УДК 532.529

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА СТЕНКЕ И СЕТОЧНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ В РАСЧЕТАХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

К. Н. Волков[1]

Рассматриваются способы постановки и численной реализации граничных условий на стенке в расчетах турбулентных течений на неструктурированных сетках. Обсуждаются достоинства и недостатки метода пристеночных функций, а также особенности его реализации для различных моделей турбулентности. Предлагается способ реализации слабых граничных условий на стенке при дискретизации осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса при помощи метода контрольного объема. Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере решения ряда модельных задач газовой динамики. Исследуется влияние пристеночного разрешения стенки на точность расчетов и сравнивается сеточная зависимость решения при использовании метода пристеночных функций и слабых граничных условий.

Ключевые слова: граничные условия, турбулентность, неструктурированная сетка, пристеночные функции, закон стенки.

1. Введение. Для гибкого описания областей сложной геометрической конфигурации, характерных для многих приложений, в настоящее время развиваются численные методы расчета сжимаемых турбулентных течений на неструктурированных сетках. В отличие от хорошо разработанных технологий метода конечных элементов, конечно-объемные технологии на неструктурированных сетках характеризуются отсутствием единых принципов, позволяющих провести дискретизацию конвективных и диффузионных потоков, источниковых членов, а также учет граничных условий [1].

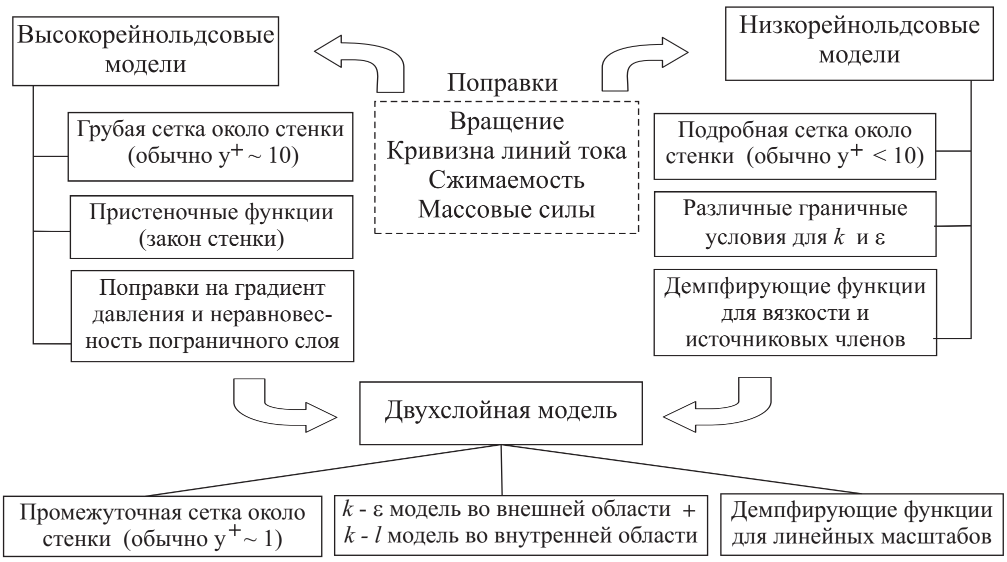


Рис. 1. Различные версии k–ε модели турбулентности

В инженерных приложениях для расчета турбулентных течений используются модели, основанные на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds-Averaged Navier–Stokes, RANS). Вопросы их замыкания решаются на различном уровне сложности, а модели турбулентности обычно классифицируются по числу дифференциальных уравнений, вводимых в дополнение к уравнениям изменения количества движения и теплопереноса. Среди дифференциальных моделей турбулентности широкое распространение получили модель Спаларта–Аллмараса [2] и k–ε модель [3], а также ее различные модификации (рис. 1). Модель Спаларта–Аллмараса [2] воплощает новый класс однопараметрических моделей,

[1] Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, физико-механический факультет, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; e-mail: dsci@mail.ru

исключающих расчет длины пути смешения Прандтля, связанной с локальной толщиной слоя, характеризуемого большими значениями касательных напряжений. Применение k–ε модели [3] объясняется устойчивым итерационным процессом и разумной точностью для течений различного класса.

Уравнения модели Спаларта–Аллмараса и k–ε модели в формулировках [2, 3] пригодны для описания высокорейнольдсовых течений (вдали от стенки). Для моделирования течений в пристеночной области традиционно применяется несколько подходов — метод пристеночных функций ($y^+ \sim 10$), низкорейнольдсовые модели турбулентности ($y^+ < 1$) и двухслойная k–ε/k–l модель ($y^+ \sim 1$).

В методе пристеночных функций вязкий подслой и переходная область пограничного слоя не разрешаются, а описываются полуэмпирическими формулами (пристеночными функциями). Улучшение точности достигается при помощи решения упрощенных уравнений пограничного слоя в пристеночном контрольном объеме [4]. Увеличение сеточного разрешения около стенки (до $y^+ \sim 10$) обычно приводит к более высокой точности.

Стремление расширить границы применимости k–ε модели вплоть до стенки, включая вязкий подслой (при условии необходимого разрешения сетки в пограничном слое), привело к созданию ее низкорейнольдсовых версий, различающихся формой записи источниковых членов, граничными условиями на стенке, а также демпфирующими функциями [5]. Несмотря на многочисленные расчеты и тестирование, применение низкорейнольдсовых моделей для решения широкого круга задач представляется затруднительным.

Двухслойная модель представляет собой компромиссный вариант между высоко- и низкорейнольдсовыми моделями турбулентности. Пристеночная область разделяется на две подобласти — внутреннюю и внешнюю, граница между которыми зависит от локального числа Рейнольдса. Во внешней области используются уравнения модели [3], а во внутренней области — k–l модель [6].

Расчеты турбулентных течений на неструктурированных сетках демонстрируют существенную зависимость решения от шага сетки вблизи стенки.

Для нормальной скорости на стенке, как правило, используется граничное условие непротекания $v_n = 0$, а для касательной — условие прилипания $v_\tau = 0$ (жесткие граничные условия). Несмотря на то, что постановка условия скольжения на стенке $v_\tau \neq 0$ (слабые граничные условия) противоречит физической реальности (разреженные течения не рассматриваются), такой подход используется в вычислительной практике, но, в основном, при дискретизации уравнений Навье–Стокса по методу конечных элементов [7]. Влияние стенки на поток учитывается в виде сеточных напряжений сдвига и дополнительной сеточной генерации турбулентности за счет отличия профиля касательной скорости от логарифмического распределения около стенки.

В данной работе рассматриваются способы постановки и численной реализации слабых граничных условий на стенке при расчете турбулентных течений на неструктурированных сетках. Обсуждаются достоинства и недостатки метода пристеночных функций, а также особенности его реализации для модели Спаларта–Аллмараса и k–ε модели. Предлагаются способы реализации слабых граничных условий при дискретизации осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса по методу контрольного объема, различающиеся способом его выбора (контрольный объем, совпадающий с ячейкой сетки, и контрольный объем, центрированный относительно узла сетки). Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере решения ряда модельных задач. Показывается влияние пристеночного шага сетки на точность расчетов, и исследуется сеточная зависимость решения при использовании метода пристеночных функций и слабых граничных условий.

2. Основные уравнения. В декартовой системе координат (x, y, z) нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается уравнением

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z} = \boldsymbol{H}. \tag{1}$$

Уравнение (1) дополняется уравнением состояния совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\left[e - \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - \omega^2 r^2\right)\right].$$

Вектор консервативных переменных $\boldsymbol{Q}$ и вектора потоков $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ имеют следующий вид

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p) v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p) v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{F}_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p) v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Неинерциальность системы отсчета учитывается при помощи введения в источниковый член $\boldsymbol{H}$ кориолисовой и центробежной силы

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho\,\omega(y\,\omega + 2v_z) \\ \rho\,\omega(z\,\omega - 2v_y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений $\tau_{ij} = \mu_e \left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} - \dfrac{2}{3} \dfrac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$, $\quad q_i = -\lambda_e \dfrac{\partial T}{\partial x_i}$. Здесь t — время; ρ — плотность; r — радиус вращения; v_x, v_y, v_z — составляющие скорости в координатных направлениях x, y, z соответственно; ω — угловая скорость; p — давление; e — полная энергия единицы массы; T — температура; γ — отношение удельных теплоемкостей.

