УДК 517

НЕПРЕРЫВНЫЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА КВАДРАТЕ. ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

В. А. Морозов[1], Э. М. Мухамадиев[2], А. Б. Назимов[2]

Рассматривается задача о представлении гармонических функций на открытом квадрате, удовлетворяющих одному из следующих условий: а) функции имеют непрерывное продолжение на замкнутый квадрат и б) функции являются ограниченными в открытом квадрате. Получено полное описание этих классов гармонических функций в терминах свойств граничных значений, плотностей потенциала двойного слоя и внутренних свойств гармонических функций в открытом квадрате. Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 06–01–96648-р-Юг и 07–01–00269).

Ключевые слова: гармонические функции, потенциал двойного слоя, неустойчивые задачи, методы регуляризации, плохо-обусловленные задачи, задача Дирихле, интеграл Пуассона.

1. Основные результаты. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x,\, y < 1, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\Gamma} = \Psi(x, y), \tag{1.2}$$

где $\Psi(x, y)$ — заданная функция на границе $\Gamma = \big\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1;\ y = 0; 1\big\} \cup \big\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1;\ x = 0;\ 1\big\}$ квадрата $G = \big\{(x, y) : 0 < x, y < 1\big\}$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Для круга гармоническая функция явно выражается через свое граничное значение с помощью интеграла Пуассона. Существование решения задачи (1.1), (1.2) доказано для достаточно широкого класса функций $\Psi(x, y)$ [1 – 6]; однако для рассматриваемой области гармоническая функция не имеет простого представления. Ниже решение задачи (1.1), (1.2) будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) \Phi(P)\, ds_P, \tag{1.3}$$

где $\Phi(P) = \Phi(\xi, \eta)$ — плотность, $M = M(x, y) \in G$, $R_{MP}^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$, n_P — внешняя нормаль в точке $P \in \Gamma$ (кроме угловых точек).

Следует отметить, что если задача (1.1), (1.2) рассматривается в области с гладкой границей, то интегральное уравнение, получаемое для определения плотности $\Phi(P)$, является уравнением фредгольмовского типа и для ее решения применима теория Фредгольма [1 – 6].

В нашем случае получается интегральное уравнение фредгольмовского типа с интегральным оператором, не являющимся вполне непрерывным. Поэтому непосредственное применение результатов теории интегральных уравнений Фредгольма не представляется возможным. В связи с этим вызывает интерес изучение разрешимости соответствующих интегральных уравнений и получение точных и приближенных формул для представления решения задачи (1.1), (1.2).

Авторы предлагают метод решения данной задачи, основанный на свойствах некоторых интегральных операторов и однозначной и корректной разрешимости некоторой системы интегральных уравнений. Отметим, что предложенный метод позволяет успешно исследовать задачу (1.1), (1.2) в пространствах Лебега L_p и Гельдера H^{α} и получить как точное решение, так и приближенное решение с помощью метода регуляризации [7 – 9, 14].

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, 119992, Москва, Ленинские горы; e-mail: morozov@srcc.msu.su

[2] Вологодский государственный технический университет, ул. Ленина, д. 15, 160004, г. Вологда; e-mail: n.akbar54@mail.ru

Пусть $\varphi(x)$ является измеримой функцией на $(-\infty, \infty)$, для которой при $y > 0$ существует интеграл $u(x,y) = \dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\varphi(\xi)\,d\xi}{y^2 + (x-\xi)^2}$. Этот интеграл называется интегралом Пуассона [1, 10] и определяет гармоническую функцию на верхней полуплоскости. Ниже интеграл Пуассона применяется для решения задачи (1.1), (1.2) с плотностью $\varphi(x)$, носитель которой принадлежит отрезку $[0,1]$.

Пусть $\Psi(x,y) \in C(\Gamma)$, где $C(\Gamma)$ является пространством непрерывных на границе Γ функций с нормой $\|\Psi\|_\Gamma = \max\Big\{\big|\Psi(x,y)\big| : (x,y) \in \Gamma\Big\}$. Пусть $\psi_1(x) = \Psi(x,0)$, $\psi_2(y) = \Psi(1,y)$, $\psi_3(x) = \Psi(x,1)$, $\psi_4(y) = \Psi(0,y)$. Эти функции определены на отрезке $[0,1]$ и принадлежат пространству $C[0,1]$.

