

УДК 519.63

КУСОЧНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

В. Е. Зализняк¹

Предложена конечно-разностная схема для расчета линейных волн, основанная на решении задачи о распаде разрыва и специальном представлении решения в каждом разностном интервале. Схема дает малую диссипацию и дисперсию сеточного решения во всей области допустимых значений числа Куранта и сохраняет монотонность сеточного решения. Приводится пример расчета распространения упругой волны в неоднородном стержне.

Ключевые слова: разностная схема, распространение линейных волн, задача о распаде разрыва, численные методы, разностные уравнения.

1. Введение. Необходимость решения линейных гиперболических систем уравнений возникает в самых различных областях, таких как акустика, вибрация конструкций, сейсмология, ультразвуковая диагностика, распространение электромагнитных волн. Численное решение линейных волновых задач часто осложняется тем, что среда, в которой происходит распространение волн, является неоднородной и/или анизотропной. Вследствие этого разностная схема для решения волновых задач должна обладать следующими свойствами:

- 1) приводить к минимальной диссипации и дисперсии сеточного решения для всех допустимых значений числа Куранта,
- 2) сохранять монотонность точного решения,
- 3) быть экономичной.

Последнее требование означает минимизацию вычислительных затрат, необходимых для получения приближенного решения с требуемой точностью. Часто это связано с порядком аппроксимации разностной схемы. Если решение достаточно гладкое, то схемы более высокого порядка требуют меньшего числа шагов по пространству и времени для достижения заданной точности приближенного решения.

В настоящее время для решения линейных волновых задач применяются самые различные подходы, большинство из которых изначально разрабатывались для решения задач газовой динамики. Краткий обзор этих методов можно найти, например, в работе [1]. Кроме того, обзор и сравнительный анализ некоторых схем приводится в работах [2, 3]. Из методов, разработанных специально для решения линейных задач, можно привести схемы на основе смещенных сеток (например, EFIT [4]) и недиссипативную схему Роу [5]. Вопросу построения экономичных методов посвящена работа [6], где приводятся локально-невязные разностные схемы для гиперболических систем.

Схемы первого порядка сохраняют монотонность точного решения, но приводят к значительной диссипации и дисперсии сеточного решения. Кроме того, такие схемы неэкономичны, так как требуют относительно малых шагов по пространству и времени для достижения заданной точности приближенного решения. Схемы порядка выше первого не являются монотонными. Хотя многие из них являются недиссипативными, они, как правило, приводят к значительной дисперсии сеточного решения, особенно при малых значениях числа Куранта. Для модификации схем высокого порядка с целью придания им свойства монотонности используются различные процедуры (ограничители, введение искусственной вязкости). Это усложняет алгоритм и часто приводит к тому, что модифицированная схема становится нелинейной, а это делает невозможным аналитический анализ ее свойств. В данной работе приводится разностная схема, которая в значительной степени удовлетворяет приведенным выше требованиям и проста в реализации.

Основные идеи построения разностной схемы будут рассматриваться на примере одномерной волновой задачи, которую можно представить в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

¹ Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева, факультет информатики, ул. Лебедевой, 89, 660049, г. Красноярск; e-mail: vicz@iprimus.com.au

Здесь u — скорость частиц среды, p — давление, ρ — плотность среды и c — скорость звука. Уравнения (1) дополняются начальными условиями $u(x, 0) = g_1(x)$, $p(x, 0) = g_2(x)$ и граничными условиями

$$\alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 p(0, t) = f_1(t), \quad \alpha_3 u(l, t) + \alpha_4 p(l, t) = f_2(t).$$

2. Задача о распаде разрыва. Уравнения (1) можно записать в характеристической форме

$$\frac{\partial R}{\partial t} + c \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} - c \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