Уравнение (1) пригодно для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. При моделировании турбулентных течений уравнение (1) дополняется уравнениями модели турбулентности. При этом эффективная вязкость μ_e вычисляется как сумма молекулярной μ и турбулентной μ_t вязкости, а эффективная теплопроводность λ_e выражается через вязкость и число Прандтля: $\mu_e = \mu + \mu_t$, $\lambda_e = c_p \left(\dfrac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \dfrac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t} \right)$, где c_p — теплоемкость при постоянном давлении (для воздуха $\mathrm{Pr} = 0.72$, $\mathrm{Pr}_t = 0.9$). Для получения значений молекулярной вязкости в зависимости от температуры используется закон Сазерленда.

3. Модели турбулентности. Для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, записанных в виде (1), используются модель Спаларта–Аллмараса и k–ε модель.

3.1. Модель Спаларта–Аллмараса. Модель Спаларта–Аллмараса предполагает решение следующего уравнения [2]:

$$\frac{\partial \rho \widetilde{\nu}}{\partial t} + (\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \widetilde{\nu} = \frac{1}{\sigma} \Big\{ \nabla \big[(\mu + \rho \widetilde{\nu}) \nabla \widetilde{\nu} \big] + c_{b2} \nabla \widetilde{\nu} \cdot \nabla \rho \widetilde{\nu} \Big\} + S_{\widetilde{\nu}}. \tag{2}$$

Источниковый член в уравнении (2) учитывает порождение и диссипацию турбулентной вязкости:

$$S_{\widetilde{\nu}} = \underbrace{c_{b1}\, \widetilde{S}\, \widetilde{\nu}}_{\text{производство}} - \underbrace{\left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\varkappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\widetilde{\nu}}{d} \right)^2}_{\text{диссипация}} + \underbrace{f_{t1}\, (\Delta U)^2}_{\text{переход}}.$$

Здесь d — расстояние до стенки. Рабочая переменная $\widetilde{\nu}$ связана с турбулентной вязкостью $\nu_t = f_{v1} \widetilde{\nu}$. Член производства турбулентности моделируется соотношением $\widetilde{S} = S f_{v3} + \dfrac{\widetilde{\nu}}{\varkappa^2 d^2} f_{v2}$, в котором S вычисляется на основе величины завихренности $S = (2 \Omega_{ij} \Omega_{ij})^{1/2}$, $\quad \Omega_{ij} = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$.

Для обеспечения корректного поведения рабочей переменной в логарифмическом слое ($\widetilde{\nu} = \varkappa y u_\tau$) вводится демпфирующая функция $f_{v1} = \dfrac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}$, $\quad \chi = \dfrac{\widetilde{\nu}}{\nu}$. Функции f_{v2} и f_{v3} имеют следующий вид: $f_{v2} = 1 - \dfrac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$, $\quad f_{v3} = 1$.

Функция f_w играет роль во внешней области пограничного слоя:

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\widetilde{\nu}}{\varkappa^2 d^2 \widetilde{S}}.$$

Функция g выступает в качестве ограничителя, предотвращая завышенные значения f_w. При этом $r = 1$ и $f_w = 1$ в логарифмическом слое, уменьшаясь во внешней области. Постоянным модели присваиваются значения $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $\sigma = 2/3$, $c_{v1} = 7.1$, $c_{w1} = \dfrac{c_{b1}}{\varkappa^2} + \dfrac{1 + c_{b2}}{\sigma}$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2.0$, $\varkappa = 0.41$.

Функции f_{t1}, f_{t2} и g_t контролируют ламинарно-турбулентный переход в некоторой точке (x_t, y_t, z_t) пограничного слоя:

$$f_{t1} = c_{t1}\, g_t \exp\left[-c_{t2}\, \frac{S_t^2}{\Delta U^2}\left(d^2 + g_t^2 d_t^2\right)\right], \quad f_{t2} = c_{t3} \exp\left(-c_{t4}\chi^2\right), \quad g_t = \min\left\{0.1,\ \frac{\Delta U}{S_t \Delta x_t}\right\},$$

где $\Delta U = |u - u_t|$, d_t — расстояние до стенки, S_t — величина завихренности, Δx_t — шаг сетки вдоль стенки, $c_{t1} = 1$, $c_{t2} = 2$, $c_{t3} = 1.2$, $c_{t4} = 0.5$.

3.2. Диссипативная модель. Уравнения k–ε модели имеют вид [3]

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + (\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla) k = \nabla\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\nabla k\right] + P_k - \rho\varepsilon; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + (\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla) \varepsilon = \nabla\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\nabla \varepsilon\right] + c_{\varepsilon 1}\, \frac{\varepsilon}{k}\, \left(P_k - c_{\varepsilon 2}\rho\varepsilon\right). \tag{4}$$

Член производства турбулентности находится из соотношения $P_k = \mu_t\,(2 S_{ij} S_{ij})$, $S_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. Турбулентная вязкость вычисляется по формуле Колмогорова–Прандтля $\mu_t = c_\mu \rho k^2/\varepsilon$. Постоянным модели присваиваются значения $c_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $c_{\varepsilon 1} = 1.44$, $c_{\varepsilon 2} = 1.92$.

4. Численный метод. Дискретизация уравнения (1) и уравнений модели турбулентности (2) или (3) и (4) проводится при помощи метода контрольного объема [1]. Для дискретизации по времени используется пятишаговый метод Рунге–Кутта. Для дискретизации невязких потоков применяется схема MUSCL, а для дискретизации вязких потоков — конечно-разностные формулы второго порядка. Система разностных уравнений решается многосеточным методом на основе схемы полной аппроксимации (используются V-цикл и сетки четвертого уровня). Последовательность вложенных сеток строится при помощи метода схлопывающихся граней [1].

Расчеты проводятся в декартовых координатах (x, y, z). Однако для задания граничных условий и обработки результатов численного моделирования используется также цилиндрическая система координат (x, r, θ). Проведение расчетов в безразмерных переменных позволяет объединить невязки, обусловленные дискретизацией уравнений неразрывности, изменения количества движения и энергии, а также невязки, возникающие в результате дискретизации уравнений модели турбулентности.

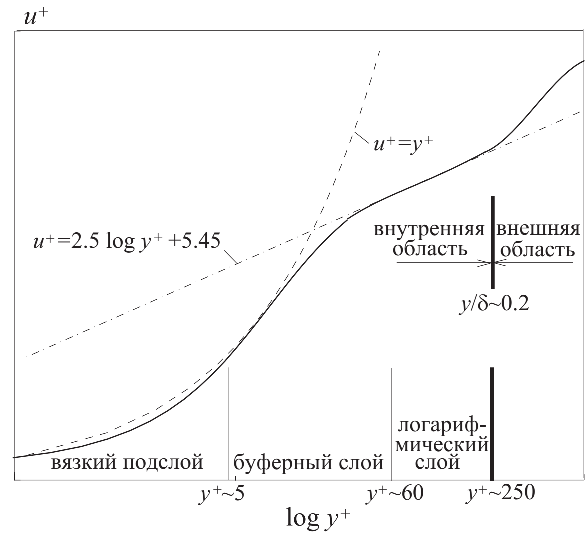


Рис. 2. Структура турбулентного пограничного слоя

В начальный момент времени считается, что газ покоится. В качестве рабочей среды принимается воздух (теплофизические свойства — справочные).

