, \quad \alpha+\beta<1$$

(см. [14, гл. I, § 5]), для любого $\delta_1\in(0,p-1)$ существует элемент $v^{(1)}\in X$, такой, что

$$x^*-\xi = F'(x^*)^{p_1}v^{(1)}, \quad p_1 = p-1-\delta_1. \tag{5.43}$$

Полученное представление может быть вновь использовано для оценки третьего члена правой части неравенства (5.2). Как и при доказательстве теоремы 3.1, рассмотрим две возможности.

3) Если $p_1 \geq 1$, то в силу (4.25) и (4.30)

$$\left\| \Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big) F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big) F'(x_n) \Big] (x^* - \xi) \right\|_X \leq$$

$$\leq \left\| \Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big) F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big) F'(x_n) \Big] F'(x^*) \right\|_{L(X)} \left\| F'(x^*)^{p_1 - 1} v^{(1)} \right\|_X \leq c_{46}\, \alpha_n^p.$$

Применение этой оценки к (5.6) дает (ср. с (5.8))

$$\Phi(\alpha_n) \leq c_{47}\, \alpha_n^p, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Как и выше, отсюда следует, что для любого $\delta \in (0, p)$ существует элемент $\tilde{v} = \tilde{v}(\delta) \in X$, такой, что $x^* - \xi = F'(x^*)^{\tilde{p}} \tilde{v}$, $\tilde{p} = p - \delta$. Значит, в этом случае утверждение теоремы верно.

4) Допустим теперь, что $p_1 \in (0, 1)$. Не умаляя общности, в (4.3) можно положить $\Gamma_n = \gamma_{\alpha_n}$. Аналогично (5.4),

$$\begin{gathered} \left\| \Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big) F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big) F'(x_n) \Big] (x^* - \xi) \right\|_X = \\ = \left\| \Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big) F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big) F'(x_n) \Big] F'(x^*)^{p_1} v^{(1)} \right\|_X \leq \\ \leq c_{48} \int\limits_{\gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda\big| \left\| \Big[R\big(\lambda, F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'(x_n)\big) \Big] F'(x^*)^{p_1} \right\|_{L(X)} |d\lambda|. \end{gathered} \tag{5.44}$$

Как и в (4.28), для всех $\lambda \in \gamma_{\alpha_n}$ имеем

$$\left\| \Big[R\big(\lambda, F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'(x_n)\big) \Big] F'(x^*)^{p_1} \right\|_{L(X)} \leq c_{49}\, \frac{\|x_n - x^*\|_X}{|\lambda|} \left\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) F'(x^*)^{p_1} \right\|_{L(X)}. \tag{5.45}$$

Из (4.8) следует

$$\left\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) F'(x^*)^{p_1} \right\|_{L(X)} \leq c_{50} \Bigg(\int\limits_0^{2C_3\alpha_n} t^{p_1 - 1} \left\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) R\big(-t, F'(x^*)\big) F'(x^*) \right\|_{L(X)} dt +$$

$$+ \int\limits_{2C_3\alpha_n}^{\infty} t^{p_1 - 1} \left\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) R\big(-t, F'(x^*)\big) F'(x^*) \right\|_{L(X)} dt \Bigg).$$

В силу (4.2), (4.29) и равенства

$$R\big(\lambda, F'(x^*)\big) R\big(-t, F'(x^*)\big) = (\lambda + t)^{-1} \Big(R\big(-t, F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'(x^*)\big) \Big)$$

имеем

$$\begin{gathered} \left\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) F'(x^*)^{p_1} \right\|_{L(X)} \leq \\ \leq c_{50} \Bigg(\int\limits_0^{2C_3\alpha_n} t^{p_1 - 1} \left\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) \right\|_{L(X)} \left\| R\big(-t, F'(x^*)\big) F'(x^*) \right\|_{L(X)} dt + \\ + \int\limits_{2C_3\alpha_n}^{\infty} \frac{t^{p_1 - 1}}{|\lambda + t|} \left\| \Big[R\big(-t, F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'(x^*)\big) \Big] F'(x^*) \right\|_{L(X)} dt \Bigg) \leq \\ \leq c_{51} \Bigg(\alpha_n^{-1} \int\limits_0^{2C_3\alpha_n} t^{p_1 - 1}\, dt + \int\limits_{2C_3\alpha_n}^{\infty} \frac{t^{p_1 - 1}}{|\lambda + t|}\, dt \Bigg) \leq c_{52}\, \alpha_n^{p_1 - 1} \quad \forall \lambda \in \gamma_{\alpha_n}. \end{gathered} \tag{5.46}$$

