УДК 519.6

СПОСОБ СТАБИЛИЗАЦИИ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ

А. В. Сафронов[1]

Рассмотрен алгоритм подавления нефизических скачков, возникающих при расчете зон разрежения сеточно-характеристическим методом в случае смены знака характеристик.

Ключевые слова: газодинамика, задача Римана, распад произвольного разрыва, схема Годунова, сеточно-характеристический метод, зоны разрежения.

1. Постановка задачи. Схема С. К. Годунова численного решения уравнений газодинамики является наиболее эффективной с точки зрения точности и надежности получения решений сложных течений. Метод основан на аппроксимации параметров на границах ячеек разностной сетки с помощью точного решения задачи Римана о распаде газодинамического разрыва. Схематически начальный разрыв газа с различными состояниями в левом и правом полупространстве распадается на три волны: на левую волну, контактный разрыв и правую волну. В зависимости от начального перепада давления левые и правые волны могут быть как волнами разрежения, так и ударными волнами. Точное решение задачи о распаде разрыва требует трудоемкого решения нелинейной системы уравнений методом итераций.

В настоящей статье рассматриваются консервативные варианты сеточно-характеристических методов (СХМ), предложенных в [1–4], которые интерпретируются как схемы с аппроксимацией параметров на границах ячеек разностной сетки на основе приближенного решения задачи о распаде разрыва. Аппроксимация в рамках СХМ соответствует линеаризованному решению задачи о распаде разрыва с двумя скачками типа ударных волн. Данные схемы экономичны и в ряде случаев эффективны, однако в связи с тем, что волны разрежения в задаче распада разрыва не учитываются в случае смены знака характеристик, в численных расчетах появляются нефизические скачки. Достаточно полный обзор СХМ и способов устранения нефизических решений можно найти в работах [5, 6]. В настоящей работе представлен новый способ устранения указанных недостатков СХМ.

2. Разностная схема. Кратко опишем численный метод на примере нестационарных одномерных уравнений газодинамики

$$U_t + F_x = 0, \quad U = \{\rho, \rho u, \rho E\}^{\mathrm{T}}, \quad F(U) = \{\rho u, \rho u^2 + P, \rho u E + Pu\}^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

где U — вектор консервативных переменных, F — вектор потока, ρ — плотность газа, u — скорость, P — давление, $E = \dfrac{P}{\rho(\gamma-1)} + \dfrac{u^2}{2}$ — полная внутренняя энергия на единицу объема, γ — показатель адиабаты.

Разностную схему запишем в консервативном виде: $U_i^{n+1} = U_i^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\,(F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$, где n — номер шага по времени с интервалом Δt, i — номер ячейки сетки по оси x с разбиением Δx.

В рамках СХМ поток на границах ячеек $F_{i+1/2}$ представляется в виде

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}\,(F_{i+1} + F_i) - \frac{1}{2}\,D_{i+1/2}(U_{i+1} - U_i), \tag{2}$$

где D — диссипативная матрица.

Введем в рассмотрение якобиан $A = \dfrac{\partial F}{\partial U}$. В силу гиперболических свойств уравнений (1) матрица A имеет действительные собственные значения, полный набор собственных векторов и представляется в виде $A = R^{-1}\Lambda R$. Здесь $\Lambda = \mathrm{diag}\,(u-c, u, u+c)$ — диагональная матрица собственных значений, соответствующих наклонам характеристик, c — скорость звука, H — полная энтальпия, R — матрица собственных векторов и

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u-c & u & u+c \\ H-uc & u^2/2 & H+uc \end{pmatrix}.$$

[1] Центральный научно-исследовательский институт машиностроения (ЦНИИМаш), ул. Пионерская, д. 4, г. Королев, 141070, Московская область; e-mail: a_safron@korolev-net.ru

Согласно СХМ диссипативная матрица определяется следующим образом:

$$D_{i+1/2} = R^{-1}|\Lambda|R, \tag{3}$$

где $|\Lambda| = \mathrm{diag}\,\big(|u-c|, |u|, |u+c|\big)$.

В работе [1] компоненты матрицы A при вычислениях (3) определяются арифметическим осреднением по параметрам в соседних ячейках сетки. В работе [2] предложен специальный выбор аппроксимации матрицы A с точным выполнением соотношений:

$$F(U_{i+1}) - F(U_i) = A(U_{i+1}, U_i)(U_{i+1} - U_i).$$

Выражения для расчета компонентов матрицы $A(U_{i+1}, U_i)$ согласно "осреднению" Roe [2] имеют вид: $u = \dfrac{su_{i+1} + u_i}{s+1}$, $H = \dfrac{sH_{i+1} + H_i}{s+1}$, $c^2 = (\gamma-1)(H - u^2/2)$, $s = \sqrt{\dfrac{\rho_{i+1}}{\rho_i}}$. В этом случае поток на границах ячеек (2) соответствует линеаризованному решению задачи о распаде разрыва с выполнением соотношений, одиночных на разрывах. Схема Roe хорошо зарекомендовала себя при расчете течений с ударными волнами и контактными разрывами, однако также имеет проблемы, связанные с отсутствием численной диссипации в областях с нулевыми собственными значениями матрицы A [5].