Вычислительная процедура реализована в виде компьютерного кода на языках программирования Fortran 77 и C/C++, а для ее распараллеливания применяется интерфейс межпроцессорного взаимодействия MPI (Message Passing Interface).

5. Метод пристеночных функций и его реализация. Пристеночные функции представляют собой набор полуэмпирических формул, которые связывают искомые функции в пристеночной ячейке сетки с соответствующими величинами на стенке.

5.1. Структура пограничного слоя. В турбулентном пограничном слое обычно выделяется несколько характерных подобластей (рис. 2), используя расстояние от стенки $y^+ = y u_\tau/\nu$ и скорость потока $u^+ = u/u_\tau$, выраженные в пристеночных единицах, где $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$.

Области закона следа и перемежаемости объединяются во внешнюю область, которая занимает порядка 80 % от толщины всего слоя. Внешний слой является областью полностью развитого турбулентного течения, свойства которого зависят от предыстории потока.

Вязкий подслой, переходная область и область логарифмического профиля скорости составляют внутреннюю область (область закона стенки). На плоской пластине она занимает примерно 20 % от толщины пограничного слоя и в ней генерируется до 80 % энергии турбулентности. В вязком подслое поток является практически ламинарным и вязкие напряжения доминируют над турбулентными. В переходном слое вязкие и турбулентные напряжения имеют одинаковый порядок.

Во внутренней области профиль скорости сравнительно слабо зависит от числа Рейнольдса, продольного градиента давления и других внешних условий, что служит основой для построения универсальных соотношений (пристеночных функций), связывающих параметры течения с расстоянием от стенки. Наряду с универсальностью профиля скорости во внутренней области, метод пристеночных функций опирается на использование гипотезы о локальном равновесии энергии турбулентных пульсаций и свойство локальной изотропности диссипирующих вихрей.

5.2. Закон стенки. В вязком подслое вязкие напряжения доминируют над рейнольдсовыми, и имеет место линейная зависимость скорости от расстояния до стенки $u^+ = y^+$ (при $0 \leqslant y^+ < 11$).

В логарифмическом слое рейнольдсовые напряжения намного превышают вязкие напряжения, а профиль скорости описывается логарифмическим законом $u^+ = \dfrac{1}{\varkappa} \ln E y^+$ (при $11 \leqslant y^+ < 0.2\delta$, где δ — толщина пограничного слоя). Для гладкой стенки $E = 8.8$.

В буферном слое вязкие и рейнольдсовые напряжения имеют одинаковый порядок. Сшивая профили скорости в вязком подслое и логарифмическом слое, нетрудно получить, что $u^+ = A \ln y^+ + B$ (при $5 < y^+ < 30$), где $A = 4.94$, $B = -2.96$.

Закон стенки рассматривается как решение уравнений изменения количества движения в турбулентном пограничном слое, полученное при использовании модели пути смешения Прандтля и пренебрежении конвективными членами и градиентом давления. Обычно считается, что закон стенки выполняется при $30 < y^+ < 200$, и первый от стенки расчетный узел располагается в этом интервале.

Во многих случаях наблюдается универсальный характер распределения температуры, и закон стенки используется для задания граничных условий при решении уравнения теплопереноса.

При моделировании неравновесных пограничных слоев вместо величин y^+ и u^+ используются их модифицированные значения $y^* = c_\mu^{1/4} k^{1/2} y/\nu$ и $u^* = c_\mu^{1/2} k^{1/2}/u_\tau$.

Реализация метода пристеночных функций зависит от используемой модели турбулентности и требует итерационной процедуры для нахождения сдвиговых напряжений на стенке.

5.3. Особенности реализации. Распределение сдвиговых напряжений полагается однородным в пределах пристеночного контрольного объема. Сдвиговые напряжения на стенке вычисляются по формуле $\tau_w = \mu_e \Delta u/\Delta y$, где Δu и Δy — разности скоростей и координат между стенкой и пристеночным узлом. Учитывая, что $\mu_e = \mu \mathrm{Re}/u^{+2}$, где $\mathrm{Re} = \rho \Delta u \Delta y/\mu = u^+ y^+$, получим $\tau_w = \rho \Delta u^2/u^{+2}$. При использовании k–ε модели сдвиговые напряжения и число Рейнольдса выражаются через кинетическую энергию турбулентности $\tau_w = \dfrac{\rho c_\mu^{1/4} k^{1/2} \Delta u}{\dfrac{1}{\varkappa} \ln (E\mathrm{Re})}$, $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho c_\mu^{1/4} k^{1/2} \Delta y}{\mu}$.

При $\mathrm{Re} \leqslant 140$ распределение скорости описывается соотношением

$$0 = u^+ + \left[\exp\left(\varkappa u^+\right) - 1 - \varkappa u^+ - \frac{1}{2}(\varkappa u^+)^2 - \frac{1}{6}(\varkappa u^+)^3\right] \exp(-\varkappa B) - \frac{\mathrm{Re}}{u^+}. \tag{5}$$

Для решения нелинейного уравнения (5) применяется метод Ньютона. Итерации начинаются с $u^+ = \mathrm{Re}^{1/2}$ (в ламинарном подслое $u^+ = y^+$).

При $\mathrm{Re} > 140$ скорость u^+ находится из логарифмического распределения, которое записывается в виде

$$y^+ = u^+ + \left[\exp\left(\varkappa u^+\right) - \varkappa u^+ - \frac{1}{2}(\varkappa u^+)^2 - \frac{1}{6}(\varkappa u^+)^3\right] \exp(-\varkappa B), \tag{6}$$

где $B = 5.3$. При помощи взятия натурального логарифма от (6) получим соотношение

$$0 = u^+ - B - \frac{1}{\varkappa} \ln\left\{\exp(-\varkappa B)\left[1 + \varkappa u^+ + \frac{1}{2}(\varkappa u^+)^2 + \frac{1}{6}(\varkappa u^+)^3\right] + \frac{\mathrm{Re}}{u^+} - u^+\right\}. \tag{7}$$

Для решения нелинейного уравнения (7) применяется метод Ньютона. В качестве начального приближения используется соотношение $u^+ = B + \dfrac{1}{\varkappa} \ln \mathrm{Re}$. Соотношение (7) дает более быструю сходимость метода Ньютона, чем (6).

Как и (6), закон стенки для температуры записывается в виде

$$y^+ = \frac{h^+}{\mathrm{Pr}_t} + \left[\exp\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right) - 1 - \frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right)^3\right]\exp\bigl[-\varkappa(B+P)\bigr], \qquad (8)$$

где $P = 9.24\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_t} - 1\right)\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_t}\right)^{-1/4}$.

Нелинейное уравнение (8) также решается при помощи метода Ньютона. Учитывая, что тепловой поток в стенку определяется соотношениями $q_w = \rho u_\tau \frac{\Delta h}{h^+}$ и $q_w = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\frac{\Delta h}{\Delta y}$, приравнивая и выражая μ_t, получим $\mu_t = \mathrm{Pr}_t\left(\frac{\mathrm{Re}}{u^+h^+} - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\mu$. Температура при $\mathrm{Re} < 140$ находится из уравнения

$$0 = \frac{h^+}{\mathrm{Pr}_t} + \left[\exp\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right) - 1 - \frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\varkappa h^+}{\mathrm{Pr}_t}\right)^3\right]\exp\left[-\varkappa(B+P)\right] - \frac{\mathrm{Re}}{u^+}.$$

При использовании k–ε модели выражение для T^+ имеет вид

$$T^+ = \begin{cases} \mathrm{Pr}\, y^+ + \frac{1}{2}\,\mathrm{Pr}\,\frac{\rho c_\mu^{1/4}\, k^{1/2}}{q_w}\,\Delta u^2 & \text{при } y^+ \leqslant y_T^+, \\ \mathrm{Pr}\left[\frac{1}{\varkappa}\,\ln(Ey^+) + P\right] + \frac{1}{2}\,\frac{\rho c_\mu^{1/4}\, k^{1/2}}{q_w}\bigl[\mathrm{Pr}_t\Delta u^2 + (\mathrm{Pr} - \mathrm{Pr}_t)u_c^2\bigr] & \text{при } y^+ > y_T^+, \end{cases}$$

где y_T^+ соответствует точке сшивки решений.