Отыскание решения задачи (1.1), (1.2) в виде потенциала двойного слоя (1.3) эквивалентно нахождению искомого решения в виде суммы четырех гармонических функций:

$$\begin{gathered}
u_1(x,y) = \frac{y}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{y^2 + (x-\xi)^2} \equiv (\Pi_1\varphi_1)(x,y),\ u_2(x,y) = \frac{1-x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{(1-x)^2 + (y-\eta)^2} \equiv (\Pi_2\varphi_2)(x,y),\\
u_3(x,y) = \frac{1-y}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2 + (x-\xi)^2} \equiv (\Pi_3\varphi_3)(x,y),\ u_4(x,y) = \frac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2 + (y-\eta)^2} \equiv (\Pi_4\varphi_4)(x,y),
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,4}$, — искомые функции на отрезке $[0,1]$.

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы. Первое утверждение относится к пространству непрерывных функций $C(\overline{G}\,)$, а второе — к пространству ограниченных функций $L_\infty(\overline{G}\,)$.

Теорема 1.1. *Следующие условия эквивалентны:*

а) *гармоническая в области G функция $u(x,y)$ равномерно непрерывна в этой области*;

б) *гармоническая в области G функция $u(x,y)$ имеет непрерывное продолжение на замкнутую область $\overline{G} = G \cup \Gamma$*;

функция $u(x,y)$ представима в виде $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, где функции $u_i = u_i(x,y)$, $i = \overline{1,4}$, определены равенствами (1.4), *а непрерывная вектор-функция $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет условию согласованности в угловых точках области, а именно: $\varphi_1(0) = \varphi_4(0)$, $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$, $\varphi_3(1) = \varphi_2(1)$ и $\varphi_3(0) = \varphi_4(1)$.*

Теорема 1.2. *Следующие условия эквивалентны:*

а) *гармоническая в области G функция $u(x,y)$ ограничена*;

б) *функция $u(x,y)$ представима в виде $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, где функции $u_i = u_i(x,y)$, $i = \overline{1,4}$, определены равенствами* (1.4), *а функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,4}$, принадлежат пространству ограниченных измеримых функций на отрезке $[0,1] : \varphi_i \in L_\infty[0,1]$, $i = \overline{1,4}$.*

Теорема 1.3. *Для того чтобы задача Дирихле* (1.1), (1.2) *имела непрерывно продолжаемое решение на замкнутой области $\overline{G}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Psi(x,y)$ являлась непрерывной на границе Γ квадрата G.*

Доказательства теорем 1.1 – 1.3 приведены в разделе 9.

2. Граничные значения гармонических функций. С помощью интеграла Пуассона [1, 10] определим в полуплоскости $y > 0$ функцию

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{y^2 + (x-\xi)^2}\,, \tag{2.1}$$

где плотность $\varphi(\xi)$ — ограниченная измеримая функция на $(-\infty, \infty)$. В области $y > 0$ ядро Пуассона $P(x,y) = \dfrac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$ является гармонической функцией: $\Delta P = 0$. Поэтому, выполнив операцию дифференцирования функции $u(x,y)$ под знаком интеграла, которая является законной в силу ограниченности функции $\varphi(x)$ [11], убеждаемся, что интеграл Пуассона (2.1) определяет гармоническую функцию в области $y > 0$. Определим функцию

$$\overline{\varphi}\,(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} \varphi(\xi + x)\,d\xi, \quad h > 0, \tag{2.2}$$

с областью определения $D(\overline{\varphi})$, состоящей из всех точек $x \in (-\infty, \infty)$, где существует предел в правой части (2.2). Согласно теореме Лебега [12] функция $\overline{\varphi}(x)$ определена почти всюду. В частности, множество $D_c(\overline{\varphi})$ содержит множество $D_c(\varphi)$, состоящее из точек непрерывности функции $\varphi(x)$: $D_c(\varphi) \subset D(\overline{\varphi})$, причем $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$, если $x \in D_c(\varphi)$.

Функцию $u(x, y)$ продолжим на граничные точки $(x, 0)$ области $y > 0$ двумя способами:

$$\overline{u}_\varphi(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & \text{если} \quad y>0,\ -\infty<x<\infty, \\ \varphi(x), & \text{если} \quad y=0,\ x\in D_c(\varphi); \end{cases} \qquad \overline{u}_{\overline{\varphi}}(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & \text{если} \quad y>0,\ -\infty<x<\infty, \\ \overline{\varphi}(x), & \text{если} \quad y=0,\ x\in D(\overline{\varphi}). \end{cases}$$

Отметим, что функция $\overline{u}_{\overline{\varphi}}(x, y)$ является продолжением функции $\overline{u}_\varphi(x, y)$, причем если $x \in D_c(\varphi)$, то из равенства $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$ получаем, что $\overline{u}_{\overline{\varphi}}(x, y) = \overline{u}_\varphi(x, y)$.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то функции $\overline{u}_\varphi(x, y)$ и $\overline{u}_{\overline{\varphi}}(x, y)$ определены на замкнутой области $y \geqslant 0$ и $\overline{u}_{\overline{\varphi}}(x, y) \equiv \overline{u}_\varphi(x, y)$, $y \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$.

