УДК 517.983

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБРАЩЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В СЛУЧАЕ ИСТОКООБРАЗНОЙ ПРЕДСТАВИМОСТИ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Баев[1]

Исследована задача приближенного решения линейного операторного уравнения с априорной информацией о решении. Рассматривается задача, в которой точное решение принадлежит образу шара при отображении линейным непрерывным оператором. С использованием априорной информации решается задача оптимального восстановления линейного непрерывного функционала. Описан алгоритм нахождения метода и погрешности оптимального восстановления.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 05–01–00049).

Ключевые слова: оптимальное восстановление, истокообразная представимость, операторные уравнения, принцип Лагранжа.

1. Постановка задачи. Пусть Z и U — действительные нормированные пространства, $A : Z \to U$ — линейный непрерывный оператор. Рассмотрим множество $M \subset Z$ и зафиксируем элемент $\overline{z} \in M$. Обозначим $\overline{u} := A\overline{z}$ и рассмотрим задачу поиска элемента $\overline{z}$ из уравнения:

$$Az = \overline{u}, \quad z \in M. \tag{1}$$

В практических задачах не всегда точно известны элемент $\overline{u}$ и оператор A. Информацию об их погрешности зададим так же, как и в [1]. Одной из особенностей задачи (1) является то, что вне зависимости от того, конечна ли размерность пространства U или нет, об элементе $\overline{u}$ известна лишь конечная информация, причем она является неточной, т.е. задана с какой-то погрешностью.

Допустим, что информация об элементе $\overline{u}$ задается набором из m действительных чисел. Введем ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$: $\{g_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим $Y := \mathbb{R}^m$, а j-ю координату вектора $y \in \mathbb{R}^m$ в базисе $\{g_j\}_{j=1}^m$ обозначим y_j. Введем линейные операторы $Q_m : U \to Y$ и $F : Z \to Y$, $F \stackrel{\text{def}}{=} Q_m A$, а задачу (1) перепишем в виде

$$Fz = Q_m\overline{u}, \quad z \in M. \tag{2}$$

Введем ограниченное множество $\Omega \subset Y$, такое, что $\Omega \ni 0$. Пусть в задаче приближенно известен m-мерный вектор $Q_m\overline{u}$, а именно, точно задан элемент $v \in Y$, такой, что $v - Q_m\overline{u} \in \Omega$. Будем также считать, что вместо оператора F мы умеем точно вычислять лишь его приближение — линейный непрерывный оператор F'. Рассмотрим подмножество $\mathcal{O} \subset Y$, такое, что $\mathcal{O} \supset \Omega + (F - F')(M)$ [1]. Легко показать, что $v - F'\overline{z} \in \mathcal{O}$. Всю информацию о погрешности задания оператора A и правой части $\overline{u}$ объединим в множество $\mathcal{O}$, которое будем называть *окрестностью погрешности* задачи (1). Итак, считаем, что в задаче поиска элемента $\overline{z}$ известны M, F', v и $\mathcal{O}$, такие, что $v - F'\overline{z} \in \mathcal{O}$ и $\overline{z} \in M$.

Рассмотрим функционал $\ell \in Z^*$. Вместо элемента $\overline{z}$ в задаче (2) будем искать приближенное значение числа $\ell(\overline{z})$. Пусть W — действительное гильбертово пространство, $V : W \to Z$ — линейный непрерывный оператор. Далее будем рассматривать случай $M = V(S_r)$, где $S_r := \{w \in W \mid \|w\| \leqslant r\}$, $r > 0$. На пространстве W введем функционал $\varkappa^* := \ell \circ V$. В силу линейности и непрерывности ℓ и V этот функционал будет линейным и непрерывным. По теореме Риса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве следует, что функционалу $\varkappa^*$ соответствует вектор $\varkappa \in W$, такой, что для любого $w \in W$ выполнено равенство $\varkappa^*(w) = \langle \varkappa, w\rangle$. Далее угловыми скобками будем обозначать скалярное произведение в гильбертовых пространствах и отождествлять любое гильбертово пространство с его сопряженным пространством.

Задачу оптимального восстановления линейного непрерывного функционала $\varkappa$ поставим так же, как и в [1]. Введем обозначение $B := F'V$. Так как операторы F' и V линейные и непрерывные, то таким же

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, 119992, Москва, Ленинские горы; e-mail: andrewbayev@newmail.ru

будет и оператор B. Любую функцию $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ будем называть *методом восстановления функционала* $\varkappa$ *на множестве* S_r *по информации* $(B, \mathcal{O})$, а *погрешностью метода восстановления* φ будем называть величину (см. [1, 2])

$$\mathcal{E}(\varkappa, S_r, B, \mathcal{O}, \varphi) := \sup_{\substack{w \in S_r, \\ y \in Y:\, y - Bw \in \mathcal{O}}} \bigl|\langle \varkappa, w\rangle - \varphi(y)\bigr| = \sup_{\substack{z \in M, \\ y \in Y:\, y - F'z \in \mathcal{O}}} \bigl|\ell(z) - \varphi(y)\bigr|.$$

Здесь мы учли, что $M = V(S_r)$. Величину

$$E(\varkappa, S_r, B, \mathcal{O}) := \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^Y} \mathcal{E}(\varkappa, S_r, B, \mathcal{O}, \varphi) \tag{3}$$

назовем *погрешностью оптимального восстановления*, а любой $\widehat{\varphi} \in \mathbb{R}^Y$, на котором достигается этот минимум, назовем *методом оптимального восстановления*. Если окрестность погрешности $\mathcal{O}$ является выпуклым и уравновешенным множеством, то среди методов оптимального восстановления существует метод $\widehat{\varphi}$, который линеен, т.е. $\widehat{\varphi} \in Y^*$ [3–6]. Таким образом, inf в (3) можно брать по множеству Y^*.