6. Слабые граничные условия. Слабые граничные условия реализуются через расчет касательной скорости на стенке. Предлагается два варианта их реализации, различающихся способом выбора и методом расчета потоков через грани пристеночного контрольного объема.

6.1. Выбор контрольного объема. При дискретизации уравнений Навье–Стокса по методу контрольного объема используется контрольный объем, совпадающий с ячейкой сетки (cell-centered volume), или контрольный объем, центрированный относительно узла сетки (vertex-centered volume). Несмотря на то, что выбор контрольного объема, центрированного относительно узла, требует примерно в шесть раз большего объема памяти по сравнению со случаем, когда контрольный объем совпадает с ячейкой, а также более мелкого шага сетки около стенки, он позволяет получить более точные результаты [1]. Внутренний и граничный контрольные объемы показаны на рис. 3.

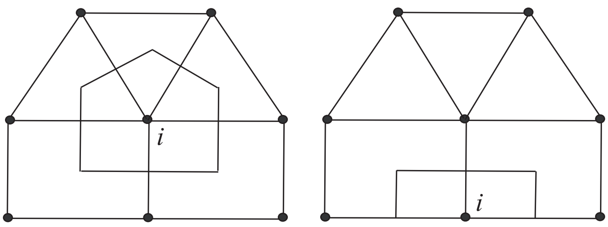


Рис. 3. Внутренний (а) и граничный (б) контрольные объемы, центрированные относительно узла

В методе пристеночных функций на стенке используются граничные условия непротекания и прилипания для нормальной и касательной скорости ($v_n = v_\tau = 0$).

При постановке слабых граничных условий условие непротекания для нормальной скорости сохраняется ($v_n = 0$), а касательная скорость рассчитывается исходя из сдвиговых напряжений на стенке ($v_\tau \neq 0$), распределение которых полагается однородным в пределах контрольного объема.

6.2. Контрольный объем, совпадающий с ячейкой. Слабые граничные условия реализуются через расчет сдвиговых напряжений на стенке, которые добавляются в невязку, обусловленную дискретизацией вязких потоков через грани пристеночного контрольного объема (грани, лежащие на стенке, не дают вклада в невязку, поскольку $v_n = 0$).

Напряжение сдвига рассчитывается по формуле $\tau_w = \mu_e \Delta q S/\Delta y$, где Δy — расстояние от пристеночного узла до стенки, Δq — разность касательных скоростей между пристеночным узлом и стенкой, S — площадь грани.

Величина напряжения, приложенного к площадке с нормалью $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$, равняется

$$\tau_n = \tau_x n_x + \tau_y n_y + \tau_z n_z,$$

где $\tau_x = \tau_w \dfrac{u_{\tau 2} - u_{\tau 1}}{\Delta q}$, $\tau_y = \tau_w \dfrac{v_{\tau 2} - v_{\tau 1}}{\Delta q}$, $\tau_z = \tau_w \dfrac{w_{\tau 2} - w_{\tau 1}}{\Delta q}$. Составляющие касательной скорости в локальной системе координат $\{u_\tau, v_\tau, w_\tau\}$ связаны с декартовыми составляющими скорости $\{u, v, w\}$ при помощи соотношений $u_\tau = u - v_n n_x$, $v_\tau = v - v_n n_y$, $w_\tau = w - v_n n_z$, где $v_n = u n_x + v n_y + w n_z$. В методе пристеночных функций $u_{\tau 1} = v_{\tau 1} = w_{\tau 1} = 0$.

Полученные значения вязких напряжений, учитывающие вклад касательной скорости на стенке, добавляются в невязку, связанную с дискретизацией вязких потоков $R_i^V + \tau_{in}$, где $\tau_{in} = \tau_i - \tau_n n_i$. Расчет касательной скорости на стенке через сдвиговые напряжения включается в процедуру дискретизации вязких потоков [1], которая реализуется по отдельности для потоков через внутренние и граничные грани контрольных объемов.

6.3. Контрольный объем, центрированный относительно узла. Слабые граничные условия реализуются через расчет касательной скорости на стенке, которая добавляется в невязку, обусловленную дискретизацией невязких потоков через грани пристеночного контрольного объема.

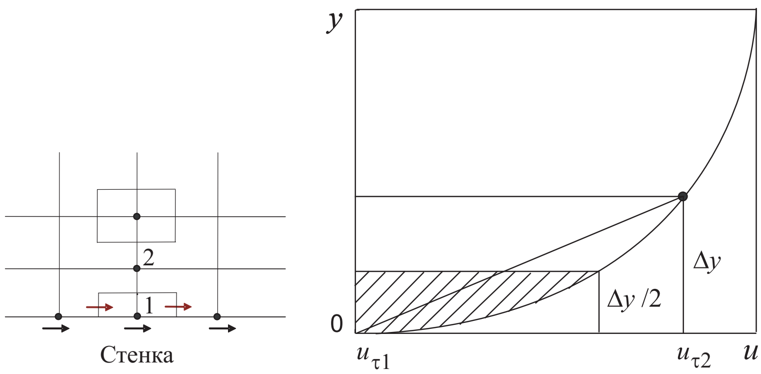
Касательные скорости на стенке находятся из соотношений

$$u_{\tau 1} = u_{\tau 2} - \tau_{xn} \frac{\Delta y}{\mu_e}, \quad v_{\tau 1} = v_{\tau 2} - \tau_{yn} \frac{\Delta y}{\mu_e},$$

$$w_{\tau 1} = w_{\tau 2} - \tau_{zn} \frac{\Delta y}{\mu_e},$$

а величины τ_{xn}, τ_{yn}, τ_{zn} рассчитываются по тем же соотношениям, что и ранее.

С точки зрения программной реализации, расчет касательной скорости включается в процедуру дискретизации невязких потоков, требуя сравнительно небольших модификаций кода [1]. Расчет потоков через внутренние и граничные грани контрольного объема осуществляется по одинаковым соотношениям (на основе одного и того же программного кода).



а) б)

Рис. 4. Пристеночный контрольный объем (а) и профиль скорости в пограничном слое (б). Штриховка соответствует области, используемой для осреднения по логарифмическому профилю скорости

6.4. Модифицированный подход. В модифицированном подходе логарифмический профиль скорости продолжается вплоть до стенки (вязкий подслой не разрешается, как и в методе пристеночных функций). Касательная скорость на стенке получается при помощи осреднения по логарифмическому распределению скорости в пристеночном контрольном объеме (рис. 4).