В общем случае, когда $\varphi(x)$ — произвольная ограниченная измеримая функция, то $D_c(\varphi) \neq D(\overline{\varphi})$, причем $D_c(\varphi)$ может быть пустым множеством, в то время как $D(\overline{\varphi})$ имеет полную меру на любом отрезке числовой оси и может совпадать с числовой осью.

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi(x)$ — ограниченная измеримая функция на всей числовой оси и $x_0 \in D_c(\varphi)$. Тогда функция $\overline{u}_\varphi(x, y)$ непрерывна в точке $(x_0, 0)$.*

Доказательство. Так как x_0 является точкой непрерывности функции $\varphi(x)$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$, такое, что

$$\bigl|\varphi(\eta) - \varphi(x_0)\bigr| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |\eta - x_0| < 2\delta. \tag{2.3}$$

Используя тождество $\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\varphi(x_0)\,d\xi}{y^2 + (x-\xi)^2} \equiv \varphi(x_0)$, $y > 0$, $-\infty < x < \infty$, получим

$$u(x,y) - \varphi(x_0) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x_0)}{y^2 + (x-\xi)^2}\,d\xi = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x_0)}{y^2 + t^2}\,dt = \frac{y}{\pi}\int\limits_{|t|<\delta} + \frac{y}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant\delta} \equiv I_{1\delta} + I_{2\delta}.$$

Для первого интеграла $I_{1\delta}$ имеем $|I_{1\delta}| \leqslant \sup\limits_{|t|<\delta}\bigl|\varphi(x+t) - \varphi(x_0)\bigr| \dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dt}{y^2+t^2} = \sup\limits_{|t|<\delta}\bigl|\varphi(x+t) - \varphi(x_0)\bigr|$. Полагая $|x - x_0| < \delta$, получим $|x + t - x_0| < 2\delta$. Из неравенства (2.3) при $|x - x_0| < \delta$ приходим к оценке

$$|I_{1\delta}| \leqslant \sup_{|t|<\delta}\bigl|\varphi(x+t) - \varphi(x_0)\bigr| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Для второго интеграла $I_{2\delta}$ имеем

$$|I_{2\delta}| \leqslant 4 \sup_{-\infty<t<\infty}\bigl|\varphi(t)\bigr| \frac{y}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant\delta} \frac{dt}{y^2+t^2} = 4 \sup_{-\infty<t<\infty}\bigl|\varphi(t)\bigr|\left(\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}\right). \tag{2.4}$$

Из соотношения $\lim\limits_{y\to 0+} \operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{y} = \dfrac{\pi}{2}$ следует существование такого числа $y_0 > 0$, что при $0 < y < y_0$ имеют место неравенства $0 < \dfrac{1}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{y} < \dfrac{\varepsilon}{8\sup\limits_{-\infty<t<\infty}\bigl|\varphi(t)\bigr|}$. Отсюда и из (2.4) получим $|I_{2\delta}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\bigl|u(x,y) - \varphi(x_0)\bigr| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < y < y_0, \quad |x - x_0| < \delta. \tag{2.5}$$

Пусть (x, y) — произвольная точка. Если $y > 0$, то $\overline{u}_\varphi(x, y) = u(x, y)$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$. Если $y = 0$, то $\overline{u}_\varphi(x, 0) = \varphi(x)$ для всех $x \in D_c(\varphi)$. Поэтому если $x \in D_c(\varphi)$ и $|x - x_0| < \delta$, то в силу (2.3) имеем $\bigl|\overline{u}_\varphi(x,0) - \varphi(x_0)\bigr| = \bigl|\varphi(x) - \varphi(x_0)\bigr| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Из этого неравенства и оценки (2.5) получим

$$\bigl|\overline{u}_\varphi(x,y) - \overline{u}_\varphi(x,0)\bigr| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leqslant y < y_0, \quad |x - x_0| < \delta.$$

Лемма доказана.

Следствие 2.1. Если $\varphi(x)$ — непрерывная функция на всей числовой оси, то $\overline{u}_\varphi(x,y)$ является непрерывной функцией в замкнутой области $y \geqslant 0$ и справедливы равенства

$$\sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ y\geqslant 0}} \left|\overline{u}_\varphi(x,y)\right| = \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ y>0}} \left|u(x,y)\right| = \sup_{-\infty<x<\infty} \left|\varphi(x)\right|. \qquad (2.6)$$

Действительно, непрерывность функции $\overline{u}_\varphi(x,y)$ в замкнутой области $y \geqslant 0$ следует из леммы 2.1. Из оценки $\left|u(x,y)\right| \leqslant \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \left|\varphi(x)\right| \dfrac{y}{\pi} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2} = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \left|\varphi(x)\right|$ и непрерывности функции $\overline{u}_\varphi(x,y)$ на замкнутой области $y \geqslant 0$ следуют равенства (2.6).

Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_4(y)$ определены на числовой оси и их носители сосредоточены на отрезках $[0,1]$ осей абсцисс и ординат соответственно; пусть на этих отрезках обе функции непрерывны.

Потенциал $u_1(x,y) = (\Pi_1\varphi_1)(x,y)$ является гармонической функцией в области $y>0$, а потенциал $u_4(x,y) = (\Pi_4\varphi_4)(x,y)$ — в области $x>0$. Их сумма

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_4(x,y) \qquad (2.7)$$

является гармонической функцией в пересечении этих областей, т.е. в первой ($x>0$, $y>0$) четверти координатной плоскости. Из леммы 2.1 вытекает, что функция $\overline{u}_{1\varphi_1}(x,y)$ определена и непрерывна на замкнутой полуплоскости $y \geqslant 0$ кроме, быть может, точек $(0,0)$ и $(1,0)$, а функция $\overline{u}_{4\varphi_4}(x,y)$ — кроме точек $(0,0)$ и $(0,1)$. Следовательно, функция $u(x,y) = \overline{u}_{1\varphi_1}(x,y) + \overline{u}_{4\varphi_4}(x,y)$ определена и непрерывна в замкнутой области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ кроме, быть может, трех точек $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Из этих трех точек только одна точка $(0,0)$ относится к обеим функциям. Нас интересует вопрос существования предела функции (2.7), когда $(x,y) \to (0,0)$, $x>0$, $y>0$.

Лемма 2.2. *Для того, чтобы функция* (2.7) *имела предел при* $(x,y) \to (0,0)$, $x>0$, $y>0$, *необходимо и достаточно выполнение равенства* $\varphi_1(0) = \varphi_4(0)$. *Причем если существует этот предел, то* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x>0,\, y>0}} u(x,y) = \dfrac{3\varphi_1(0)}{2}$.

Доказательство. *Достаточность.* Представим функции $u_1(x,y)$, $u_4(x,y)$ в следующем виде:

$$u_1(x,y) = v_1(x,y) + \frac{\varphi_1(0)y}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}\,, \quad u_4(x,y) = v_4(x,y) + \frac{\varphi_4(0)x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}\,,$$

где $v_1(x,y) = \dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{\varphi_1(\xi)-\varphi_1(0)}{y^2+(x-\xi)^2}\,d\xi$ и $v_4(x,y) = \dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{\varphi_4(\eta)-\varphi_4(0)}{x^2+(y-\eta)^2}\,d\eta$.

Из леммы 2.1 вытекает существование предела функций $v_1(x,y)$ и $v_4(x,y)$ при $(x,y) \to (0,0)$, $x>0$, $y>0$, причем $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x>0,\, y>0}} v_1(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x>0,\, y>0}} v_4(x,y) = 0$.

Таким образом, существование предела функции (2.7) при $(x,y) \to (0,0)$, $x>0$, $y>0$, эквивалентно существованию предела у суммы интегралов $w(x,y) = \dfrac{\varphi_1(0)y}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2} + \dfrac{\varphi_4(0)x}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}$.

Вычисляя эти интегралы, в силу равенства $\varphi_1(0) = \varphi_4(0)$ имеем

$$w(x,y) = \frac{\varphi_1(0)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1-y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

Так как $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ для всех $x>0$, $y>0$ и $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x>0,\, y>0}} \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{y} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x>0,\, y>0}} \operatorname{arctg}\dfrac{1-y}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, то окончательно получим $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x>0,\, y>0}} w(x,y) = \dfrac{3\varphi_1(0)}{2}$. Достаточность доказана.

Необходимость. Выше отмечено, что существование предела $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>0,\, y>0}} u(x,y)$ эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>0,\, y>0}} w(x,y)$.

Пусть существуют эти пределы. Докажем справедливость равенства $\varphi_1(0)=\varphi_4(0)$. Представим функцию $w(x,y)$ в виде $w(x,y)=\dfrac{\varphi_1(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{y}+\dfrac{\varphi_4(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1-y}{x}+\dfrac{\varphi_1(0)}{2}+\dfrac{\varphi_4(0)-\varphi_{14}(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Если $y=x^2$ и $x\to 0+$, то $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x}\to 0$, а если $x=y^2$ и $y\to 0+$, то $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{y^2}\to\dfrac{\pi}{2}$; поэтому $\dfrac{\varphi_4(0)-\varphi_1(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ имеет предел при $(x,y)\to(0,0)$, $x>0$, $y>0$, тогда и только тогда, когда $\varphi_4(0)=\varphi_1(0)$. Необходимость и лемма доказаны.