В дальнейшем задачи на поиск минимума и экстремалей будем записывать следующим образом:

$$f(x) \to \min_x, \quad P(x).$$

Подобная запись означает, что ищется минимум значения функционала f по аргументу x; на месте выражения $P(x)$ будут стоять условия, задающие множество изменения аргумента x; решением такой задачи на экстремум будем считать элемент x, который удовлетворяет условию $P(x)$ и на котором достигается минимум. Таким же образом будем записывать и задачи на поиск максимума. Выпишем задачу поиска метода оптимального восстановления $\widehat{\varphi}$:

$$\sup_{\substack{w \in S_r, \\ y \in Y:\, y - Bw \in \mathcal{O}}} \bigl|\langle \varkappa, w\rangle - \langle \varphi, y\rangle\bigr| \to \min_\varphi, \quad \varphi \in Y^*. \tag{4}$$

Настоящая статья посвящена поиску решения задачи (4) и поиску погрешности оптимального восстановления (3). Их интерпретация такова: приближением для числа $\ell(\,\overline{z}\,)$ считается число $\langle \widehat{\varphi}, v\rangle$, а погрешностью этого приближения считается число $E(\varkappa, S_r, B, \mathcal{O})$. Интерес представляет случай $\varkappa \neq 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только его. Если окрестность погрешности $\mathcal{O}$ в некоторой норме пространства Y является шаром с центром в нуле, то задача (4) решена. Алгоритмы решения этой задачи можно найти, например, в [7, 8]. Здесь излагается еще один алгоритм поиска метода и погрешности оптимального восстановления.

Задача (1) является задачей решения операторного уравнения с известным множеством ограничений M. Но к форме (1) сводятся и некоторые задачи без явной информации о множестве M. Например, информацией о решении может быть истокопредставимость точного решения при помощи компактного оператора, т.е. $\overline{z} \in \operatorname{Im} V$, где V является компактным оператором. Подобная информация встречается в некоторых задачах математической физики. Для такого случая был разработан метод расширяющихся компактов, в котором рассматривается последовательность задач вида (1) с $M = V(S_r)$, где $r \in \mathbb{N}$. Теоремы и примеры алгоритмов для этого метода можно найти в работах [9–12].

2. Схема решения задачи. Сопоставим задаче (4) другую экстремальную задачу, которую назовем ассоциированной к (4) (см. [2]):

$$\langle \varkappa, w\rangle \to \max_{(w,y)}, \quad (w,y) \in W \times Y, \quad w \in S_r, \quad y - Bw \in \mathcal{O}, \quad y = 0. \tag{5}$$

Для поиска погрешности и метода оптимального восстановления будем использовать алгоритм, описанный в [1] и опирающийся на теорему, следующую из результатов [2]. Сформулируем эту теорему [1, 2].

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{O} \subset Y$ выпукло и уравновешено, оператор $B : W \to Y$ линейный. Определим функцию Лагранжа $\mathcal{L} : (W \times Y) \times Y^* \to \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{L}\bigl((w,y),\lambda\bigr) \stackrel{\text{def}}{=} -\langle \varkappa, w\rangle + \langle \lambda, y\rangle. \tag{6}$$

Если элемент $(\widehat{w}, 0) \in W \times Y$ является допустимой точкой в задаче (5) *(т.е. $\widehat{w} \in S_r$, $-B\widehat{w} \in \mathcal{O}$), то*

1) *следующие два условия эквивалентны:* а) $(\widehat{w}, 0)$ *является решением задачи* (5);

б) $\exists\, \widehat{\lambda} \in Y^* : \mathcal{L}\bigl((\widehat{w},0),\widehat{\lambda}\bigr) = \inf\limits_{\substack{w \in S_r, \\ y \in Y:\, y - Bw \in \mathcal{O}}} \mathcal{L}\bigl((w,y),\widehat{\lambda}\bigr)$;

2) *при выполнении этих двух эквивалентных условий* $\varphi = \widehat{\lambda}$ *является решением задачи* (4), *а погрешность оптимального восстановления* (*т.е. значение минимума в задаче* (4)) *такова:*

$$E(\varkappa, S_r, B, \mathcal{O}) = \langle \varkappa, \widehat{w} \rangle \equiv -\mathcal{L}\big((\widehat{w}, 0), \widehat{\lambda}\big). \tag{7}$$

Далее будем считать, что *множество* $\mathcal{O}$ *выпукло и уравновешено.* Аргумент λ функции $\mathcal{L}$ будем называть множителем Лагранжа. Функцию Лагранжа (6) можно рассматривать как линейный функционал $(-\varkappa, \lambda)$ в пространстве $W \times Y$: $\big\langle(-\varkappa, \lambda), (w, y)\big\rangle := \langle -\varkappa, w\rangle + \langle \lambda, y\rangle = \mathcal{L}\big((w, y), \lambda\big)$. Далее всюду будем считать, что решение ассоциированной задачи (5) существует. Обозначим его $(\widehat{w}, 0)$. Преобразуем задачу минимизации функции Лагранжа (см. (7) и п. 1б в теореме 1):

$$\langle -\varkappa, \widehat{w}\,\rangle = \inf_{\substack{w\in S_r,\\ y\in Y:\, y-Bw\in\mathcal{O}}} \big\langle(-\varkappa, \widehat{\lambda}\,), (w, y)\big\rangle \quad\Leftrightarrow\quad 0 = \sup_{\substack{w\in S_r,\\ y\in Y:\, y-Bw\in\mathcal{O}}} \Big(\big\langle(\varkappa, -\widehat{\lambda}\,), (w, y)\big\rangle - \langle \varkappa, \widehat{w}\,\rangle\Big).$$

В итоге заключаем, что задача эквивалентна выполнению неравенства

$$\big\langle(\varkappa, -\widehat{\lambda}\,), (w, y) - (\widehat{w}, 0)\big\rangle \leqslant 0 \tag{8}$$

$$\forall (w, y) \in W \times Y:\ w \in S_r,\ y - Bw \in \mathcal{O}. \tag{9}$$

Мы получили, что задача минимизации функции Лагранжа приобрела вид задачи решения вариационного неравенства. Но отличие состоит в том, что экстремаль задачи нам известна (это элемент $(w, y) = (\widehat{w}, 0)$), а найти требуется функционал $(\varkappa, -\widehat{\lambda}\,)$, для которого выполнено неравенство (8) на множестве, заданном условием (9). Теорема 1 обосновывает следующий алгоритм поиска:

1) находим $(\widehat{w}, 0)$ — решение задачи (5);

2) ищем множитель Лагранжа $\widehat{\lambda}$, при котором функция Лагранжа достигает минимума на $(\widehat{w}, 0)$, т.е. ищем такое $\widehat{\lambda}$, что выполнено неравенство (8) на множестве (9);

3) ответ в задаче будет такой: $\widehat{\lambda}$ — метод оптимального восстановления, $\langle \varkappa, \widehat{w}\,\rangle$ — его погрешность.