которая представляет собой два уравнения переноса для инвариантов Римана $R = p + c\rho u$ и $S = p - c\rho u$. Решение исходной системы может быть легко выражено через эти инварианты:

$$u = \frac{1}{2c\rho} (R - S), \quad p = \frac{1}{2} (R + S). \tag{3}$$

Решение уравнений (2) можно записать в виде $R(x, t) = R(x - ct)$ и $S(x, t) = S(x + ct)$. Решения такого вида говорят о том, что инвариант R сохраняется вдоль характеристики $\frac{dx}{dt} = c$, т.е. $R = \text{const}$ при $x - ct = \text{const}$, и, соответственно, инвариант S сохраняется вдоль характеристики $\frac{dx}{dt} = -c$: $S = \text{const}$ при $x + ct = \text{const}$. При построении численного алгоритма будут использоваться решения задачи о распаде разрыва (задачи Римана). Эта задача формулируется следующим образом. Пусть начальное условие для уравнений (1) имеет вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1(x), & x \leq x_0, \\ u_2(x), & x > x_0, \end{cases} \quad p(x, 0) = \begin{cases} p_1(x), & x \leq x_0, \\ p_2(x), & x > x_0. \end{cases}$$

При $t > 0$ эта конфигурация распадается на две волны, распространяющиеся влево и вправо от точки x_0 . Используя свойства инвариантов Римана, построим решение задачи о распаде разрыва, причем нас будут интересовать значения u и p в точке x_0 . Из условия сохранения инвариантов вдоль характеристик следует, что

$$\begin{aligned} R(x_0, t) &= p(x_0, t) + c\rho u(x_0, t) = R(x_0 - ct, 0) = p_1(x_0 - ct) + c\rho u_1(x_0 - ct), \\ S(x_0, t) &= p(x_0, t) - c\rho u(x_0, t) = S(x_0 + ct, 0) = p_2(x_0 + ct) - c\rho u_2(x_0 + ct). \end{aligned}$$

Тогда из соотношений (3) следуют соотношения

$$\begin{aligned} p(x_0, t) &= \frac{R(x_0 - ct, 0) + S(x_0 + ct, 0)}{2} = \frac{p_1(x_0 - ct) + p_2(x_0 + ct)}{2} + c\rho \frac{u_1(x_0 - ct) - u_2(x_0 + ct)}{2}, \\ u(x_0, t) &= \frac{R(x_0 - ct, 0) - S(x_0 + ct, 0)}{2c\rho} = \frac{u_1(x_0 - ct) + u_2(x_0 + ct)}{2} + \frac{p_1(x_0 - ct) - p_2(x_0 + ct)}{2c\rho}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для неоднородной среды соотношения несколько усложняются. Пусть параметры среды имеют следующий вид: $(\rho(x), c(x)) = \begin{cases} (\rho_1, c_1), & x \leq x_0, \\ (\rho_2, c_2), & x > x_0. \end{cases}$ Тогда соотношения (4) можно записать в форме

$$p(x_0, t) = \frac{c_2 \rho_2 R(x_0 - c_1 t, 0) + c_1 \rho_1 S(x_0 + c_2 t, 0)}{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2}, \quad u(x_0, t) = \frac{R(x_0 - c_1 t, 0) - S(x_0 + c_2 t, 0)}{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2}.$$

3. Построение разностной схемы. Введем разностную сетку с узлами (x_n, t_k) и с шагами $x_{n+1} - x_n = h$ и $t_{k+1} - t_k = \tau$. Для того чтобы построить основную схему, проинтегрируем уравнения (1) по площади разностной ячейки $\{x_n \leq x \leq x_{n+1}, t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$ и получим

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} (s(x, t_{k+1}) - s(x, t_k)) dx + A \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s(x_{n+1}, t) - s(x_n, t)) dt = \mathbf{0}.$$

Введем следующие обозначения: $s_{n+1/2}^k = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} s(x, t_k) dx$ — среднее значение величины s на отрезке

$[x_n, x_{n+1}]$, $f_n^k(s) = \left(\begin{matrix} f_n^k(u) \\ f_n^k(p) \end{matrix} \right) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} s(x_n, t) dt$ — поток величины s через узел x_n за время от t_k до t_{k+1} .