Касательная скорость на стенке находится из соотношений

$$u_{\tau 1}^* = u_b \frac{u_{\tau 2} - u_{\tau 1}}{\Delta q}, \quad v_{\tau 1}^* = u_b \frac{v_{\tau 2} - v_{\tau 1}}{\Delta q},$$

$$w_{\tau 1}^* = u_b \frac{w_{\tau 2} - w_{\tau 1}}{\Delta q}.$$

Полученные значения используются для расчета невязки, обусловленной дискретизацией невязких потоков. Скорость потока в пограничном слое $u_b = \mu u_b^+ / \rho \Delta y$, выраженная в пристеночных единицах, рассчитывается с использованием закона стенки (5), что дает

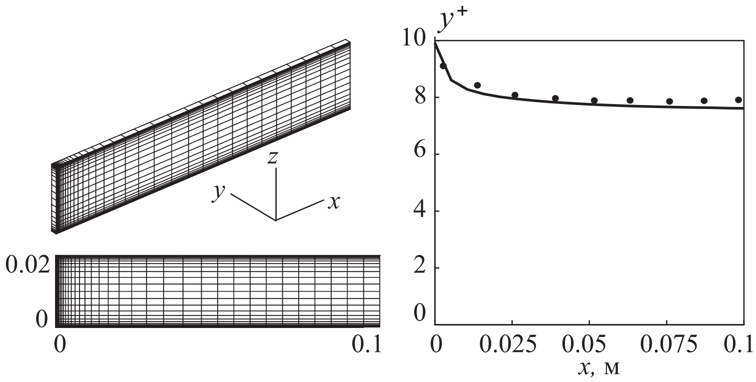


Рис. 5. Расчетная сетка и распределение координаты y^+ вдоль пластины

$$u_b^+ = u^+ y^+ - \frac{1}{2} u^{+2} + \frac{1}{\varkappa} \left(u^+ - y^+\right) + \frac{1}{24 \varkappa E} \left(\varkappa u^+\right)^4, \tag{9}$$

где $y^+ = \mathrm{Re}/u^+$. Соотношение (9) получается при помощи интегрирования распределения (5) в пределах пристеночного контрольного объема с последующим использованием соотношения (6) для упрощения. Как и в методе пристеночных функций, решение нелинейного уравнения, определяющего u^+, производится при помощи метода Ньютона.

С точки зрения программной реализации двух подходов к реализации слабых граничных условий, отличие заключается лишь в способе расчета касательной скорости на стенке (по явным формулам в исходном и с использованием логарифмического профиля скорости в модифицированном подходе).

7. Результаты расчетов. Рассмотрим решение ряда модельных задач и исследуем сеточную зависимость решения при использовании метода пристеночных функций и слабых граничных условий.

7.1. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине. Для течения в пограничном слое на плоской пластине имеются надежные экспериментальные и расчетные данные [8, 9] (результаты получены для несжимаемой жидкости при $\mathrm{M} < 0.2$), которые включены в сборник трудов Стэнфордской конференции по расчетам турбулентных пограничных слоев [10].

Длина расчетной области составляет 100 мм, а ее ширина — 20 мм. Расчеты проводятся на сетке 35×32 со сгущением узлов к передней кромке и поверхности пластины (рис. 5). При этом $y^+ \sim 8$, что сопоставимо с сеткой, используемой в [9] (значки $\bullet$).

Во входном сечении задаются полное давление, полная температура и характеристики турбулентности ($p_{0\infty} = 6.67 \cdot 10^5$ Па, $T_{0\infty} = 300$ К, $k_\infty = 2$ м^2/с^2, $\varepsilon_\infty = 200$ м^2/с^3, что соответствует $U_\infty = 200$ м/с и $\mathrm{M}_\infty = 0.5$). В выходном сечении задается статическое давление ($p = 5.56 \cdot 10^5$ Па). Поверхность пластины считается теплоизолированной. На верхней границе выставляются граничные условия невозмущенного течения. В направлении оси z используются периодические граничные условия.

Сходимость итерационного процесса приведена на рис. 6. Сплошная линия показывает изменение невязки для характеристик потока, а пунктирная линия — для характеристик турбулентности. Для достижения заданного уровня невязки ($r \sim 10^{-16}$) требуется 2309 итераций при использовании метода пристеночных функций и 2138 итераций при постановке слабых граничных условий.

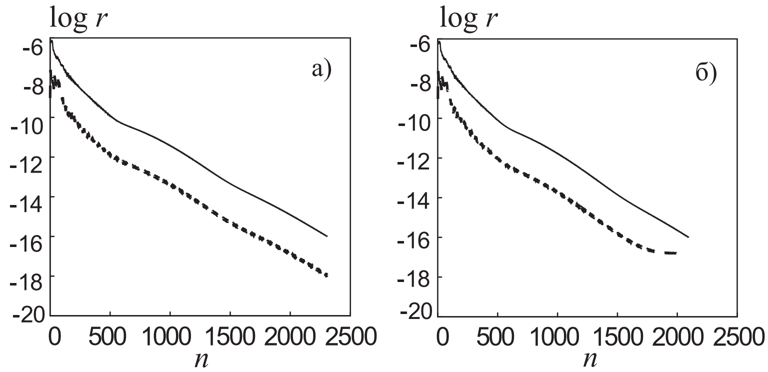


Рис. 6. Изменение невязки в зависимости от числа итераций для метода пристеночных функций (а) и слабых граничных условий (б)

На рис. 7 а приведен профиль скорости в сечении $x = 0.05$ м в сравнении с данными [8, 10] (значки $\bullet$). Сплошная линия соответствует расчету по k–ε модели с пристеночными функциями, а значки $\blacksquare$ — расчету при постановке слабых граничных условий. Полученные результаты хорошо согласуются с данными [8, 10], за исключением области, лежащей на большом удалении от стенки (при $y^+ > 10^2$).

Распределение коэффициента трения $C_f = \tau_w / \rho U_\infty^2$ вдоль пластины показано на рис. 7 б. Расчеты дают более низкие значения коэффициента трения вблизи передней кромки пластины и более высокие значения вдали от нее по сравнению с данными [8, 10].

Касательная скорость на стенке принимает малые положительные значения, составляя около 1 % от скорости потока на внешней границе пограничного слоя (рис. 7 в).

7.2. Турбулентный пограничный слой с градиентом давления. Экспериментальные и расчетные данные для течения в пограничном слое с благоприятным и неблагоприятным градиентом давления получены в [11, 12].

Расчетная область представляет собой криволинейный канал (рис. 8 а, длины приведены в мм). Нижняя стенка является поверхностью пластины, а верхняя стенка состоит из отрезков прямых и дуг окружностей и строится таким образом, чтобы воспроизвести градиент давления, создаваемый экспериментальной установкой [11] (рис. 8 б). Последняя секция (при $x > 120$ мм) делается суживающейся для того, чтобы гарантировать сходимость численного решения. При заданных параметрах течение в выходном сечении является сверхзвуковым, поэтому особенности течения вниз по потоку от указанного сечения не оказывают влияния на параметры вверх по потоку.

Во входном сечении задаются полное давление ($p_{0\infty} = 3.66 \cdot 10^5$ Па), а также температура торможения ($T_{0\infty} = 380$ К), турбулентная вязкость ($\widetilde{\nu}_\infty = 10^{-3}$ м^2/с) или кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации ($k_\infty = 2$ м^2/с^2, $\varepsilon_\infty = 200$ м^2/с^3), а в выходном сечении — статическое давление ($p = 1.013 \cdot 10^5$ Па). Верхняя стенка считается теплоизолированной ($\partial T / \partial n = 0$). Пластина имеет постоянную температуру ($T_w = 300$ К).

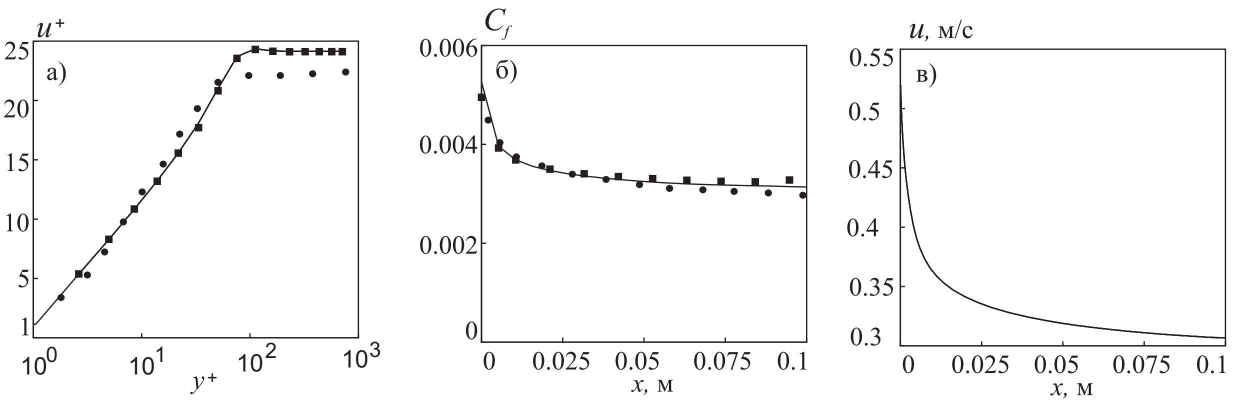


Рис. 7. Профиль скорости в пограничном слое (а), распределение коэффициента трения (б), распределение касательной скорости (в) вдоль пластины