Теорема 2.1. *Пусть плотность* $\Phi(x,y)$ — *непрерывная функция на границе* Γ *квадрата* G. *Тогда гармоническая функция, определяемая потенциалом двойного слоя* (1.3), *имеет непрерывное продолжение на замкнутом квадрате* $\overline{G}$.

Доказательство. Положим

$$\varphi_1(x)=\Phi(x,0),\quad \varphi_2(y)=\Phi(1,y),\quad \varphi_3(x)=\Phi(x,1),\quad \varphi_4(y)=\Phi(0,y). \tag{2.8}$$

Пусть функции $u_i(x,y)$, $i=\overline{1,4}$, определены равенствами (1.4), тогда потенциал (1.3) можно представить в виде

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{4}u_i(x,y). \tag{2.9}$$

Заметим, что пересечением областей гармоничности функций $u_i(x,y)$, $i=\overline{1,4}$, является квадрат G. В силу леммы 2.1 во всех точках границы Γ, кроме угловых, функция (2.9) имеет непрерывное продолжение. Исследуем непрерывность функции (2.9) в угловых точках.

Рассмотрим точку $(0,0)$ (точки $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ рассматриваются аналогичным образом). Так как точка $(0,0)$ принадлежит области гармоничности функций $u_2(x,y)$ и $u_3(x,y)$, то в этой точке сумма $u_2(x,y)+u_3(x,y)$ является непрерывной функцией. Следовательно, непрерывная продолжаемость функции (2.9) в точке $(0,0)$ эквивалентна непрерывной продолжаемости функции $u_1(x,y)+u_4(x,y)$ в этой точке. Из первого и четвертого равенств в (2.8) и непрерывности плотности $\Phi(x,y)$ в точке $(0,0)$ вытекает $\varphi_1(0)=\varphi_4(0)$. Из этого равенства и леммы 2.2 следует непрерывная продолжаемость функции $u_1(x,y)+u_4(x,y)$ в точке $(0,0)$. Теорема доказана.

Таким образом, нами установлено, что если плотность $\Phi(x,y)$ является непрерывной функцией на Γ, то функция $u(x,y)$, определенная равенством (2.9), непрерывно продолжаема на замкнутую область $\overline{G}$. Далее, если функция $\Psi(x,y)$ является граничным значением гармонической функции (2.9), т.е. $u\big|_{\Gamma}=\Psi(x,y)$, то вне угловых точек границы имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x)+\frac{1-x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{(1-x)^2+\eta^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{1+(x-\xi)^2}+\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+\eta^2}=\psi_1(x),\\
&\frac{y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{y^2+(1-\xi)^2}+\varphi_2(y)+\frac{1-y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2+(1-\xi)^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{1+(y-\eta)^2}=\psi_2(y),\\
&\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{1+(x-\xi)^2}+\frac{1-x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{(1-x)^2+(1-\eta)^2}+\varphi_3(x)+\frac{x}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+(1-\eta)^2}=\psi_3(x),\\
&\frac{y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{y^2+\xi^2}+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{1+(y-\eta)^2}+\frac{1-y}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-y)^2+\xi^2}+\varphi_4(y)=\psi_4(y).
\end{aligned}$$

Эти равенства устанавливают связь между плотностями $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,4}$, и граничными значениями $\psi_i(x)$, $i=\overline{1,4}$. Введем следующие обозначения: $(K\varphi)(x)=\dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2}$ при $0<x\leqslant 1$, $(K\varphi)(x)=\dfrac{\varphi(0)}{2}$ при

$x=0$; $(K_0\varphi)(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{\varphi(\xi)\,d\xi}{1+(x-\xi)^2}$ при $0\leqslant x\leqslant 1$; $(S\varphi)(x)=\varphi(1-x)$ при $0\leqslant x\leqslant 1$. Тогда приведенную выше систему можно записать более компактно:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x)+(SK\varphi_2)(x)+(K_0\varphi_3)(x)+(K\varphi_4)(x) &&=\psi_1(x),\\
&(KS\varphi_1)(y)+\varphi_2(y)+(SK\varphi_3)(y)+(K_0\varphi_4)(y) &&=\psi_2(y),\\
&(K_0\varphi_1)(x)+(SKS\varphi_2)(x)+\varphi_3(x)+(KS\varphi_4)(x) &&=\psi_3(x),\\
&(K\varphi_1)(y)+(K_0\varphi_2)(y)+(SK\varphi_3)(y)+\varphi_4(y) &&=\psi_4(y).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Система интегральных уравнений (2.10) является основным инструментом в дальнейшем нашем исследовании.