С учетом этих обозначений предыдущее соотношение принимает вид

$$s_{n+1/2}^{k+1} = s_{n+1/2}^k - A \frac{f_{n+1}^k(s) - f_n^k(s)}{h}, \quad (5)$$

или при $n = 1, \dots, N-1$ и $k = 0, 1, \dots$

$$u_{n+1/2}^{k+1} = u_{n+1/2}^k - \frac{f_{n+1}^k(p) - f_n^k(p)}{\rho h}, \quad p_{n+1/2}^{k+1} = p_{n+1/2}^k - c^2 \rho \frac{f_{n+1}^k(u) - f_n^k(u)}{h}.$$

Для того чтобы выполнить вычисления по схеме (5), нам необходимо иметь некоторый алгоритм вычисления значений величин в узлах x_n . С. К. Годунов предложил использовать для этой цели решение задачи о распаде разрыва для кусочно-постоянных начальных данных, основанных на средних значениях величин в двух соседних ячейках [7]. Для построения более точного приближенного решения предлагается модификация схемы С. К. Годунова. Одна из основных идей метода состоит в том, что вместо распределения в виде кусочно-постоянной функции приближенное решение на каждом разностном интервале в каждый момент времени t_k задается в виде экспоненциальной функции

$$\begin{pmatrix} u(x, t_k) \\ p(x, t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1n}^k(x) \\ q_{2n}^k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1n}^k \\ d_{4n}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{2n}^k \\ d_{5n}^k \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{x-x_n}{h}\right) + \begin{pmatrix} d_{3n}^k \\ d_{6n}^k \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{x_{n+1}-x}{h}\right). \quad (6)$$

Таким образом, приближенное решение представляет собой кусочно-экспоненциальную функцию, причем в каждом узле сетки это решение непрерывно. По этой причине данный метод получил название РЕМ (Piecewise Exponential Method, кусочно-экспоненциальный метод). Для того чтобы построить такое представление решения, т.е. определить шесть неизвестных параметров, нам необходимо шесть условий. Поэтому наряду со средними на интервале значениями мы также будем вычислять значения приближенного решения в узлах сетки. Тогда параметры d_{mn} , $m = 1, \dots, 6$, определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} q_{1n}^k(x_n) &= u_n^k = d_{1n}^k + d_{2n}^k + d_{3n}^k z_1, \\ \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} q_{1n}^k(x) dx &= u_{n+1/2}^k = d_{1n}^k + (d_{2n}^k + d_{3n}^k) z_2, \\ q_{1n}^k(x_{n+1}) &= u_{n+1}^k = d_{1n}^k + d_{2n}^k z_1 + d_{3n}^k, \quad q_{2n}^k(x_n) = p_n^k = d_{4n}^k + d_{5n}^k + d_{6n}^k z_1, \\ \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} q_{2n}^k(x) dx &= p_{n+1/2}^k = d_{4n}^k + (d_{5n}^k + d_{6n}^k) z_2, \\ q_{2n}^k(x_{n+1}) &= p_{n+1}^k = d_{4n}^k + d_{5n}^k z_1 + d_{6n}^k, \end{aligned} \quad (7)$$

где $z_1 = \exp(-1)$ и $z_2 = 1 - z_1$. Потоки в узлах разностной сетки находятся из решения задачи о распаде разрыва с начальными условиями вида (6). Таким образом, для определения приближенного решения в узле x_n необходимо решить систему (1) с начальными условиями

$$u(x, 0) = \begin{cases} q_{1,n-1}^k(x), & x \leq x_n, \\ q_{1n}^k(x), & x > x_n, \end{cases} \quad p(x, 0) = \begin{cases} q_{2,n-1}^k(x), & x \leq x_n, \\ q_{2n}^k(x), & x > x_n. \end{cases}$$

Используя формулы (4), получим для $n = 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} u(x_n, t_k + \tau) &= u_n^{k+1} = \frac{q_{1,n-1}^k(x_n - c\tau) + q_{1n}^k(x_n + c\tau)}{2} + \frac{q_{2,n-1}^k(x_n - c\tau) - q_{2n}^k(x_n + c\tau)}{2c\rho}, \\ p(x_n, t_k + \tau) &= p_n^{k+1} = \frac{q_{2,n-1}^k(x_n - c\tau) + q_{2n}^k(x_n + c\tau)}{2} + c\rho \frac{q_{1,n-1}^k(x_n - c\tau) - q_{1n}^k(x_n + c\tau)}{2}. \end{aligned}$$