Из (5.44) – (5.46) следует

$$\left\| \Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^*-\xi)\right\|_X \le c_{53}\,\alpha_n^{p+p_1-1}.$$

Тогда, в силу (5.2) и (5.3),

$$\Phi(\alpha_n) \le c_{54}\,\alpha_n^{p+p_1-1}. \tag{5.47}$$

Из (5.47) следует, что для любого $\delta_2 \in (0, p-(1-p_1))$ существует элемент $v^{(2)} \in X$, такой, что

$$x^* - \xi = F'(x^*)^{p_2}\, v^{(2)}, \quad p_2 = p - (1-p_1) - \delta_2.$$

Теперь можно проитерировать процесс улучшения оценки (5.8).

5) В общем виде процесс уточнения оценок $\Phi(\alpha_n)$ выглядит следующим образом. Выберем последовательность $\{\delta_k\}$ так, что $\delta_k \in (0, p-1)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$. Тогда на k-м шаге будем иметь

$$\Phi(\alpha_n) \le c_{55}\,\alpha_n^{p+p_k-1},$$

откуда следует представление

$$x^* - \xi = F'(x^*)^{p_{k+1}} v^{(k+1)}, \quad v^{(k+1)} \in X, \tag{5.48}$$

при

$$p_{k+1} = p - (1-p_k) - \delta_{k+1}, \quad \delta_{k+1} \in \big(0, p-(1-p_k)\big). \tag{5.49}$$

Если $p_k \ge 1$, то в силу (5.48) и (5.49) $x^* - \xi = F'(x^*)^{p-\delta_{k+1}} \tilde v^{(k+1)}$, где $\tilde v^{(k+1)} = F'(x^*)^{p_k-1} v^{(k+1)}$, и процесс останавливается. Поскольку величина δ_{k+1} может быть выбрана произвольно малой, утверждение теоремы справедливо.

6) Для завершения доказательства остается установить, что на некотором конечном шаге $k = k_0$ будет $p_k \ge 1$. Это может быть сделано так же, как при доказательстве теоремы 3.1. В самом деле, предположим противное, т.е. что $p_k < 1$ для всех номеров $k = 1, 2, \ldots$. Из (5.49) следует, что $p_k < p_{k+1}$. Тогда последовательность $\{p_k\}$ имеет предел: $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \tilde p \le 1$. Переходя в (5.49) к пределу, приходим к равенству $p = 1$, которое противоречит первоначальному условию $p > 1$. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Теорема 5.1 утверждает, что истокообразное представление (4.7) является почти необходимым для выполнения оценки (5.1). Нарушение равносильности соотношений (4.7) и (5.1) имеет место в процессе получения представления (5.43) при $\delta_1 > 0$ из соотношения (5.7). Поэтому возникает вопрос о том, будет ли (5.43) верным при $\delta_1 = 0$. Ответ в общем случае отрицателен (см. контрпримеры в [7, 19]).

6. Примеры итеративных методов в банаховом пространстве. В этом разделе приведены некоторые примеры порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$, удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

1) Начнем с функции (2.31). Следуя [5, с. 53], определим контуры $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in(0,\infty)}$ в виде

$$\Gamma_\alpha = \mathrm{fr}\big(S_{R_0}(0) \setminus S_{(1-C_3)\alpha}(-\alpha)\big), \quad \alpha > 0. \tag{6.1}$$

Нетрудно видеть, что условия 4.2, 5.1 и 5.4 выполняются при $D_\alpha = \mathbf{C} \setminus \{-\alpha\}$, если

$$1 - \sin\Big(\max\Big\{\varphi_0, \frac{\pi}{2}\Big\}\Big) < C_3 < 1. \tag{6.2}$$