3. Гладкость и предельные значения интегрального оператора K. Пусть $\varphi\in L_1[0,1]$. Функция $\psi(x)=(K\varphi)(x)$ определена на промежутке $(0,1]$. Точка $x=0$ для функции $\psi(x)$ является особой точкой, а формула, определяющая ее значения, в этой точке не имеет смысла. Поэтому представляет интерес выделение класса функций φ, для которых функция $\psi(x)$ при $x\to 0$ имеет предел или остается ограниченной.

Сначала изучим свойства гладкости функции $\psi(x)$ на промежутке $(0,1]$.

Лемма 3.1. *Пусть функция $\varphi(x)\in L_1[0,1]$. Тогда для любого $\delta>0$ существуют числа $C_m(\delta)>0$, такие, что функция $\psi(x)=(K\varphi)(x)$ принадлежит пространству $C^\infty[\delta,1]$, а для производных справедлива оценка $\left|\psi^{(m)}(x)\right|\leqslant C_m(\delta)\,\|\varphi\|_{L_1[0,1]}$ $(\delta\leqslant x\leqslant 1)$.*

Доказательство. При $m=0$ имеем $\left|(K\varphi)(x)\right|\leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{x}{x^2+\xi^2}\left|\varphi(\xi)\right|d\xi$. Функция $\dfrac{x}{x^2+\xi^2}$ по переменной ξ на отрезке $[0,1]$ является убывающей, и, следовательно, $\max\limits_{0\leqslant\xi\leqslant 1}\dfrac{x}{x^2+\xi^2}=\dfrac{x}{x^2+0^2}=\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{\delta}$, $(\delta\leqslant x\leqslant 1)$. Отсюда получим $\left|(K\varphi)(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{x}{x^2+\xi^2}\left|\varphi(\xi)\right|d\xi\leqslant\dfrac{1}{\pi}\max\limits_{0\leqslant\xi\leqslant 1}\dfrac{x}{x^2+\xi^2}\displaystyle\int\limits_0^1\left|\varphi(\xi)\right|d\xi=\dfrac{1}{\pi\delta}\,\|\varphi\|_{L_1}$.

Докажем существование производной функции $(K\varphi)(x)$. Пусть $\{x_k\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к точке $x:\delta<x<1$. Согласно определению производной имеем

$$\frac{(K\varphi)(x_k)-(K\varphi)(x)}{x_k-x}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\xi^2-x_kx}{(x_k^2+\xi^2)(x^2+\xi^2)}\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Положим $f_k(\xi)=\dfrac{\xi^2-x_kx}{(x_k^2+\xi^2)(x^2+\xi^2)}\,\varphi(\xi)$, $f(\xi)=\dfrac{\xi^2-x^2}{(x^2+\xi^2)^2}\,\varphi(\xi)$, $F(\xi)=\dfrac{2\left|\varphi(\xi)\right|}{\delta^4}$. Последовательность $\left\{f_k(\xi)\right\}$ при $k\to\infty$ для каждого $\xi\in[0,1]$ сходится к функции $f(\xi)$. Далее, начиная с некоторого номера k, справедлива оценка $\left|f_k(\xi)\right|\leqslant F(\xi)$. Тогда согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [9, 10] будем иметь

$$(K\varphi)'(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{(K\varphi)(x_k)-(K\varphi)(x)}{x_k-x}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\xi^2-x^2}{(x^2+\xi^2)^2}\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{3.1}$$

Оценим первую производную:

$$\left|(K\varphi)'(x)\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{|\xi^2-x^2|}{(x^2+\xi^2)^2}\left|\varphi(\xi)\right|d\xi\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{x^2}{x^4}\left|\varphi(\xi)\right|d\xi=\frac{1}{\pi x^2}\int\limits_0^1\left|\varphi(\xi)\right|d\xi\leqslant\frac{1}{\pi x^2}\,\|\varphi\|_{L_1}.$$

Если мы продифференцируем ядро оператора $(K\varphi)(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{x}{x^2+\xi^2}\,\varphi(\xi)\,d\xi$ как интеграл, зависящий от параметра x, мы получим тот же результат (см. (3.1)). Действительно,

$$(K\varphi)'(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\left(\frac{x}{x^2+\xi^2}\right)_x\varphi(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\xi^2-x^2}{(x^2+\xi^2)^2}\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

В силу этого замечания производная m-го порядка $(K\varphi)^{(m)}(x)$ представима в виде

$$(K\varphi)^{(m)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{x}{x^2+\xi^2}\right)^{(m)}_x \varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{P_m(x,\xi)}{(x^2+\xi^2)^{m+1}}\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

где $P_m(x,\xi)$ — многочлен степени не выше m по каждой переменной. Так как $\dfrac{P_m(x,\xi)}{(x^2+\xi^2)^{m+1}}$ является отношением двух непрерывных на отрезке $[\delta,1]$ функций, причем знаменатель удовлетворяет неравенству $(x^2+\xi^2)^{m+1} \geqslant \delta^{2(m+1)} > 0$, то $(K\varphi)^{(m)}(x)$ является непрерывной на отрезке $[\delta,1]$ и, следовательно, ограниченной функцией. Лемма доказана.