Кроме того, из соотношений (4) следуют и выражения для потоков величин в узле x_n , $n = 1, \dots, N - 1$:

$$f_n^k(u) = \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (q_{1,n-1}^k(x_n - ct) + q_{1n}^k(x_n + ct)) dt + \frac{1}{2c\rho} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (q_{2,n-1}^k(x_n - ct) - q_{2n}^k(x_n + ct)) dt,$$

$$f_n^k(p) = \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (q_{2,n-1}^k(x_n - ct) + q_{2n}^k(x_n + ct)) dt + \frac{c\rho}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (q_{1,n-1}^k(x_n - ct) - q_{1n}^k(x_n + ct)) dt.$$

Полученные выше значения зависят от параметров d_{mn} , $m = 1, \dots, 6$. Выражая эти параметры через значения сеточной функции из соотношений (7), окончательно получим для $n = 1, \dots, N - 1$

$$u_n^{k+1} = a_1 u_n^k + \frac{a_2}{2} (u_{n-1/2}^k + u_{n+1/2}^k) + \frac{a_2}{2c\rho} (p_{n-1/2}^k - p_{n+1/2}^k) + \frac{a_3}{2} (u_{n-1}^k + u_{n+1}^k) + \frac{a_3}{2c\rho} (p_{n-1}^k - p_{n+1}^k),$$

$$f_n^k(u) = b_1 u_n^k + \frac{b_2}{2} (u_{n-1/2}^k + u_{n+1/2}^k) + \frac{b_2}{2c\rho} (p_{n-1/2}^k - p_{n+1/2}^k) + \frac{b_3}{2} (u_{n-1}^k + u_{n+1}^k) + \frac{b_3}{2c\rho} (p_{n-1}^k - p_{n+1}^k),$$

$$p_n^{k+1} = a_1 p_n^k + \frac{a_2}{2} c\rho (u_{n-1/2}^k - u_{n+1/2}^k) + \frac{a_2}{2} (p_{n-1/2}^k + p_{n+1/2}^k) + \frac{a_3}{2} c\rho (u_{n-1}^k - u_{n+1}^k) + \frac{a_3}{2} (p_{n-1}^k + p_{n+1}^k),$$

$$f_n^k(p) = b_1 p_n^k + \frac{b_2}{2} c\rho (u_{n-1/2}^k - u_{n+1/2}^k) + \frac{b_2}{2} (p_{n-1/2}^k + p_{n+1/2}^k) + \frac{b_3}{2} c\rho (u_{n-1}^k - u_{n+1}^k) + \frac{b_3}{2} (p_{n-1}^k + p_{n+1}^k).$$

Коэффициенты a_m , b_m ($m = 1, 2, 3$) имеют следующий вид:

$$a_1 = \frac{-z_2^2 + z_1(1 - z_3) + (1 - 2z_1)(z_1 + z_4)}{z_2(3z_1 - 1)}, \quad a_2 = \frac{z_3 - z_4}{3z_1 - 1}, \quad a_3 = \frac{-z_2^2 + (1 - 2z_1)(1 - z_3) + z_1(z_1 + z_4)}{z_2(3z_1 - 1)},$$

$$b_1 = \frac{h(z_1 z_3 + (1 - 2z_1)z_4 - z_2^2 r)}{z_2(3z_1 - 1)c}, \quad b_2 = \frac{h(r(1 + z_1) - z_3 - z_4)}{(3z_1 - 1)c}, \quad b_3 = \frac{h(z_1 z_4 + (1 - 2z_1)z_3 - z_2^2 r)}{z_2(3z_1 - 1)c},$$

где $z_1 = \exp(-1)$, $z_2 = 1 - z_1$, $z_3 = 1 - \exp(-r)$, $z_4 = z_1(\exp(r) - 1)$, $r = c\tau/h$. Для линейных (однородных и неоднородных) задач все эти параметры не зависят от времени и поэтому могут быть заданы перед началом основного вычислительного процесса. Таким образом, зная решение в момент времени t_k , можно вычислить решение в следующий момент времени $t_{k+1} = t_k + \tau$.