Прямые вычисления показывают, что остальные условия также выполняются при Γ_α, определенном в (6.1) и $p_0 = 1$ (см. условие 4.4). В этом случае процесс (4.1) принимает вид:

$$\big(F'(x_n) + \alpha_n E\big)\, x_{n+1} = \alpha_n \xi + F'(x_n)\, x_n - F(x_n). \tag{6.3}$$

Заметим, что линейное операторное уравнение (6.3) является корректным для всех $n = 0, 1, \ldots$.

2) Рассмотрим функцию (2.32). Пусть выполняется условие (6.2). Выполнение условий 4.2, 5.1 и 5.4 проверяется непосредственно. Обращаясь к условиям 4.3 и 4.4, определим $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in(0,\infty)}$ по формуле (6.1). Нетрудно показать, что неравенство (4.18) выполнено, при этом условия 4.4 и 5.6 справедливы при $p_0 = N$ и $p \in (0, N)$. Что касается интегралов в (5.10) и (5.13), видим, что (5.10) выполняется при $r_0 = 1$, а (5.13) верно для любого $s_0 > 0$. Поэтому условия 5.2 и 5.3 выполняются. В силу неравенств

$$M(\alpha, \varepsilon) \le c_{56}\, \frac{\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}\, \big(1 + |\ln\alpha|\big) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1], \quad \alpha \in (0, \infty),$$

$$\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon \leqslant c_{57}\big(1+|\ln\alpha|^2\big) \quad \forall\alpha\in(0,\infty)$$

условие 5.5 выполнено для произвольного $t_0>0$. Итерация метода (2.32), (4.1) может быть представлена в виде конечного итерационного процесса $x_{n+1}=x_{n+1}^{(N)}$, где $x_{n+1}^{(0)}=\xi$ и $\{x_{n+1}^{(k)}\}$ определяются последовательно из линейных корректных уравнений

$$\big(F'(x_n)+\alpha_n E\big)\, x_{n+1}^{(k+1)} = \alpha_n x_{n+1}^{(k)} + F'(x_n)\, x_n - F(x_n), \quad k=0,1,\dots,N-1.$$

Подчеркнем, что неравенство (4.21) становится неверным при $\tau>N$. Поэтому теорема 4.1 не гарантирует выполнение оценки скорости сходимости метода (2.32), (4.1) с показателем p, большим N, даже если $x^*-\xi=F'(x^*)^q v$, $v\in X$ с произвольно большим $q>N$ (явление насыщения). Приведем пример итеративной процедуры (4.1), свободной от этого недостатка.

3) Рассмотрим порождающую функцию (2.33), аналитичную на всей комплексной плоскости. Предположим, что условие 4.1 выполняется для $\varphi_0\in(0,\pi/2)$. Проверка условий 4.2, 5.1 и 5.4 не представляет затруднений. Легко убедиться в справедливости условий 4.3 и 4.4, если положить $\Gamma_\alpha=\gamma_\alpha$, $\alpha>0$. Кроме того, легко заметить, что условия 4.4 и 5.6 выполняются в этом случае без каких-либо ограничений на $p\geq 1$. Следовательно, метод (2.33), (4.1) свободен от насыщения. Условие 5.3 выполняется для произвольного $s_0>0$, поскольку

$$\sup_{\alpha\in[\alpha_0,\infty)} \int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{\big|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| < \infty \quad \forall\alpha_0>0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что условие 5.2 верно при $r_0=1$. Наконец, условие 5.5 выполняется в силу оценок

$$M(\alpha,\varepsilon)\leqslant c_{58}\left(1-e^{-\varepsilon/\alpha}\right)\big(1+|\ln\alpha|\big) \quad \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_1], \quad \alpha\in(0,\infty),$$

$$\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\varepsilon \leq c_{59}\big(1+|\ln\alpha|^2\big) \quad \forall\alpha\in(0,\infty).$$