3. Решение ассоциированной задачи. При любом $j \in \mathbb{N}$, таком, что $1 \leqslant j \leqslant m$, отображение $w \mapsto (Bw)_j$ является линейным непрерывным функционалом в W. Этому функционалу по теореме Риса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве соответствует вектор $q_j \in W$. Введем обозначения:

$W_B := \operatorname{span}\{q_1, \dots, q_m\}$ — линейная оболочка векторов $q_1, \dots, q_m$, $W_B^{\perp}$ — ее ортогональное дополнение в гильбертовом пространстве W, $W_B^{\perp} = \operatorname{Ker} B$, $W_B = (\operatorname{Ker} B)^{\perp}$;

$p := \dim W_B$ — размерность подпространства W_B, $p \leqslant m$;

$\big\{b_l\big\}_{l=1}^{p} \subset W_B$ — базис в W_B;

$\varkappa_0$ — ортогональная проекция вектора $\varkappa$ на подпространство W_B, т.е. $\varkappa_0$ — единственное решение системы уравнений

$$\langle \varkappa - \varkappa_0, b_l\rangle = 0 \ \ \forall l \in \{1; \dots; p\}, \quad \varkappa_0 \in W_B;$$

$\varkappa_\perp := \varkappa - \varkappa_0, \quad \varkappa_\perp \in W_B^{\perp}$.

Если задача (5) имеет решение, то оно представимо в виде $(\widehat{w}, 0) \in W \times Y$, где $\widehat{w}$ является решением задачи

$$\langle \varkappa, w\rangle \to \max_w, \quad w \in S_r, \quad Bw \in \mathcal{O}. \tag{10}$$

Преобразуем выражение для значения максимума в этой задаче:

$$T \equiv \sup_{\substack{w\in W:\\ \|w\|^2\leqslant r^2,\ Bw\in\mathcal{O}}} \langle \varkappa, w\rangle = \sup_{\substack{w\in W_B,\ x\in W_B^{\perp}:\\ \|w\|^2+\|x\|^2\leqslant r^2,\ Bw\in\mathcal{O}}} \langle \varkappa, w + x\rangle = \sup_{\substack{w\in W_B:\\ \|w\|^2\leqslant r^2,\\ Bw\in\mathcal{O}}} \ \sup_{\substack{x\in W_B^{\perp}:\\ \|x\|^2\leqslant r^2-\|w\|^2}} \langle \varkappa, w + x\rangle =$$

$$= \sup_{\substack{w\in W_B:\\ \|w\|^2\leqslant r^2,\\ Bw\in\mathcal{O}}} \left(\langle \varkappa_0, w\rangle + \sup_{x\in W_B^{\perp}:\, \|x\|^2\leqslant r^2-\|w\|^2} \langle \varkappa_\perp, x\rangle \right).$$

При любом $w \in W_B$, таком, что $\|w\|^2 \leqslant r^2$, выполнено $\sup\limits_{x\in W_B^{\perp}:\, \|x\|^2\leqslant r^2-\|w\|^2} \langle \varkappa_\perp, x\rangle = \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \|w\|^2}$, а максимум достигается на элементе $x = \xi(w) \in W_B^\perp$, где

$$\xi(w) = \begin{cases} \dfrac{\varkappa_\perp}{\|\varkappa_\perp\|} \sqrt{r^2 - \|w\|^2}, & \varkappa_\perp \neq 0, \\ 0, & \varkappa_\perp = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Пусть $D := \{w \in W_B \mid \|w\|^2 \leqslant r^2\}$. Рассмотрим функционал $f : D \to \mathbb{R}$, $f(w) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \varkappa_0, w\rangle + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \|w\|^2}$. Получаем, что

$$T = \sup_{w \in W_B:\ \|w\|^2 \leqslant r^2,\ Bw \in \mathcal{O}} \left(\langle \varkappa_0, w\rangle + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \|w\|^2} \right) = \sup_{w \in D:\ Bw \in \mathcal{O}} f(w). \tag{12}$$

Пусть sup в (12) достигается на элементе $\overline{w} \in D$: $B\overline{w} \in \mathcal{O}$. Для решения задачи (10) остается найти $\overline{w}$; тогда ее решением является $\widehat{w} = \overline{w} + \xi(\overline{w})$. Если $\varkappa_0 = 0$, то $\overline{w} = 0$, $T = \|\varkappa_\perp\|\, r = \|\varkappa\|\, r$ и $\widehat{w} = \xi(0) = \dfrac{r}{\|\varkappa_\perp\|}\, \varkappa_\perp = \dfrac{r}{\|\varkappa\|}\, \varkappa$. Рассмотрим случай $\varkappa_0 \neq 0$. Найдем все экстремали задачи

$$f(w) \to \max_w, \quad w \in D. \tag{13}$$

Так как $\varkappa_0 \neq 0$, то любой $w \in D$ единственным образом представим в виде $w = \zeta\varkappa_0 + w_\perp$, где $\zeta \in \mathbb{R}$, $w_\perp \in D$: $\langle \varkappa_0, w_\perp\rangle = 0$, причем $\zeta\varkappa_0 \in D$. Имеем

$$\begin{aligned} f(\zeta\varkappa_0 + w_\perp) &= \langle \varkappa_0, \zeta\varkappa_0 + w_\perp\rangle + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \|\zeta\varkappa_0 + w_\perp\|^2} = \\ &= \zeta\, \|\varkappa_0\|^2 + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \|\zeta\varkappa_0\|^2 - \|w_\perp\|^2} \leqslant \zeta\, \|\varkappa_0\|^2 + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \|\zeta\varkappa_0\|^2}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что максимум функционала f на диске D достигается на элементах вида $w_0 = \zeta_0\varkappa_0$, где $\zeta_0 \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что ζ_0 — любое решение следующей задачи максимизации:

$$\zeta\, \|\varkappa_0\|^2 + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \|\zeta\varkappa_0\|^2} \to \max_\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad |\zeta| \leqslant \frac{r}{\|\varkappa_0\|}\,.$$

У этой задачи единственное решение $\zeta_0 = \dfrac{r}{\|\varkappa\|}$, а значит, существует единственная экстремаль w_0 задачи (13) и $w_0 = \dfrac{r}{\|\varkappa\|}\, \varkappa_0$. Рассмотрим два случая.