В современных инструментальных средствах, таких как MATLAB, FORTRAN и др., операции над векторами в значительной степени оптимизированы. Поэтому запишем разностную схему (5) в векторной форме, из которой непосредственно и следует более эффективная программная реализация алгоритма. Для записи схемы в векторной форме введем следующие обозначения:

$$\mathbf{u}_a^k = \begin{pmatrix} u_{1/2}^k \\ \dots \\ u_{N-1/2}^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_b^k = \begin{pmatrix} u_0^k \\ \dots \\ u_N^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_a^k = \begin{pmatrix} p_{1/2}^k \\ \dots \\ p_{N-1/2}^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_b^k = \begin{pmatrix} p_0^k \\ \dots \\ p_N^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_u^k = \begin{pmatrix} f_0^k(u) \\ \dots \\ f_N^k(u) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_p^k = \begin{pmatrix} f_0^k(p) \\ \dots \\ f_N^k(p) \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица C — оператор сдвига. Тогда схему (5) можно записать в виде

$$\mathbf{u}_a^{k+1} = \mathbf{u}_a^k - \frac{C\mathbf{f}_p^k - \mathbf{f}_p^k}{\rho h}, \quad \mathbf{p}_a^{k+1} = \mathbf{p}_a^k - \frac{(C\mathbf{f}_u^k - \mathbf{f}_u^k)\rho c^2}{h}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Расчет граничных условий. Рассмотрим теперь расчет граничных условий. В некоторой ограниченной области в граничных точках задаются зависимости скорости или давления от времени (и от координат для многомерных задач). В случае задачи Коши граничные условия отсутствуют, т.е. предполагается, что волна распространяется в бесконечной области. Расчетная область, естественно, должна быть конечной. Поэтому на границах этой области следует поставить некоторые граничные условия, которые моделируют уход волны на бесконечность, т.е. такие условия, которые не приводят к появлению отраженной волны. Граничные условия такого типа часто называют поглощающими или неотражающими

граничными условиями. В одномерном случае волновые уравнения можно представить в виде (2). Первое из уравнений (2) описывает волну, распространяющуюся вправо, а второе уравнение — волну, распространяющуюся влево. Тогда отсутствие отраженной волны на левой границе (в точке $x = 0$) означает, что в этой точке $R = 0$, т.е. $p(0, t) + c\rho u(0, t) = 0$. Аналогично, условие неотражения на правой границе дает $S = 0$: $p(l, t) - c\rho u(l, t) = 0$. В общем случае граничные условия в точке $x = 0$ можно записать в виде $\alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 p(0, t) = f_1(t)$, а условия в точке $x = l$ — в виде $\alpha_3 u(l, t) + \alpha_4 p(l, t) = f_2(t)$.

Состояние в точке $x = 0$ определяется волной, движущейся влево, и зависит от значений u и p в ячейке, примыкающей к границе. Тогда в течение времени $t_k \leq t \leq t_k + \tau$ из условия сохранения инварианта S следует

$$\begin{aligned} p_0^{k+1} - c\rho u_0^{k+1} &= a_1(p_0^k - c\rho u_0^k) + a_2(p_{1/2}^k - c\rho u_{1/2}^k) + a_3(p_1^k - c\rho u_1^k), \\ f_0^k(p) - c\rho f_0^k(u) &= b_1(p_0^k - c\rho u_0^k) + b_2(p_{1/2}^k - c\rho u_{1/2}^k) + b_3(p_1^k - c\rho u_1^k). \end{aligned} \quad (8)$$

Поэтому значения и потоки величин в граничном узле вычисляются из соотношений (8) и из следующих

соотношений: $\alpha_1 u_0^{k+1} + \alpha_2 p_0^{k+1} = f_1(t_{k+1})$, $\alpha_1 f_0^k(u) + \alpha_2 f_0^k(p) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_1(t) dt$. Аналогично, состояние в точке $x = l$ определяется волной, движущейся вправо, и условие сохранения инварианта R дает

$$\begin{aligned} p_N^{k+1} + c\rho u_N^{k+1} &= a_1(p_N^k + \rho u_N^k) + a_2(p_{N-1/2}^k + c\rho u_{N-1/2}^k) + a_3(p_{N-1}^k + c\rho u_{N-1}^k), \\ f_N^k(p) + c\rho f_N^k(u) &= b_1(p_N^k + \rho u_N^k) + b_2(p_{N-1/2}^k + c\rho u_{N-1/2}^k) + b_3(p_{N-1}^k + c\rho u_{N-1}^k), \end{aligned}$$