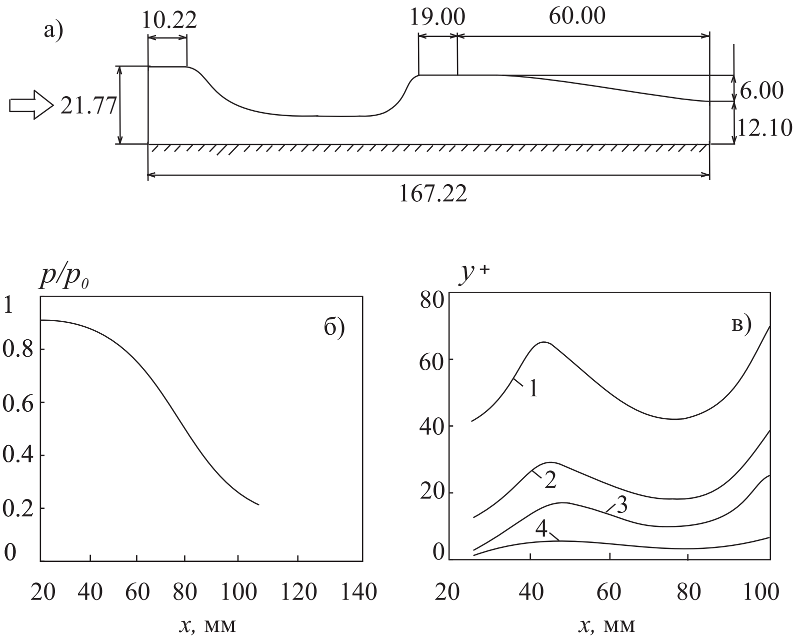


Рис. 8. Геометрия расчетной области (а), распределения давления (б) и пристеночной координаты y^+ (в) вдоль пластины для сеток с 40 (кривая 1), 60 (кривая 2), 80 (кривая 3) и 100 (кривая 4) узлами в поперечном направлении

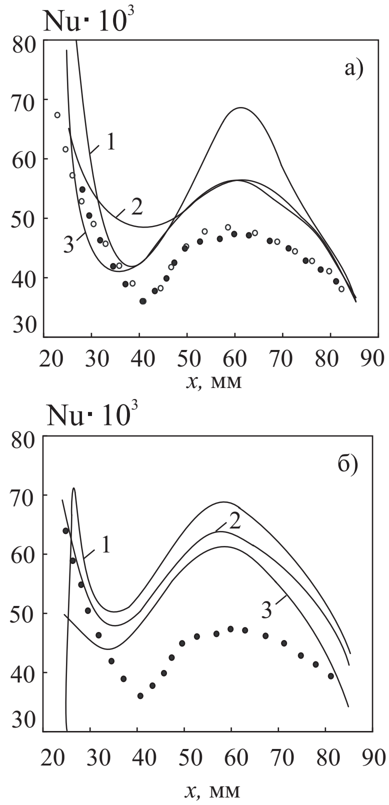


Рис. 9. Распределения локального числа Нуссельта вдоль пластины для k–ε модели (а) и модели Спаларта–Аллмараса (б) при использовании метода пристеночных функций

В расчетах используется несколько сеток, характеризуемых различными значениями y^+ (рис. 8 в). При 40, 60 и 80 узлах поперек канала сетка содержит 2800, 4200 и 7200 узлов соответственно. Сетка, содержащая 20000 узлов, применяется в [12] для расчетов на основе двухслойной модели.

Локальное число Нуссельта находится из соотношения $\mathrm{Nu}_x = q_w x/(\lambda_\infty \Delta T)$, где q_w — тепловой поток в стенку, $\Delta T = T_\infty - T_w$.

Распределения числа Нуссельта показаны на рис. 9 и рис. 10 для метода пристеночных функций и слабых граничных условий. Кривые 1–3 соответствуют расчетам на сетках с 40, 60 и 80 узлами в поперечном направлении, значки $\circ$ — расчету по двухслойной модели [12] (сетка со 100 узлами поперек потока), а значки • — данным физического эксперимента [11].

При удалении от переднего края пластины число Нуссельта сначала уменьшается (минимум имеет место при $x \sim 38$ мм), а затем снова достигает максимума (рис. 9). Распределение, описываемое кривой 3 на рис. 9 а, хорошо предсказывает положение локального минимума. Однако положение локального максимума оказывается неточным и хуже, чем при использовании более грубых сеток, что объясняется низкими значениями y^+ около стенки. Точность результатов, полученных на основе модели Спаларта–Аллмараса и k–ε модели с пристеночными функциями, следует признать неудовлетворительной. В то же время, двухслойная модель дает результаты, достаточно хорошо согласующиеся с данными физического эксперимента [11], но требует увеличения узлов сетки и времени счета на 20 % [12].

Результаты, полученные при использовании слабых граничных условий (рис. 10), лучше согласуются с данными измерений, а влияние пристеночного разрешения сетки при этом смягчается. Однако и в данном случае имеет место достаточно существенный разброс результатов.

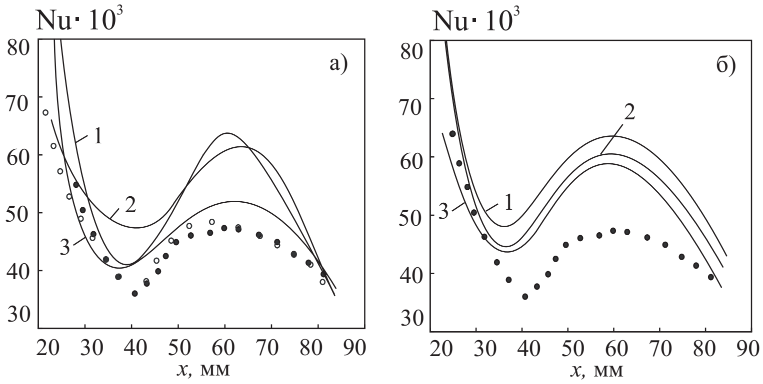


Рис. 10. Распределения локального числа Нуссельта вдоль пластины для k–ε модели (а) и модели Спаларта–Аллмараса (б) при постановке слабых граничных условий

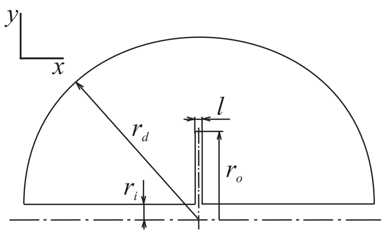


Рис. 11. Геометрия расчетной области

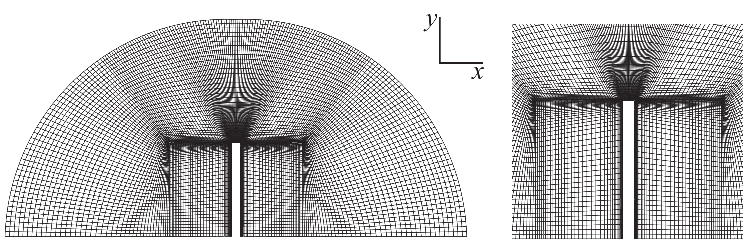


Рис. 12. Грубая сетка около диска

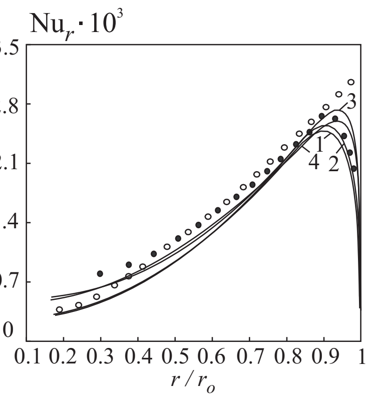


Рис. 13. Распределения локального числа Нуссельта вдоль радиуса диска

7.3. Теплообмен вращающегося диска. Рассмотрим теплообмен плоского диска, равномерно вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости.