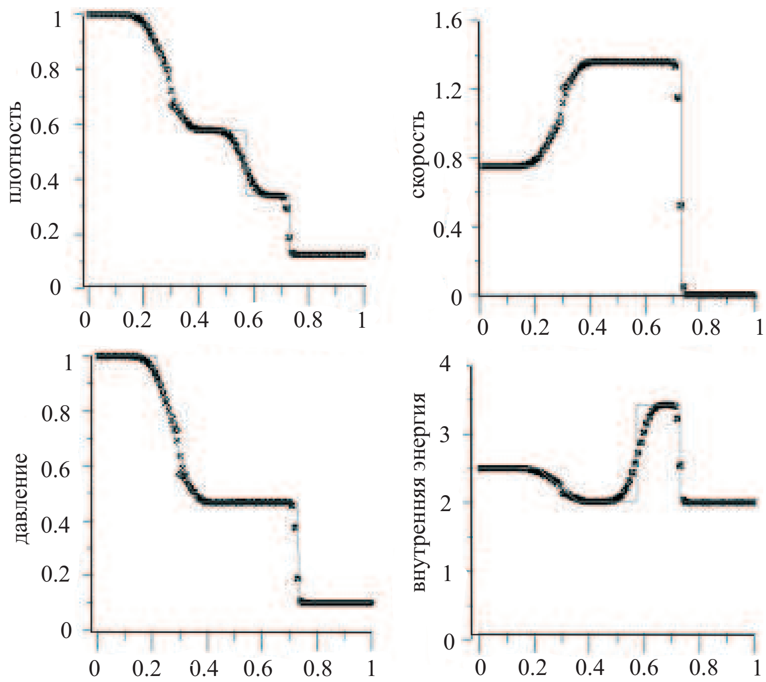

Рис. 1. Точное решение (——) , схема Roe (∘), схема Roe+Stab (×)

Алгоритмы, позволяющие устранить этот недостаток, обычно добавляют в указанных областях численную диссипацию путем корректировки способов вычисления величин собственных значений (процедуры "энтропийной" коррекции), а также включают в рассмотрение "звуковую точку" [5, 6]. Однако в работе [6] показано, что имеющиеся способы не гарантируют получения решения СХМ в случае расчета зон сильного разрежения.

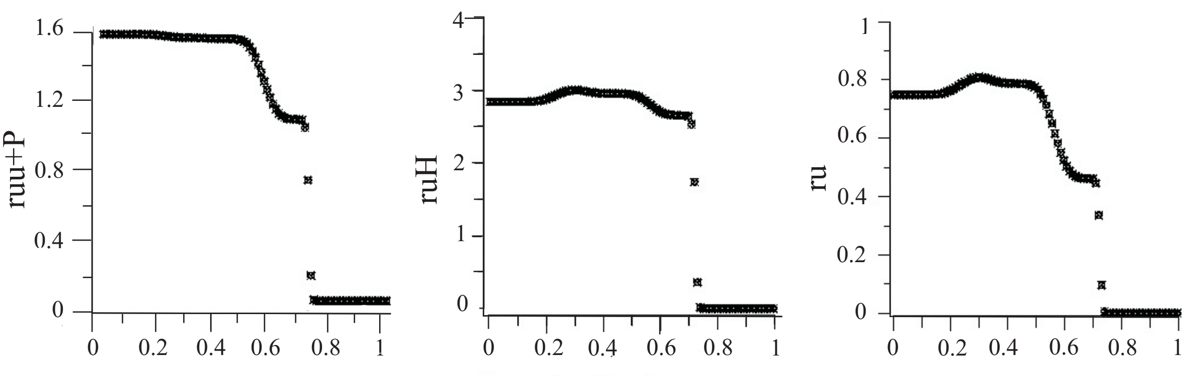

Рис. 2. Схема Roe (∘), схема Roe+Stab (×)