а граничные условия записываются в форме $\alpha_3 u_N^{k+1} + \alpha_4 p_N^{k+1} = f_2(t_{k+1})$, $\alpha_3 f_N^k(u) + \alpha_4 f_N^k(p) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_2(t) dt$.

5. Свойства схемы РЕМ для одномерного уравнения. Дифференциальное приближение схемы РЕМ по своей структуре совпадает с дифференциальным приближением для схемы С. К. Годунова:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_{n+1/2}, t_k) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(x_{n+1/2}, t_k) = \frac{1}{2} ch g(r) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{n+1/2}, t_k) + O(h^2 + \tau^2), \quad g(r) = 1 - r + \frac{z_4 - z_3}{z_2 r},$$

т.е. схема кусочно-экспоненциального метода имеет первый порядок по h и τ . Однако коэффициент аппроксимационной вязкости для этой схемы очень мал и $\max_{r \leq 1} g(r) \approx 6 \times 10^{-3}$, поэтому следует ожидать слабого затухания разностного решения. Более того, на реальных сетках эта схема может давать меньшую ошибку аппроксимации по сравнению со схемами более высокого порядка, когда решение в некоторых точках имеет большой градиент.

Для анализа устойчивости схемы представим решение в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1/2}^k \\ p_{n+1/2}^k \end{pmatrix} = \lambda^k \begin{pmatrix} u_a \\ p_a \end{pmatrix} \exp(i\alpha(n + 1/2)), \quad \begin{pmatrix} u_n^k \\ p_n^k \end{pmatrix} = \lambda^k \begin{pmatrix} u_b \\ p_b \end{pmatrix} \exp(i\alpha n).$$

Подставляя эти выражения в разностную схему, получим однородную систему уравнений для неизвестных постоянных (u_a, p_a, u_b, p_b) . Из равенства нулю определителя матрицы этой системы следует уравнение на собственные значения оператора перехода $\lambda(\alpha)$. Анализ этих значений показывает, что схема устойчива при $r \leq 1$.

При численном решении волновых задач возникает затухание и дисперсия сеточного решения, что связано с формой разностных уравнений. Анализ этих свойств проводится на основе дисперсионного соотношения вида $\omega = \omega(k, \tau, h)$, которое следует из подстановки в разностную схему решения вида $\mathbf{s}_n^k = \mathbf{s}^* \exp(i(\omega t_k - kx_n))$, где ω — частота и $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Сравнивая это соотношение с соответствующим дисперсионным соотношением для дифференциального уравнения, которое эта схема аппроксимирует, мы можем анализировать свойства данной схемы. Сеточное решение будет затухать как $\exp(-(\text{Im } \omega)t) = \exp(-\gamma t)$, а соотношения $\frac{\text{Re } \omega}{k} = c_{fs}$, $\frac{d}{dk} \text{Re } \omega = c_{gs}$ дают фазовую и групповую скорости сеточного решения соответственно. Дисперсионное соотношение для схемы (5) имеет вид

$$\gamma\tau = -\frac{1}{2} \ln(g_1^2(kh) + g_2^2(kh)), \quad c_{gs} = c \frac{g_4(kh)g_1(kh) - g_3(kh)g_2(kh)}{r(g_1^2(kh) + g_2^2(kh))},$$

где

$$g_1(\alpha) = 1 - \frac{2c}{h} \sin^2(\alpha/2)(b_2 + 2b_3 \cos(\alpha/2)), \quad g_2(\alpha) = \frac{2c}{h} \sin(\alpha/2)(b_2 \cos(\alpha/2) + b_3 \cos(\alpha) + b_1),$$

$$g_3(\alpha) = -\frac{2c}{h} \sin(\alpha)(b_2 \cos(\alpha/2) + b_3(2 - 3 \sin^2(\alpha/2))),$$

$$g_4(\alpha) = \frac{c}{h} \left(\cos(\alpha)(b_2 + b_3 \cos(\alpha/2)) \right) + \frac{c}{h} \left(\cos(\alpha/2)(b_1 - 3b_3 \sin^2(\alpha/2)) \right).$$