1) Если $Bw_0 \in \operatorname{int} \mathcal{O}$, то $\overline{w} = w_0$, $B\widehat{w} = B\big(\overline{w} + \xi(\overline{w})\big) = B\overline{w} = Bw_0 \in \operatorname{int}\mathcal{O}$ и

$$T = f(w_0) = \langle \varkappa_0, \frac{r}{\|\varkappa\|}\, \varkappa_0\rangle + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \left\| \frac{r}{\|\varkappa\|}\, \varkappa_0 \right\|^2} = r\, \|\varkappa\|\,.$$

Решением задачи (10) будет вектор

$$\widehat{w} = w_0 + \xi(w_0) = \begin{cases} \dfrac{r}{\|\varkappa\|}\, \varkappa_0 + \dfrac{\varkappa_\perp}{\|\varkappa_\perp\|} \sqrt{r^2 - \left\| \dfrac{r}{\|\varkappa\|}\, \varkappa_0 \right\|^2}, & \varkappa_\perp \neq 0, \\ \dfrac{r}{\|\varkappa\|}\, \varkappa_0, & \varkappa_\perp = 0. \end{cases}$$

Отсюда при любом $\varkappa_\perp \in W_B^\perp$ для решения задачи (10) получим $\widehat{w} = \dfrac{r}{\|\varkappa\|}\, \varkappa$. Для рассматриваемого случая имеем

$$\|\,\widehat{w}\,\|^2 = r^2, \quad B\widehat{w} \notin \partial\mathcal{O}. \tag{14}$$

Здесь $\partial\mathcal{O}$ — граница множества $\mathcal{O}$.

2) Рассмотрим теперь случай $Bw_0 \notin \operatorname{int}\mathcal{O}$. Докажем, что $\|\,\overline{w}\,\| < r$, если $\varkappa_\perp \neq 0$. Допустим, что это не так: $\|\,\overline{w}\,\| = r$. Для любого $\sigma \in [0;1]$ имеем: $\sigma\overline{w} \in D$, $B(\sigma\overline{w}\,) \in \mathcal{O}$ (в силу выпуклости и уравновешенности $\mathcal{O}$) и $f(\sigma\overline{w}\,) = \sigma\langle \varkappa_0, \overline{w}\,\rangle + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \sigma^2\, \|\,\overline{w}\,\|^2} = \sigma\langle\varkappa_0, \overline{w}\,\rangle + \|\varkappa_\perp\|\, r\sqrt{1 - \sigma^2}$. Отсюда следует, что

если справедливо неравенство $\varkappa_\perp \neq 0$, то $\exists \sigma \in (0;1)$: $f(\sigma\overline{w}) > f(\overline{w})$, а это означает, что $\overline{w}$ не является экстремалью в (12). Полученное противоречие доказывает, что

$$\|\,\overline{w}\,\| < r. \tag{15}$$

Далее будем рассматривать лишь случай $\varkappa_\perp \neq 0$. Так как $\xi(\overline{w}) \in W_B^\perp$ и $\overline{w} \in W_B$, то при $\varkappa_\perp \neq 0$ всегда выполнены равенства $\|\,\widehat{w}\,\|^2 = \|\,\overline{w}\,\|^2 + \|\xi(\,\overline{w}\,)\|^2 = r^2$ (см. (11)) и $B\widehat{w} = B\overline{w}$. Докажем, что $B\overline{w} \in \partial\mathcal{O}$. Допустим, что это не так, т.е. $B\overline{w} \in \operatorname{int}\mathcal{O}$. Учитывая, что $\|\,\overline{w}\,\| < r$ и B непрерывен, получим, что относительно топологии в пространстве W_B точка $\overline{w}$ является внутренней точкой множества $\{w \in D |\ Bw \in \mathcal{O}\}$, по которому берется sup в (12). Из явного вида функционала f следует, что он дифференцируем по Фреше в точке $\overline{w}$, а производная Фреше в $\overline{w}$ равна нулю. Получаем $f'(\overline{w}) = 0 \Leftrightarrow \varkappa_0 - \|\varkappa_\perp\| \dfrac{\overline{w}}{\sqrt{r^2 - \|\overline{w}\|^2}} = 0 \Rightarrow$ $\overline{w} = w_0 \Rightarrow Bw_0 = B\overline{w} \in \operatorname{int}\mathcal{O}$, что противоречит условию рассматриваемого случая: $Bw_0 \notin \operatorname{int}\mathcal{O}$. Итак,

$$\|\,\widehat{w}\,\|^2 = r^2, \quad B\widehat{w} \in \partial\mathcal{O}. \tag{16}$$