Итерация метода (2.33), (4.1) осуществляется следующим образом: $x_{n+1}=u(\alpha_n^{-1})$, где $u=u(t)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} + F'(x_n)\, u(t) = F'(x_n)\, x_n - F(x_n), \quad u(0)=\xi.$$

4) В заключение приведем еще один пример функции $\Theta(\lambda,\alpha)$, порождающей процесс (4.1) без насыщения. Рассмотрим функцию (2.34). Пусть параметр регуляризации $\alpha>0$ первоначально принимает значения $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots$. Так как $\Theta(\lambda,\alpha)$ аналитична на $\mathbf{C}$, условие 4.2 выполнено. Заметим, что последовательность $\alpha_n=(n+1)^{-1}$ удовлетворяет условию 2.1. Предположим, что условие 4.1 выполняется при $\varphi_0\in(0,\pi/4)$. Тогда, выбирая $\Gamma_\alpha=\gamma_\alpha$, $\alpha>0$, и рассуждая далее по схеме, описанной в [6, § 4.5], получаем, что условие 4.4 выполняется для любого $p\geq 1$ при достаточно малых $\mu_0>0$. Нетрудно показать, что оставшиеся условия также выполняются, за исключением условия 5.6. Тем не менее, подходящая модификация доказательства теоремы 5.1 с наложением на параметр μ_0 дополнительных ограничений показывает, что эта теорема остается в силе и для функции (2.34). Итерация метода (2.34), (4.1) может быть записана следующим образом: $x_{n+1}=x_{n+1}^{(n)}$, где $x_{n+1}^{(0)}=\xi$, а $\{x_{n+1}^{(k)}\}$ строится итерационным путем:

$$x_{n+1}^{(k+1)} = x_{n+1}^{(k)} - \mu_0\big(F'(x_n)x_{n+1}^{(k)} - F'(x_n)x_n + F(x_n)\big), \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Условия истокопредставимости и скорость сходимости методов решения некорректных операторных уравнений. Часть I // Вычислительные методы и программирование. 2000. **1**, № 1. 64–84.
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
3. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
4. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
5. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
6. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-posed problems: theory and applications. Dordrecht: Kluwer, 1994.

7. *Engl H.W, Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Dordrecht: Kluwer, 1996.
8. *Бакушинский А.Б.* Итерационные методы без насыщения для решения вырожденных нелинейных операторных уравнений // Докл. РАН. 1995. **344**, № 1. 7–8.
9. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы для решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. **3**, № 3. 685–692.
10. *Бакушинский А.Б.* О скорости сходимости итерационных процессов для нелинейных операторных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1998. **38**, № 4. 559–663.
11. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итеративные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
12. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
13. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
14. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974.
16. Однопараметрические полугруппы / Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С. и др. М.: Мир, 1992.
17. *Balakrishnan A.V.* Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them // Pacific J. Math. 1960. **10**, N 2. 419–437.
18. *Бурбаки Н.* Интегрирование (меры, интегрирование мер). М.: Наука, 1967.
19. *Кокурин М.Ю.* Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. Йошкар-Ола: МарГУ, 1998.
20. *Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* О необходимых условиях квалифицированной сходимости методов решения линейных некорректных задач // Изв. вузов. Матем. 2001. № 2. 39–47.
21. *Кокурин М.Ю.* Условия истокопредставимости и оценки скорости сходимости методов регуляризации линейных уравнений в банаховом пространстве. I, II // Изв. вузов. Матем. 2001. (в печати).
22. *Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* О невырожденных оценках скорости сходимости итерационных методов решения некорректных нелинейных операторных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2000. **40**, № 6. 793–798.
23. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* Необходимые условия сходимости итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2000. **40**, № 7. 945–954.
24. *Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu.* Iterative methods for solving nonlinear irregular operator equations in Banach space // Numer. Funct. Anal. Optim. 2000. **21**, N 3–4. 355–378.
25. *Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu.* Sourcewise representation of solutions for nonlinear operator equations in Banach spaces and rate of convergence estimates for regularized Newton's method // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2001 (to appear).

Поступила в редакцию
15.03.2001