Минимальная длина волны, которая может быть представлена на сетке, составляет $\lambda = 4h$ ($kh = \pi/2$). Гармоники с такой длиной волны сильнее всего подвержены влиянию диссипации и дисперсии. Для длин волн, много бóльших пространственного шага, диссипация и дисперсия приближенного решения уменьшаются.

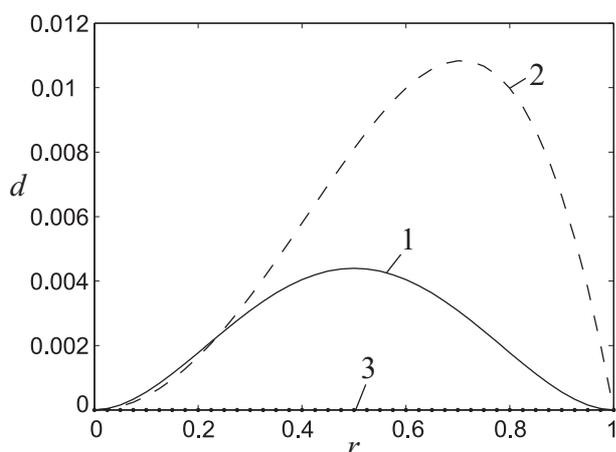


Рис. 1. Зависимость параметра диссипации d от числа Куранта для $kh = \pi/4$: 1 — схема РЕМ; 2 — схема Лакса-Вендроффа, 3 — схема Роу

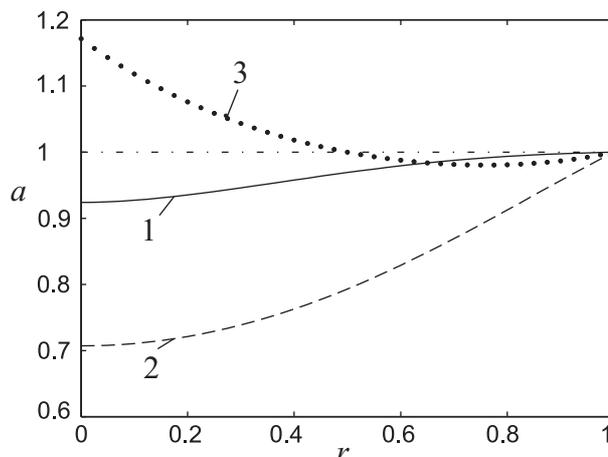


Рис. 2. Зависимость параметра a от числа Куранта для $kh = \pi/4$: 1 — схема РЕМ; 2 — схема Лакса-Вендроффа, 3 — схема Роу

На рис. 1 и 2 представлены зависимости параметра диссипации $d = \gamma\tau$ и безразмерной групповой скорости $a = c_{gs}/c$ от числа Куранта (фазовая и групповая скорость для уравнений (1) равна c). Приводятся результаты для схемы РЕМ, а также для схемы Лакса-Вендроффа [8] и недиссипативной схемы Роу [5], которые являются схемами второго порядка.

6. Пример: упругая волна в неоднородном стержне. Рассмотрим неоднородный стержень длины l .

Система уравнений, описывающая распространение упругой волны в стержне, аналогична системе (1) и имеет вид

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = E(x) \frac{\partial u}{\partial x},$$

где σ — напряжение и E — модуль Юнга. Пусть зависимость параметров среды от координаты имеет кусочно-постоянный вид:

$$E(x) = \begin{cases} 0.25, & 0 \leq x \leq l/3, \\ 1, & l/3 < x < 2l/3, \\ 0.03125, & 2l/3 \leq x \leq l, \end{cases}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq l/3, \\ 1, & l/3 < x < 2l/3, \\ 0.5, & 2l/3 \leq x \leq l; \end{cases}$$