Геометрическая модель представляет собой сектор с углом раствора 3° (рис. 11). Внутренний радиус диска составляет $r_i = 76$ мм, внешний — $r_o = 475$ мм, а его ширина — $l = 35$ мм. Протяженность расчетной области выбирается равной $r_d = 2r_o$.

Диск имеет постоянную температуру $T_w = 420$ K и вращается с угловой скоростью $\omega = 200$ 1/с ($\mathrm{Re} = 3.1 \cdot 10^6$). На поверхности втулки задаются условия скольжения (невязкая стенка). На удаленной границе $p_\infty = 1.013 \cdot 10^5$ Па, $k_\infty = 1$ м^2/с^2, $\varepsilon_\infty = 10$ м^2/с^3. В окружном направлении выставляются периодические граничные условия.

Расчеты проводятся на грубой и подробной сетках, содержащих 22062 и 43062 узлов соответственно.

Для грубой сетки $y^+ = 8 \dots 75$ (три узла размещаются при $y^+ < 18$), а для подробной сетки — $y^+ = 3 \dots 29$ (при этом $y^+ \sim 10$ на 1/3 поверхности диска). Обе сетки в окружном направлении имеют один слой ячеек. Свойства сеток приведены в табл. 1, а грубая сетка показана на рис. 12.

Таблица 1

Свойства сеток различной разрешающей способности

Граница	Грубая сетка	Подробная сетка
Диск	40	60
Внешняя граница	30	40
Втулка	160	280
Периодические границы	10800	21200
Удаленная граница	190	220
Общее число узлов	22062	43062
$\min y^+$	8.34	3.25
$\max y^+$	75.01	29.21

Число Нуссельта рассчитывается по формуле $\mathrm{Nu}_r = q_w r/(\lambda_\infty \Delta T)$. При высоких числах Рейнольдса, когда становится существенным нагрев диска за счет трения, при определении перепада температур ΔT вместо температуры стенки T_w используется адиабатическая температура диска $T_a = T_\infty + R\omega^2 r^2/(2c_p)$. Фактор восстановления принимается равным $R = \mathrm{Pr}^{1/3}$.

Результаты расчетов по k–ε модели приведены на рис. 13 в сравнении с экспериментальными данными [13] (значки •) и данными теории [14] (значки ○), основанной на аналогии Рейнольдса между переносом импульса и тепла при квадратичном распределении температуры вдоль радиуса. Кривые 1 и 2 соответствуют грубой, а кривые 3 и 4 — подробной сетке. Кривые 1 и 3 получены на основе метода пристеночных функций, а кривые 2 и 4 — при постановке слабых граничных условий.

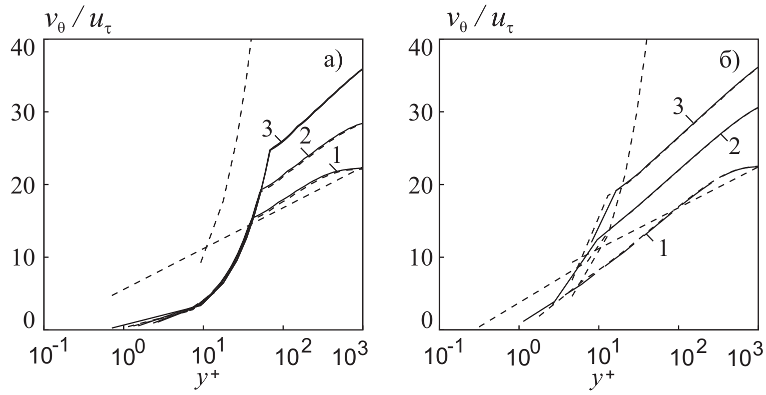


Рис. 14. Профили скорости в пограничном слое при расчете на грубой (фрагмент а) и подробной (фрагмент б) сетке для $r = 0.15$ м (1); 0.3 м (2); 0.45 м (3)

Результаты на грубой сетке недооценивают число Нуссельта на 25 – 30 %, а на подробной — на 10 – 25 %. При использовании метода пристеночных функций и слабых граничных условий расхождение результатов по максимальному значению числа Нуссельта составляет 2 – 8 %.

Теория [14] предсказывает монотонное распределение температуры вдоль радиуса. Результаты расчетов достаточно хорошо описывают теоретическую зависимость при $r/r_o < 0.9$. Немонотонное распределение числа Нуссельта объясняется концевыми эффектами и формированием зоны рециркуляционного течения при $r/r_o > 0.9$.

Профили тангенциальной скорости в относительной системе координат приведены на рис. 14. Пунктирная линия соответствует логарифмическому распределению скорости, а штрихпунктирная линия — линейному профилю скорости в вязком подслое. Распределения, полученные на подробной сетке, хорошо согласуются с теоретическим распределением (законом стенки).

7.4. Течение в каверне, индуцированное вращающимся диском. Течение в каверне с вращающимся диском (рис. 15 а) используется в качестве модельной задачи для тестирования численных методов [15].

Геометрия расчетной области, представляющая собой сектор с углом раствора 3°, изображена на рис. 15 б ($a = 0.05$ м, $c = e = 0.002$ м). При этом $s = 0.03185$ м и $b = 0.5$ м, так что $G = s/b = 0.0637$. Диск вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 257$ 1/с ($\mathrm{Re} = 4.4 \cdot 10^6$).

На поверхности ротора и статора используются граничные условия непротекания и прилипания. Диск считается теплоизолированным, а корпус имеет постоянную температуру ($T_w = 300$ K). В окружном

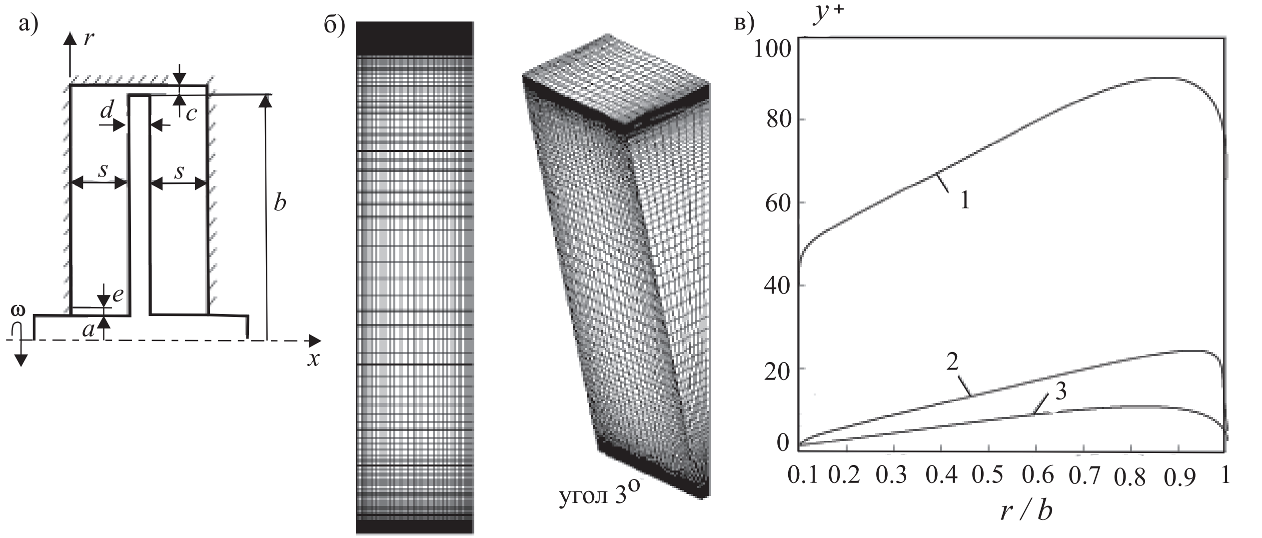


Рис. 15. Геометрия расчетной области (фрагмент а), сетка (фрагмент б) и распределения y^+ вдоль радиуса диска для сеток различной разрешающей способности (фрагмент в)

направлении выставляются периодические граничные условия.