Следствие 3.1. Пусть функция $\varphi(x) \in L_1[0,1]$. Тогда функция $\psi(x) = (K\varphi)(x)$ является бесконечно дифференцируемой на промежутке $(0,1]$.

Перейдем к изучению поведения функции $\psi(x) = (K\varphi)(x)$ при $x \to 0+$.

Лемма 3.2. *Пусть $\varphi(\xi) \in L_1[0,1]$ и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\int\limits_0^x \varphi(\xi)\,d\xi = A. \tag{3.2}$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0+}(K\varphi)(x) = A/2$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем:

$$(K\varphi)(x) = \frac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2} = \frac{x}{\pi(x^2+1)}\int\limits_0^1 \varphi(s)\,ds + \frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^\xi \varphi(s)\,ds\,\frac{\xi\,d\xi}{(x^2+\xi^2)^2}\,. \tag{3.3}$$

Полагая здесь $\varphi(\xi) \equiv 1$, имеем

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{x^2+\xi^2} = \frac{x}{\pi(1+x^2)} + \frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\xi^2\,d\xi}{(x^2+\xi^2)^2} \quad \forall x > 0. \tag{3.4}$$

Так как $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, то из (3.4) получим

$$\frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\xi^2\,d\xi}{(x^2+\xi^2)^2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) - \frac{x}{\pi(1+x^2)} \to \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{3.5}$$

Продолжим равенство (3.3):

$$\begin{aligned}(K\varphi)(x) = {} & \frac{x}{\pi(1+x^2)}\int\limits_0^1 \varphi(s)\,ds + \frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\xi^2}{(x^2+\xi^2)^2}\left[\frac{1}{\xi}\int\limits_0^\xi \varphi(s)\,ds - A\right]d\xi + \frac{2xA}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\xi^2\,d\xi}{(x^2+\xi^2)^2} \equiv \\ & \equiv I_0 + I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{3.6}$$

В силу (3.5) имеем $\lim\limits_{x\to 0} I_2 = A/2$.

Рассмотрим I_1. Для этого введем обозначение $\psi(\xi) = \dfrac{1}{\xi}\displaystyle\int\limits_0^\xi \varphi(s)\,ds - A$ при $\xi > 0$, $\psi(0) = 0$. Из (3.2) следует, что $\psi(\xi)$ непрерывна на $[0,1]$. Для $0 < x < x_0 < 1$ получим

$$I_1 = \frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\xi^2\psi(\xi)}{(x^2+\xi^2)^2}\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x} \frac{u^2\psi(xu)}{(1+u^2)^2}\,du = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x_0} \frac{u^2\psi(xu)}{(1+u^2)^2}\,du + \frac{2}{\pi}\int\limits_{1/x_0}^{1/x} \frac{u^2\psi(xu)}{(1+u^2)^2}\,du \equiv I_{11} + I_{12}. \tag{3.7}$$

Очевидно, что $M = \sup\limits_{0<\xi\leqslant 1}\bigl|\psi(\xi)\bigr| < \infty$. Тогда $|I_{12}| \leqslant \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{1/x_0}^{1/x}\dfrac{u^2\bigl|\psi(xu)\bigr|}{(1+u^2)^2}\,du \leqslant \dfrac{2M}{\pi}\int\limits_{1/x_0}^{1/x}\dfrac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du$. Так как $\dfrac{2x}{\pi}\int\limits_0^1\dfrac{\xi^2\,d\xi}{(x^2+\xi^2)^2} = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\dfrac{\xi^2\,d\xi}{(1+\xi^2)^2}$, то из (3.4) получим $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\dfrac{\xi^2\,d\xi}{(1+\xi^2)^2} = \dfrac{1}{\pi}\Bigl(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}\Bigr)$. Используя это равенство, продолжим оценивать $|I_{12}|$:

$$|I_{12}| \leqslant \frac{2M}{\pi}\int\limits_{1/x_0}^{1/x}\frac{u^2du}{(1+u^2)^2} = \frac{M}{\pi}\left[(\operatorname{arctg} x_0 - \operatorname{arctg} x) + \left(\frac{x_0}{1+x_0^2} - \frac{x}{1+x^2}\right)\right] < \frac{M}{\pi}\left[\operatorname{arctg} x_0 + \frac{x_0}{1+x_0^2}\right].$$