3. Способ регуляризации СХМ. В настоящей работе предлагается следующий "стабилизатор" для подавления нефизических численных решений, появляющихся в СХМ при смене знака характеристик в зонах разрежения: $F_{i+1/2} = F^{\mathrm{Roe}}_{i+1/2} + \mathrm{Stab}_{i+1/2}$, где $F^{\mathrm{Roe}}_{i+1/2}$ — аппроксимация параметров на границах ячеек по схеме [1, 2], Stab — "стабилизатор", имеющий вид

$$\mathrm{Stab}_{i+1/2} = \begin{cases} F\left(\dfrac{U_i + U_{i+1}}{2}\right) - \dfrac{F_i + F_{i+1}}{2}, & u_{i+1} - u_i > 0, \\ 0, & u_{i+1} - u_i < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Как показывает линеаризованный анализ, оператор (4) дает численную диссипацию $\sim \Delta u$ в зонах разрежения (при $\Delta u = u_{i+1} - u_i > 0$). Поскольку на контактных разрывах $\Delta u = 0$, то в этом случае диссипация в (4) отсутствует. На ударных волнах ($\Delta u < 0$) оператор (4) равен 0. Основное сглаживающее свойство (4) состоит в следующем. В зонах появления нефизических скачков при смене знака характеристик составляющие вектора потока не претерпевают разрыв, а скачок "простых" переменных обусловлен тем, что заданный вектор потока допускает два решения, которые соответствуют дозвуковому и сверхзвуковому течениям. Оператор (4) дает численную диссипацию, пропорциональную разности величин скоростей в этих нефизических решениях, и, тем самым, сглаживает скачок.

Как показывают численные расчеты, диссипативные свойства оператора (4) увеличиваются, если вместо вектора консервативных переменных U используется вектор Roe:

$$Y = \{\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho}\,u, \sqrt{\rho}\,H\}^{\mathrm{T}}.$$

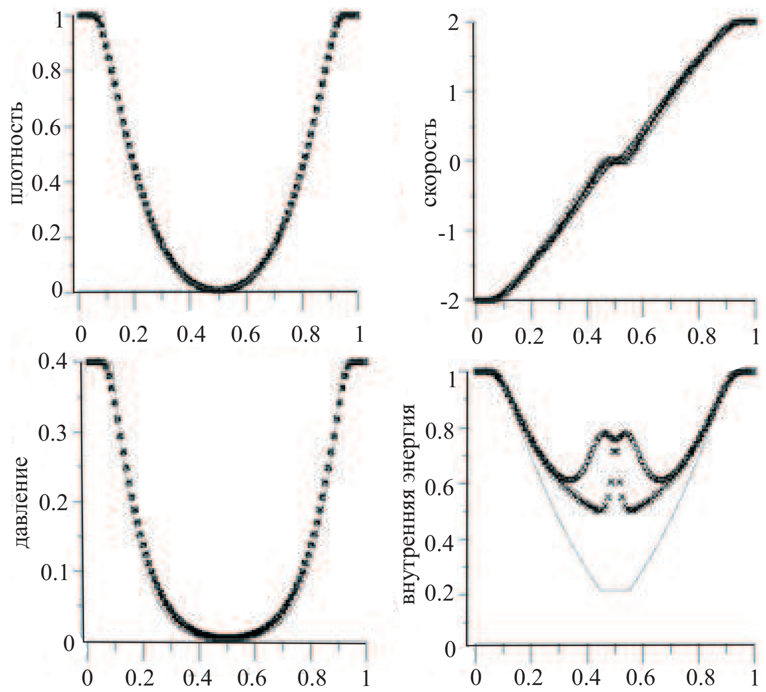

Рис. 3. Точное решение (——) , схема Roe+Stab (○), схема Годунова (×)

Кроме того, в численных расчетах зон разрежения существенно улучшает результаты ограничение, обеспечивающее положительность аппроксимации импульса [7]:

$$(\rho u^2 + P)_{i+1/2} = \max\left((\rho u^2 + P)_{i+1/2}, \mathrm{fix}\right), \quad \text{где} \quad \mathrm{fix} = 10^{-6}. \tag{5}$$

4. Результаты численных расчетов. В качестве иллюстрации на рис. 1 – 4 приведены результаты расчетов одномерных тестовых задач работы [6], решение которых сеточно-характеристическими методами вызывает трудности. Для сравнения на рис. 3 и 4 приведены результаты расчетов по известной схеме Годунова [8]. Исходные данные задач помещены в таблице, где x_0 — начальное положение разрыва, t_k — конечное время.

Начальные условия: в момент времени $t = 0$ при $x < x_0$ параметры газа задавались равными величинам с индексом 1, при $x > x_0$ — величинам с индексом 2. Число разбиений $N = 100$, $\Delta x = 1/100$, $CFL = 0.9$.

Тест №	ρ_1	u_1	P_1	ρ_2	u_2	P_2	x_0	t_k
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.3	0.2
2	1	−2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15

На рис. 1 – 4 указаны также численные и аналитические параметры течения в момент времени t_k.