Задачу поиска $\overline{w}$ мы свели к задаче

$$f(w) \to \max_w, \quad w \in D, \quad Bw \in \partial\mathcal{O}. \tag{17}$$

До сих пор мы не использовали конкретный вид окрестности погрешности. Далее будем полагать, что $\mathcal{O}$ — эллипсоид: $\mathcal{O} := \left\{ y \in \mathbb{R}^m \,\Big|\, \sum\limits_{j=1}^m \omega_j y_j^2 \leqslant \varepsilon^2 \right\}$. Здесь $\omega_j > 0$ при любом $j \in \{1;\ldots;m\}$ и $\varepsilon > 0$. Разложим вектор $w \in W_B$ по базису $\{b_l\}_{l=1}^p$: $w = \sum\limits_{l=1}^p \eta_l b_l$. Используя равенство $Bw = \sum\limits_{j=1}^m \langle q_j, w\rangle g_j$, преобразуем выражение для T:

$$T = \sup_{w \in W_B:\ \|w\|^2 \leqslant r^2,\ Bw \in \partial\mathcal{O}} \left(\langle \varkappa, w\rangle + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \|w\|^2} \right) =$$

$$= \sup_{\eta \in \mathbb{R}^p:\ \left\|\sum_{l=1}^p \eta_l b_l\right\|^2 \leqslant r^2,\ \sum_{j=1}^m \omega_j \left(\sum_{l=1}^p \eta_l \langle q_j, b_l\rangle\right)^2 = \varepsilon^2} \left(\sum_{l=1}^p \eta_l \langle \varkappa, b_l\rangle + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \left\| \sum_{l=1}^p \eta_l b_l \right\|^2} \right).$$

Введем обозначение для выражения в последних скобках:

$$\Phi(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^p \eta_l \langle \varkappa, b_l\rangle + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \left\| \sum_{l=1}^p \eta_l b_l \right\|^2}. \tag{18}$$

Пусть $\mathcal{D} := \left\{ \eta \in \mathbb{R}^p \,\Big|\, \sum\limits_{k,l=1}^p \langle b_k, b_l\rangle \eta_k \eta_l < r^2 \right\}$, тогда $\Phi : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемый на $\mathcal{D}$ функционал. Условия $\|\,\overline{w}\,\| < r$ и $B\overline{w} = B\widehat{w} \in \partial\mathcal{O}$ (см. (15) и (16)) позволяют свести задачу (17) к задаче поиска условного экстремума функционала Φ на открытом множестве $\mathcal{D}$ с условием связи $\sum\limits_{j=1}^m \omega_j \left(\sum\limits_{l=1}^p \eta_l \langle q_j, b_l\rangle \right)^2 = \varepsilon^2$. Это следует из условий дополняющей нежесткости в теореме Куна–Таккера. Введем функцию Лагранжа $\mathcal{N} : \mathcal{D} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(\eta,\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\eta) + \nu \left(\sum\limits_{j=1}^m \omega_j \left(\sum\limits_{l=1}^p \eta_l \langle q_j, b_l\rangle \right)^2 - \varepsilon^2 \right)$. Разложим вектор $\overline{w} \in W_B$ по базису $\{b_l\}_{l=1}^p$: $\overline{w} = \sum\limits_{l=1}^p \overline{\eta}_l b_l$. Тогда существует такое $\overline{\nu} \in \mathbb{R}$, что пара $(\,\overline{\eta}, \overline{\nu}\,) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}$ является решением следующей системы уравнений относительно (η, ν):

$$\frac{\partial \mathcal{N}(\eta,\nu)}{\partial \eta_k} = 0 \quad \forall k \in \{1;\ldots;p\}, \quad \frac{\partial \mathcal{N}(\eta,\nu)}{\partial \nu} = 0. \tag{19}$$

Выпишем эту систему нелинейных уравнений в явном виде:

$$\langle \varkappa, b_k\rangle - \frac{\|\varkappa_\perp\| \sum\limits_{l=1}^{p} \eta_l \langle b_k, b_l\rangle}{\sqrt{r^2 - \sum\limits_{l,i=1}^{p} \eta_l \eta_i \langle b_i, b_l\rangle}} + 2\nu \sum_{l=1}^{p} \eta_l \sum_{j=1}^{m} \omega_j \langle q_j, b_l\rangle \langle q_j, b_k\rangle = 0 \quad \forall k \in \{1;\dots;p\},$$

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j \left(\sum_{l=1}^{p} \eta_l \langle q_j, b_l\rangle \right)^2 - \varepsilon^2 = 0.$$

Из всего сказанного следует, что если $\varkappa_\perp \neq 0$ и $Bw_0 \notin \operatorname{int} \mathcal{O}$, то у этой системы уравнений существует решение $(\eta, \nu) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}$. Пара $(\overline{\eta}, \overline{\nu})$ является таким решением системы (19), для которого максимально значение $\Phi(\eta)$.

4. Вспомогательные теоремы.

Теорема 2. *Пусть J — множество из конечного числа элементов, X — действительное гильбертово пространство, $\{a_\alpha\}_{\alpha\in J} \subset X$ — конечный набор ненулевых векторов. Рассмотрим*

1) *вектор* $\widehat{x} \in X$,

2) *конус* $\Pi := \{x \in X \mid \langle a_\alpha, x - \widehat{x}\,\rangle \leqslant 0 \quad \forall \alpha \in J\}$,

3) *конус* $\Pi_+ := \Big\{a \in X \mid \forall \alpha \in J \quad \exists \chi_\alpha \in [0;\infty) : \ a = \sum\limits_{\alpha\in J} \chi_\alpha a_\alpha \Big\}$.

Тогда выполнено равенство $\Pi_+ = \{a \in X \mid \langle a, x - \widehat{x}\,\rangle \leqslant 0 \quad \forall x \in \Pi\}$.

Доказательство. Рассмотрим конус с вершиной в нуле $\Pi_0 := \{x \in X \mid \langle a_\alpha, x\rangle \leqslant 0 \quad \forall \alpha \in J\}$ и сопряженные конусы $\Pi'_+ = \{x \in X \mid \langle a, x\rangle \leqslant 0 \quad \forall a \in \Pi_+\}$, $\Pi'_0 = \{a \in X \mid \langle a, x\rangle \leqslant 0 \ \forall x \in \Pi_0\}$ [2]. Очевидно, что доказываемое в этой теореме утверждение равносильно равенству $\Pi_+ = \Pi'_0$. Докажем сначала, что $\Pi_+ \subset \Pi'_0$. Пусть a — любой элемент из Π_+, т.е. $\forall \alpha \in J\ \exists \chi_\alpha \in [0;\infty)$: $a = \sum\limits_{\alpha\in J} \chi_\alpha a_\alpha$. Для любого $x \in \Pi_0$ выполнено $\langle a, x\rangle = \Big\langle \sum\limits_{\alpha\in J} \chi_\alpha a_\alpha, x \Big\rangle = \sum\limits_{\alpha\in J} \chi_\alpha \langle a_\alpha, x\rangle \leqslant 0$. Это означает, что $a \in \Pi'_0$, и вложение $\Pi_+ \subset \Pi'_0$ доказано. Наконец, докажем, что $\Pi_+ \supset \Pi'_0$. Из определения сопряженных конусов следует равносильность вложений

$$\Pi_+ \supset \Pi'_0 \quad \Leftrightarrow \quad \Pi'_+ \subset \Pi''_0. \tag{20}$$