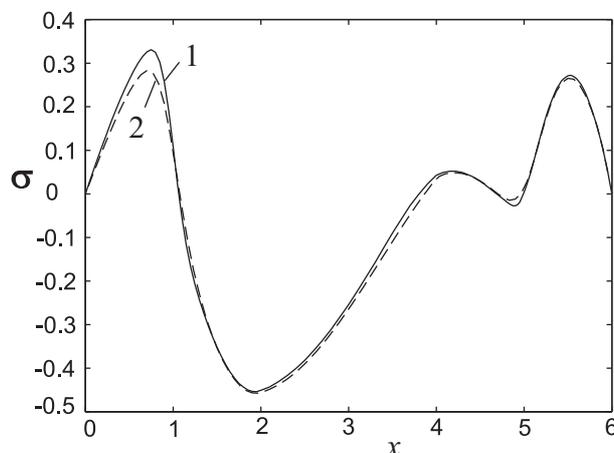


Рис. 3. Распределение напряжения в момент времени $t = 29.7$; 1 — точное решение, 2 — приближенное решение

$$\text{тогда } c(x) = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq x \leq l/3, \\ 1, & l/3 < x < 2l/3, \\ 0.25, & 2l/3 \leq x \leq l. \end{cases}$$

В начальный момент времени стержень находится в покое и напряжения в нем отсутствуют: $u(x, 0) = 0$, $\sigma(x, 0) = 0$. На левый конец стержня действует импульс давления в течение времени $0 \leq t \leq t_p$, а правый конец свободен: $\sigma(0, t) = -\sigma_0 \sin(\pi t/t_p)H(t_p - t)$, $\sigma(l, t) = 0$, где H — функция Хевисайда. Точное решение этой задачи можно построить методом характеристик, выбирая переменный шаг по пространству так, чтобы число Куранта равнялось единице во всей области. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $l = 6$, $\sigma_0 = 1$, $t_p = 4$, $h = 0.066$, $\tau = 0.066$. Результаты расчета показаны на рис. 3.

7. Заключение. В случае распространения одномерной волны в однородной среде любая разностная схема дает точное решение, когда число Куранта равно единице. В реальности мы часто имеем дело с неоднородными, анизотропными или нелинейными средами. Тогда скорость распространения возмущений будет переменной и вычисления в каждом узле разностной сетки станут невозможными, если число Куранта близко к единице. При решении многомерных задач условие устойчивости, как правило, требует расчетов с числом Куранта, меньшим единицы. Следовательно, качество приближенного решения будет в значительной мере зависеть от того, как свойства диссипации и дисперсии той или иной схемы зависят от числа Куранта. Приведенные выше результаты показывают, что схема РЕМ приводит к малой диссипации и дисперсии сеточного решения для всех значений числа Куранта. Вычислительные эксперименты показывают, что схема сохраняет монотонность сеточного решения. Все это дает возможность использовать предложенный метод для моделирования распространения акустических, упругих, электромагнитных, тепловых волн и малых возмущений в плазме.

В настоящей работе приводится построение расчетной схемы для одномерной задачи. Распространение предложенного подхода на многомерные задачи можно осуществить на основе метода расщепления по пространственным переменным [9]. Результаты этих исследований будут представлены в последующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. Галанин М.П., Еленина Т.Г. Сравнительный анализ разностных схем для линейного уравнения переноса. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 52. М., 1998.
3. Александрикова Т.А., Галанин М.П. Нелинейная монотонизация схемы К.И. Бабенко для численного решения квазилинейного уравнения переноса. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 62. М., 2003.
4. Fellingner P. et al. Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT — Elastodynamic Finite Integration Technique // Wave motion. 1995. **21**. 47–66.
5. Roe P. Linear bicharacteristic scheme without dissipation // SIAM J. Sci. Comp. 1998. **19**. 1405–1427.
6. Радвогин Ю.Б. Экономичные безусловно устойчивые локально-невязные разностные схемы решения двумерных гиперболических систем. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 35. М., 2003.
7. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976.
8. Lax P.D., Wendroff B. Systems of conservation laws // Comm. Pure Appl. Math. 1960. **13**. 217.
9. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
05.09.2006