На рис. 1 приведены результаты расчетов теста 1, полученные по схеме [2, 3] и с учетом предложенного способа регуляризации (4). Как видно из рисунка, в расчетах по "классической" схеме [2, 3] при переходе звуковой точки в волне разрежения (смене знака характеристики $u - c$) появляется нефизический скачок, тогда как применение "стабилизатора" (4) устраняет его. На рис. 2 показаны изменения составляющих вектора потока. Видно, что нефизических скачков потоков нет и в случае "классической" схемы Roe. Из данных рис. 1, 2 видно, что предложенный "стабилизатор" включается главным образом в зонах появления нефизических решений.

Как показано в работе [6], схема [2, 3] с различными имеющимися алгоритмами стабилизации не позволяет провести расчет теста 2. С применением соотношения (4) получено численное решение. На рис. 3 приведены расчеты теста 2 по схеме Roe с учетом (4), а на рис. 4 — по схеме Roe с применением соотношений (4) и (5).

Из данных на рис. 4 видно, что ограничение (5) значительно улучшает результаты при расчете зон сильного разрежения. Этот факт относится и к другим разностным схемам газодинамики на основе приближенного решения задачи о распаде разрыва [7, 9].

Результаты расчетов, приведенные на рис. 4 по схеме Roe с использованием (4) и (5), близки к расчетам по схеме Годунова. При этом рассматриваемая схема в 3–4 раза экономичнее, чем схема [8] с аппроксимацией параметров на границах ячеек на основе точного итерационного решения задачи о распаде разрыва.

Таким образом, предложенный способ регуляризации позволяет адекватно проводить расчет зон сильного разрежения при смене знака характеристик, что значительно расширяет диапазон применимости сеточно-характеристических методов.

Рассмотренный подход эффективен также и для пространственных задач. Подпрограмма на языке FORTRAN для двумерного случая расчета потоков на границах ячеек сетки по схеме [3] с предложенными "заплатками" (4) и (5) может быть получена у автора настоящей статьи.

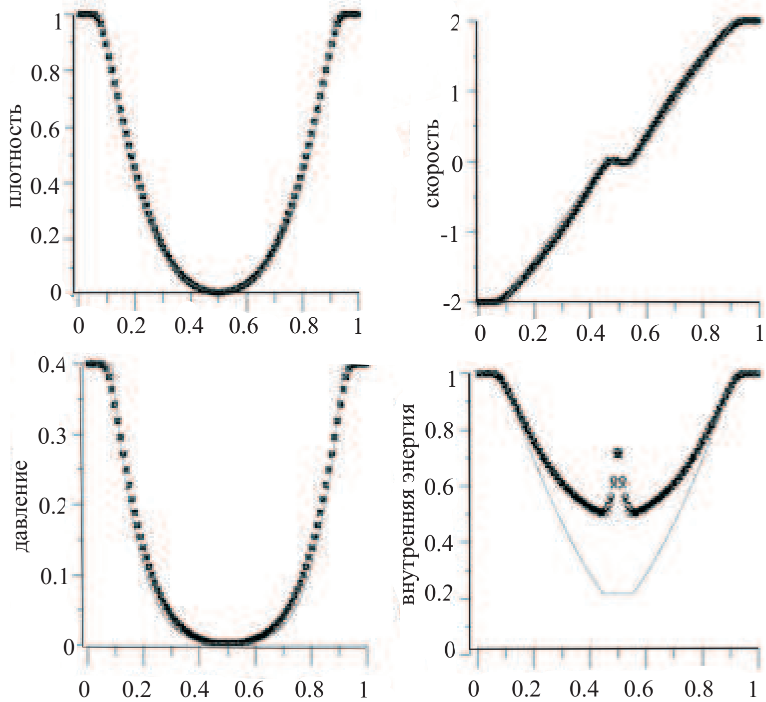

Рис. 4. Точное решение (——) , схема Roe+Stab+fix (○), схема Годунова (×)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодов А.С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // ЖВМ и МФ. 1978. **18**, № 6. 1476–1492.
2. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. **43**. 357–372.
3. *Roe P.L., Pike J.* Efficient construction and utilization of approximate Riemann solutions // Computing Methods in Applied Sciences and Engineering VI. Amsterdam, 1984. 499–518.
4. *Сафронов А.В.* Применение консервативных вариантов сеточно-характеристического метода к расчету сверхзвуковых течений. Деп. в ЦНТИ "Поиск"; аннотирована в СИП, вып. 8. Москва, 1989.
5. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
6. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
7. *Сафронов А.В.* Разностный метод решения нестационарных уравнений газодинамики на основе соотношений на разрывах // Космонавтика и ракетостроение. 2006. Вып. 2 (43). 152–158.
8. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сборник. 1959. **47**, вып. 3. 271–306.
9. *Сафронов А.В.* Метод расчета струй продуктов сгорания при старте // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2006. **4** (http://chemphys.edu.ru/2006-10-23-001.pdf).

Поступила в редакцию
01.12.2006