Докажем, что $\Pi'_+ \subset \Pi''_0$. Пусть x — любой элемент из Π'_+. Тогда для любого набора неотрицательных чисел $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ выполнено $\Big\langle \sum\limits_{\alpha\in J} \chi_\alpha a_\alpha, x \Big\rangle \leqslant 0$. Из этого следует, что для любого $\alpha \in J$ выполнено $\langle a_\alpha, x\rangle \leqslant 0$, т.е. $x \in \Pi_0$. Поскольку конус Π_0 замкнут, то $\Pi''_0 \equiv (\Pi'_0)' = \Pi_0$ [2]. Вложение $\Pi'_+ \subset \Pi''_0$ доказано. Из (20) следует $\Pi_+ \supset \Pi'_0$, и теорема полностью доказана.

Теорема 3. *Пусть J — множество из конечного числа элементов, X — действительное гильбертово пространство. Для любого $\alpha \in J$ введем действительное гильбертово пространство Y_α и линейный оператор $G_\alpha : X \to Y_\alpha$, у которого существует сопряженный оператор G^*_α. Рассмотрим*

1) *множество* $\mathcal{M} := \{x \in X \mid \|G_\alpha x\| \leqslant \rho_\alpha \quad \forall \alpha \in J\}$, *где* $\rho_\alpha > 0$ *при любом* $\alpha \in J$,

2) *вектор* $\widehat{x} \in \mathcal{M}$: $\|G_\alpha \widehat{x}\| = \rho_\alpha$ *при любом* $\alpha \in J$,

3) *конус* $\Pi := \{x \in X \mid \langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, x - \widehat{x}\,\rangle \leqslant 0 \quad \forall \alpha \in J\}$.

Тогда выполнено равенство множеств: $\{a \in X \mid \langle a, x - \widehat{x}\rangle \leqslant 0\, \forall x \in \mathcal{M}\} = \{a \in X \mid \langle a, x - \widehat{x}\rangle \leqslant 0\, \forall x \in \Pi\}$.

Доказательство. Очевидно, что $G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x} \neq 0$ для любого $\alpha \in J$, так как $\langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, \widehat{x}\,\rangle = \|G_\alpha \widehat{x}\,\|^2 = \rho^2_\alpha > 0$. Пусть $X_\Pi := \{a \in X \mid \langle a, x - \widehat{x}\,\rangle \leqslant 0 \ \ \forall x \in \Pi\}$ и $X_{\mathcal{M}} := \{a \in X \mid \langle a, x - \widehat{x}\,\rangle \leqslant 0 \ \ \forall x \in \mathcal{M}\}$. Докажем, что $X_\Pi \subset X_{\mathcal{M}}$. Это следует из вложения $\Pi \supset \mathcal{M}$. Докажем это вложение. Пусть x — любой элемент из $\mathcal{M}$. Для любого $\alpha \in J$ выполнено $\langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, x\rangle = \langle G_\alpha \widehat{x}, G_\alpha x\rangle \leqslant \|G_\alpha \widehat{x}\|\, \|G_\alpha x\| = \rho_\alpha \|G_\alpha x\| \overset{(x\in\mathcal{M})}{\leqslant} \rho^2_\alpha = \langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, \widehat{x}\,\rangle$, что эквивалентно включению $x \in \Pi$. Наконец докажем, что $X_{\mathcal{M}} \subset X_\Pi$. Рассмотрим сначала любой $x \in \Pi$, такой, что для любого $\alpha \in J$ верно

$$\langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, x - \widehat{x}\,\rangle < 0. \tag{21}$$

Определим функции $\psi_\alpha : [0;1] \to \mathbb{R}$, $\psi_\alpha(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \Big\| G_\alpha\big(t(x - \widehat{x}) + \widehat{x}\,\big)\Big\|^2$ $\forall \alpha \in J$. Производная в нуле такова:

$\psi'_\alpha(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\Big\langle G^*_\alpha G_\alpha\big(t(x-\widehat{x}\,)+\widehat{x}\,\big), t(x-\widehat{x}\,)+\widehat{x}\,\Big\rangle - \langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, \widehat{x}\,\rangle}{t} = 2\langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, x-\widehat{x}\,\rangle < 0$. Так как $\psi'_\alpha(0) < 0$, то $\exists t_\alpha \in (0;1)$: $\forall t \in (0; t_\alpha]$ выполнено $\psi_\alpha(t) < \psi_\alpha(0)$. Для $\overline{t} := \min\limits_{\beta\in J} t_\beta$ имеем $\overline{t} > 0$ и

$$\psi_\alpha(\overline{t}) < \psi_\alpha(0) \quad \forall \alpha \in J \quad \Leftrightarrow \quad \big\|G_\alpha(\overline{t}(x-\widehat{x})+\widehat{x})\big\|^2 < \|G_\alpha \widehat{x}\|^2 = \rho^2_\alpha \quad \forall \alpha \in J \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (\overline{t}(x-\widehat{x})+\widehat{x}) \in \mathcal{M}.$$

Пусть a — любой элемент из $X_{\mathcal{M}}$, тогда

$$\Big\langle a, \big(\overline{t}(x-\widehat{x}\,)+\widehat{x}\,\big) - \widehat{x}\Big\rangle \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{t}\langle a, x-\widehat{x}\,\rangle \leqslant 0 \quad \overset{(\overline{t}>0)}{\Leftrightarrow} \quad \langle a, x-\widehat{x}\,\rangle \leqslant 0.$$