Расчеты на основе k–ε модели проводятся на сетках, содержащих 45000 (сетка 1), 98000 (сетка 2) и 250000 (сетка 3) ячеек. Максимальные значения y^+ составляют 82, 12 и 8 соответственно (рис. 15 в).

Сходимость итерационного процесса на подробной сетке показана на рис. 16. Использование слабых граничных условий позволяет сгладить осцилляции, имеющие место в расчете на основе метода пристеночных функций, а также достичь более никого уровня невязки за меньшее число итераций.

Момент трения находится при помощи интегрирования касательных напряжений

$$M = -2\pi \int\limits_a^b r^2 \tau_{x\theta}\, dr,$$

где $\tau_{x\theta}$ — окружная составляющая касательного трения на стенке. Коэффициент момента сопротивления ротора, смачиваемого жидкостью с двух сторон, находится из соотношения

$$C_M = \frac{4M}{\rho\omega^2 b^5} = 4\pi \int\limits_{a/b}^{1} \left(\frac{r}{b}\right)^2 \frac{\tau_{x\theta}}{\rho\omega^2 b^2}\, d\left(\frac{r}{b}\right).$$

Результаты расчетов приведены в табл. 2 в сравнении с корреляционными зависимостями [16, 17]. Постановка слабых граничных условий позволяет получить достаточно точные результаты на грубой сетке (погрешность составляет 5.56 % против 11.1 % для метода пристеночных функций). Результаты расчетов на промежуточной сетке дают приблизительно одинаковую точность (4.50 % против 5.70 %). На подробной сетке метод пристеночных функций обеспечивает лучшее согласование с экспериментом (1.3 % против 4.34 % для слабых граничных условий).

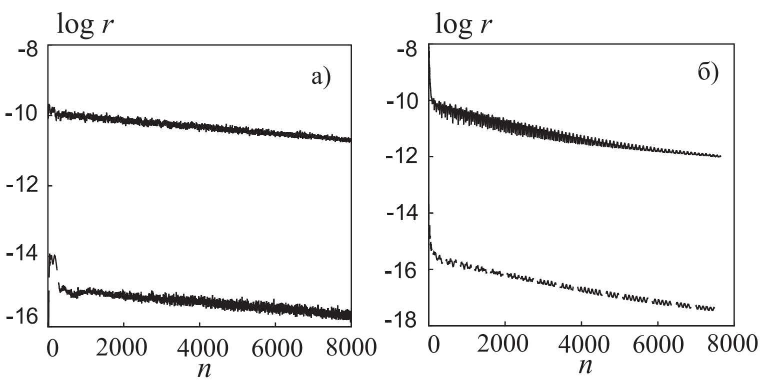


Рис. 16. Изменение уровня невязки в зависимости от числа итераций для метода пристеночных функций (фрагмент а) и слабых граничных условий (фрагмент б)

При использовании двухслойной модели (результаты приведены в [15]) погрешность составляет 2.95 % относительно данных [16] и 9.35 % относительно данных [17].

8. Заключение. Предложены способы реализации слабых граничных условий на стенке при дискретизации осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса по методу контрольного объема, различающиеся способом его выбора (контрольный объем, совпадающий с ячейкой расчетной сетки, и контрольный объем, центрированный относительно узла сетки).

Таблица 2

Результаты расчета коэффициента момента на различных сетках

Погрешность, %	слабые граничные условия			пристеночные функции		
	сетка 1	сетка 2	сетка 3	сетка 1	сетка 2	сетка 3
Относительно [16]	5.56	4.50	4.34	11.1	5.7	1.3
Относительно [17]	11.96	10.90	10.78	17.5	12.1	7.9

На ряде модельных задач газовой динамики исследована сеточная зависимость решения при использовании метода пристеночных функций и слабых граничных условий, а также показано существенное влияние пристеночного шага сетки на результаты численного моделирования.

Слабые граничные условия обладают рядом преимуществ перед методом пристеночных функций. К таким преимуществам можно отнести сравнительно простой подход к программной реализации при использовании различных моделей турбулентности, использование более грубой сетки в пристеночной области, смягчение сеточной зависимости решения. При этом также отпадает необходимость реализации процедуры пристеночного моделирования для температуры.

Основной недостаток слабых граничных условий состоит в том, что они носят численный характер и лишены физической обоснованности. При этом следует отметить, что и пристеночные функции достаточно часто используются в ситуациях, в которых закон стенки неприменим (например, для расчета пограничных слоев, подверженных влиянию градиента давления, или в случае, когда значения пристеночной координаты y^+ находятся ниже рекомендованного значения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волков К.Н.* Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 1. 43–60.
2. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1992. N 92-0439.
3. *Launder B.E., Spalding D.B.* The numerical computation of turbulent flows // Computational Methods in Applied Mechanics Engineering. 1974. **3**. 269–289.
4. *Bredberg J.* On the wall boundary condition for turbulence model // Chalmers University of Technology, Department of Thermo and Fluid Dynamics. Internal Report 00/4. Göteborg, 2000.
5. *Волков К.Н.* Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования течения в канале // Теплофизика и аэромеханика. 2005. **12**, № 3. 365–378.
6. *Wolfshtein M.* The velocity and temperature distribution of one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1969. **12**, N 3. 301–318.
7. *Collis S.S.* Discontinuous Galerkin methods for turbulence simulation // Stanford University, Center for Turbulence Research. Technical Report. 2002.
8. *Wieghardt K., Tillman W.* On the turbulent friction layer for rising pressure // Nat. Adv. Comm. Aero. Report N TM-1314. 1951.
9. *Yoder D.A., Georgiadis N.J.* Implementation and validation of the Chien k–ε turbulence model in the WIND Navier-Stokes code // AIAA Paper. 1999. N 99-0745.
10. *Coles D.E., Hirst E.A.* Computation of turbulent boundary layers // Proceedings of AFOSR-IFP Stanford Conference. Vol. 2. Stanford University. Standord, 1968.
11. *Teekaram A.J.H., Forth C.J.P., Jones T.V.* Film cooling in the presence of mainstream pressure gradients // ASME Journal of Turbomachinery. 1991. **113**. 484–492.
12. *Волков К.Н.* Влияние градиента давления и локализованного вдува на турбулентный теплообмен плоской пластины // ТВТ. 2006. **44**, № 3. 24–32.
13. *Northrop A., Owen J.M.* Heat transfer measurements in rotating-disc systems. Part 1: The free disc // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1988. **9**, N 1. 19–26.
14. *Dorfman L.A.* Hydrodynamic resistance and heat loss of rotating solids. Edinburgh: Oliver & Boyd, 1963.
15. *Волков К.Н.* Момент сопротивления диска, вращающегося в закрытой осесимметричной каверне // Прикладная механ. и техн. физика. 2006. **47**, № 1. 153–160.
16. *Daily J.W., Nece R.* Chamber dimension effects on induced flow and frictional resistance of enclosed rotating discs // ASME Journal of Basic Engineering. 1960. **82**. 217–232.
17. *Kreith F.* Convection heat transfer in rotating systems // Advances in Heat Transfer. 1968. **5**. 129–251.

Поступила в редакцию
09.09.2006