Докажем теперь последнее неравенство для любого вектора x из Π. При любом $\alpha \in J$ определим функцию $\overline{\psi}_\alpha(t) \overset{\text{def}}{=} \langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, tx-\widehat{x}\,\rangle$. Так как $\overline{\psi}_\alpha$ является аффинной функцией аргумента t, $\overline{\psi}_\alpha(0) = -\|G_\alpha\widehat{x}\,\|^2 < 0$ и $\overline{\psi}_\alpha(1) = \langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, x-\widehat{x}\,\rangle \overset{(x\in\Pi)}{\leqslant} 0$, то для любого $t \in (0;1)$ выполнено $0 > \overline{\psi}_\alpha(t) = \langle G^*_\alpha G_\alpha \widehat{x}, tx-\widehat{x}\,\rangle$, т.е. условие (21) удовлетворяется при любом $\alpha \in J$, если в него подставить вектор tx вместо x. Это можно делать, так как $tx \in \Pi$. Для такого вектора мы уже доказали, что для любого $a \in X_{\mathcal{M}}$ выполнено $\langle a, tx-\widehat{x}\,\rangle \leqslant 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to 1$ снизу, получим $\langle a, x-\widehat{x}\,\rangle \leqslant 0$. Итак, для любого $x \in \Pi$ мы доказали $\langle a, x-\widehat{x}\,\rangle \leqslant 0$, т.е. $a \in X_\Pi$. Теорема полностью доказана.

5. Поиск метода оптимального восстановления. Множитель Лагранжа $\widehat{\lambda}$ будем искать из задачи (8), (9). Преобразуем условия в (9). Для любых $(w,0) \in W \times Y$ и $y \in Y$ имеем

$$w \in S_r \quad \Leftrightarrow \quad \langle w, w\rangle \leqslant r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \big\langle (w,0),(w,0)\big\rangle \leqslant r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \big\|\mathrm{P}(w,y)\big\|^2 \leqslant r^2,$$

$$y - Bw \in \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^m \omega_j\,(y-Bw)^2_j \leqslant \varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad \big\|\mathrm{H}(w,y)\big\|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Здесь введены линейные операторы P, $\mathrm{H} : W \times Y \to W \times Y$,

$$\mathrm{P} : (w,y) \mapsto (w,0), \tag{22}$$

$$\mathrm{H} : (w,y) \mapsto \Big(0, \sum_{j=1}^m \sqrt{\omega_j}\langle g_j, y-Bw\rangle g_j\Big). \tag{23}$$

Из определений (22) и (23) следует, что существуют сопряженные операторы P^* и H^*. Легко доказать, что $\mathrm{P} = \mathrm{P}^*\mathrm{P}$. Определим оператор $\Gamma : W \times Y \to W \times Y$, $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^*\mathrm{H}$, т.е.

$$\Gamma : (w,y) \mapsto (\Gamma_{11}w + \Gamma_{21}y, \Gamma_{12}w + \Gamma_{22}y), \tag{24}$$

где $\Gamma_{11} : W \to W$, $\Gamma_{21} : Y \to W$, $\Gamma_{12} : W \to Y$, $\Gamma_{22} : Y \to Y$ — линейные операторы:

$$\Gamma_{11}w = \sum_{j=1}^m \omega_j\langle q_j, w\rangle q_j, \quad \Gamma_{21}y = -\sum_{j=1}^m \omega_j\langle g_j, y\rangle q_j, \quad \Gamma_{12}w = -\sum_{j=1}^m \omega_j\langle q_j, w\rangle g_j, \quad \Gamma_{22}y = \sum_{j=1}^m \omega_j\langle g_j, y\rangle g_j. \tag{25}$$

1) Рассмотрим случай $Bw_0 \in \mathrm{int}\ \mathcal{O}$. Для него $\widehat{w} = \dfrac{r}{\|\varkappa\|}\,\varkappa$ и выполнены условия (14). Условие (9) задает уравновешенное выпуклое множество в пространстве $W \times Y$: $\mathcal{M} := \big\{(w,y) \in W\times Y \mid\ \|w\| \leqslant r,\ y - Bw \in \mathcal{O}\big\}$. Задача (8), (9) может быть рассмотрена как задача максимизации линейного функционала $(\varkappa, -\widehat{\lambda}\,)$ на множестве $\mathcal{M}$, в которой решением является точка $(\widehat{w},0) \in W \times Y$. Для такой задачи выполнена теорема Куна–Таккера [2]. Воспользуемся условиями дополняющей нежесткости. Из условий (14) следует, что в задаче (8), (9) можно опустить условие $y - Bw \in \mathcal{O}$, так как для экстремали $(\widehat{w},0)$ выполнено $0 - B\widehat{w} \notin \partial\mathcal{O}$. Из теоремы 3 и условия $\|\,\widehat{w}\,\|^2 = r^2$ в (14) следует, что поиск множителя Лагранжа $\widehat{\lambda}$ из задачи (8), (9) эквивалентен такой задаче:

$$\big\langle(\varkappa, -\widehat{\lambda}\,), (w,y) - (\widehat{w},0)\big\rangle \leqslant 0 \quad \forall (w,y) \in W \times Y : \ \big\langle \mathrm{P}^*\mathrm{P}(\widehat{w},0), (w,y) - (\widehat{w},0)\big\rangle \leqslant 0.$$

Из теорем 1 и 2 следует, что $\exists \chi_0 \geqslant 0$: $(\varkappa, -\widehat{\lambda}\,) = \chi_0 \mathrm{P}^*\mathrm{P}(\widehat{w}, 0) = \chi_0(\widehat{w}, 0)$. Отсюда $\chi_0 = \dfrac{\|\varkappa\|}{r}$ и $\widehat{\lambda} = 0$. Метод оптимального восстановления является нулевым функционалом, а погрешность оптимального восстановления равна $\langle \varkappa, \widehat{w}\,\rangle = \left\langle \varkappa, \dfrac{r}{\|\varkappa\|}\,\varkappa \right\rangle = \|\varkappa\|\, r$.

2) Для случая, когда $Bw_0 \notin \operatorname{int} \mathcal{O}$ и $\varkappa_\perp \neq 0$, мы получили, что выполнены условия (16), $\widehat{w} = \overline{w} + \xi(\,\overline{w}\,)$, $\overline{w} = \sum\limits_{l=1}^{p} \overline{\eta}_l b_l$, где $(\,\overline{\eta}, \overline{\nu}\,) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}$ — решение системы уравнений (19) с наибольшим значением функционала $\Phi(\eta)$, определенного в (18). Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям для случая $Bw_0 \in \operatorname{int} \mathcal{O}$, из теорем 1 и 2 получим, что $\exists \chi_0, \chi_1 \geqslant 0$: $(\varkappa, -\widehat{\lambda}\,) = \chi_0 \mathrm{P}(\widehat{w}, 0) + \chi_1 \Gamma(\widehat{w}, 0) = \chi_0(\widehat{w}, 0) + \chi_1(\Gamma_{11}\widehat{w}, \Gamma_{12}\widehat{w}\,)$. Это равенство эквивалентно такой системе уравнений (см. (25)):

$$\varkappa_0 = \chi_0 \overline{w} + \chi_1 \sum_{j=1}^{m} \omega_j \langle q_j, \overline{w}\,\rangle q_j, \quad \varkappa_\perp = \chi_0 \xi(\,\overline{w}\,), \quad -\widehat{\lambda} = -\chi_1 \sum_{j=1}^{m} \omega_j \langle q_j, \overline{w}\,\rangle g_j. \tag{26}$$

Учитывая (15), (11) и $\varkappa_\perp \neq 0$, из второго уравнения в (26) получим $\chi_0 = \dfrac{\|\varkappa_\perp\|}{\sqrt{r^2 - \|\overline{w}\|^2}}$. Первое уравнение в (26) эквивалентно системе из p уравнений

$$\langle \varkappa_0, b_l \rangle = \chi_0 \langle\, \overline{w}, b_l \rangle + \chi_1 \sum_{j=1}^{m} \omega_j \langle q_j, \overline{w}\,\rangle \langle q_j, b_l \rangle \quad \forall l \in \{1; \dots; p\}.$$

Итак, для пары чисел (χ_0, χ_1) получили систему $(p+1)$ линейных уравнений:

$$\chi_0 \sqrt{r^2 - \|\,\overline{w}\,\|^2} = \|\varkappa_\perp\|, \quad \chi_0 \langle\, \overline{w}, b_l \rangle + \chi_1 \sum_{j=1}^{m} \omega_j \langle q_j, \overline{w}\,\rangle \langle q_j, b_l \rangle = \langle \varkappa_0, b_l \rangle \quad \forall l \in \{1; \dots; p\}. \tag{27}$$

Еще раз подчеркнем, что из теорем 1 и 2 следует, что решение в неотрицательных числах у системы (27) существует. На практике при $p > 1$ эта система уравнений не имеет решений из-за погрешностей. Для нахождения (χ_0, χ_1) можно использовать любой метод нахождения псевдорешения переопределенных систем. Методом оптимального восстановления является вектор

$$\widehat{\lambda} = \chi_1 \sum_{j=1}^{m} \omega_j \langle q_j, \overline{w}\,\rangle g_j,$$

а погрешность оптимального восстановления равна

$$\langle \varkappa, \widehat{w}\,\rangle = \langle \varkappa_0, \overline{w}\,\rangle + \big\langle \varkappa_\perp, \xi(\,\overline{w}\,)\big\rangle = \langle \varkappa_0, \overline{w}\,\rangle + \|\varkappa_\perp\| \sqrt{r^2 - \|\,\overline{w}\,\|^2} = f(\overline{w}).$$

Замечание. Рассмотрим случай $Bw_0 \notin \operatorname{int} \mathcal{O}$ и $\varkappa_\perp = 0$. Для этого случая существуют лишь численные методы нахождения решения ассоциированной задачи (5). При этом условия (16) могут выполняться, а могут и не выполняться. От этого зависит, какие ограничения в задаче (8), (9) будут активными, а какие нет. Пусть найдено решение ассоциированной задачи. Как и раньше, обозначим его $(\widehat{w}, 0)$. Пусть известно, какое из следующих двух условий выполнено, а какое нет: $\widehat{w} \in \partial S_r$, $0 - B\widehat{w} \in \partial \mathcal{O}$. Тогда поиск метода оптимального восстановления проводится по описанной схеме, опирающейся на теоремы 1 – 3. На практике случай $\varkappa_\perp = 0$ реализуется редко и бывает лишь в специальных задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баев А.В.* Принцип Лагранжа и конечномерная аппроксимация в задаче оптимального обращения линейных операторов // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**, № 2. 323–336 (http://www.srcc.msu.su/num-meth или http://num-meth.srcc.msu.su)
2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
3. *Scharlach R.* Optimal recovery by linear functionals // J. Approxim. Theory. 1985. **44**, N 2. 167–172.
4. *Магарил-Ильяев Г.Г., Чан Тхи Ле.* К задаче оптимального восстановления функционалов // УМН. 1987. **42**, № 2. 237–238.

5. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки. 1991. **50**, вып. 6. 85–93.
6. *Арестов В.В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Труды МИАН СССР. Т. 189. М.: Наука, 1989. 3–20.
7. *Melkman A.A., Micchelli C.A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. **16**, N 1. 87–105.
8. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. Berlin: Springer–Verlag, 1985. 21–93.
9. *Домбровская И.Н., Иванов В.К.* К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных банаховых пространствах // Сиб. Мат. Журн. 1965. **6**, № 3. 499–508.
10. *Yagola A.G., Dorofeev K.Yu.* Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems // Fields Inst. Communications: Operator Theory and Its Applications. V. 25. Providence: American Mathematical Society, 2000. 543–550.
11. *Dorofeev K.Yu., Yagola A.G.* The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. **12**, N 6. 627–636.
12. *Dorofeev K.Yu., Nikolaeva N.N., Titarenko V.N., Yagola A.G.* New approaches to error estimation for ill-posed problems with applications to inverse problems of heat conductivity // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2002. **10**, N 2. 155–170.

Поступила в редакцию
18.12.2006