Поскольку на $[0,1]$ выполняются неравенства $\operatorname{arctg} x_0 < x_0$ и $\dfrac{x_0}{1+x_0^2} < x_0$, то $|I_{12}| < \dfrac{2M}{\pi}x_0$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Если x_0 выбрать из условия $\dfrac{2M}{\pi}x_0 = \varepsilon$, то для любого $x : 0 < x < x_0$ выполняется неравенство $|I_{12}| < \varepsilon$. Фиксируем x_0 и оценим I_{11}: $|I_{11}| \leqslant \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x_0}\dfrac{u^2\bigl|\psi(xu)\bigr|}{(1+u^2)^2}\,du \leqslant \max\limits_{0\leqslant u\leqslant 1/x_0}\bigl|\psi(xu)\bigr|$, так как $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x_0}\dfrac{u^2du}{(1+u^2)^2} \leqslant \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{du}{1+u^2} = 1$. Но $\max\limits_{0\leqslant u\leqslant 1/x_0}\bigl|\psi(xu)\bigr| = \max\limits_{0\leqslant\xi\leqslant x/x_0}\bigl|\psi(\xi)\bigr| \to 0$ при $x \to 0$, следовательно, по заданному $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что при $0 < x < \delta$ выполняется неравенство $\max\limits_{1\leqslant\xi\leqslant\delta/x_0}\bigl|\psi(\xi)\bigr| < \varepsilon$. Учитывая это, получим $|I_{11}| < \varepsilon$. Переходя к модулю в равенстве (3.7) и учитывая полученное неравенство и неравенство $|I_{12}| < \varepsilon$, имеем $|I_1| < 2\varepsilon$. Отсюда, а также из равенства $\lim\limits_{x\to 0} I_2 = \dfrac{A}{2}$ и (3.6) следует утверждение леммы.

Следствие 3.2. Пусть функция $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ и является непрерывной в точке $x = 0$. Тогда справедливо равенство $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\pi}\int\limits_0^1\dfrac{\varphi(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2} = \dfrac{1}{2}\,\varphi(0)$.

Следствие 3.3. Оператор K действует в пространстве непрерывных функций: если $\varphi(x)$ непрерывная функция на отрезке $[0,1]$, то функция $\psi(x) = (K\varphi)(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$.

Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, установим свойства непрерывности оператора K относительно различных типов сходимости.

Теорема Лебега [12, 13]. *Пусть почти при всех $\xi \in [a,b]$ выполнены условия: $f_k(\xi) \to f(\xi)$, $k \to \infty$, $\bigl|f_k(\xi)\bigr| \leqslant F(\xi)$, $k = 1,2,\ldots$ и $F(\xi) \in L_1[a,b]$. Тогда $f(\xi) \in L_1[a,b]$ и возможен предельный переход $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_a^b f_k(\xi)\,d\xi = \int\limits_a^b f(\xi)\,d\xi$.*

Лемма 3.3. *Пусть последовательность $\bigl\{\varphi_k(x)\bigr\} \in C[0,1]$ удовлетворяет условиям: $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x) = \varphi(x)$, $\bigl|\varphi_k(x)\bigr| \leqslant \varphi_0(x)$, $k = 1,2,\ldots$, где $\varphi_0(x) \in L_1[0,1]$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} K\varphi_k(x) = K\varphi(x)$, $x \in (0,1]$. Если $\varphi(x)$ является непрерывной в точке $x = 0$, то последнее неравенство будет иметь место на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Полагая $f_k(\xi) = \dfrac{x\varphi_k(x)}{\pi(x^2+\xi^2)}$, $f(\xi) = \dfrac{x\varphi(x)}{\pi(x^2+\xi^2)}$, $f_0(\xi) = \dfrac{x\varphi_0(x)}{\pi(x^2+\xi^2)}$, легко видеть, что при $x > 0$ все требования теоремы Лебега выполняются. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_0^1 f_k(\xi)\,d\xi = \int\limits_0^1 f(\xi)\,d\xi$, $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x}{\pi}\int\limits_0^1\dfrac{\varphi_k(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2} = \dfrac{x}{\pi}\int\limits_0^1\dfrac{\varphi(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2}$, $0 < x \leqslant 1$, и $\lim\limits_{k\to\infty} K\varphi_k(0) = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty} K\varphi_k(0) = \dfrac{1}{2}\,\varphi(0) = K\varphi(0)$ при $x = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть последовательность* $\{\varphi_k(x)\} \subset L_1[0,1]$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^x \varphi_k(s)\,ds = \int\limits_0^x \varphi(s)\,ds \quad \forall x \in [0,1], \tag{3.8}$$

где $\varphi \in L_1[0,1]$ *и* $\sup\limits_{\substack{k\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} \left|\int\limits_0^x \varphi_k(s)\,ds\right| \leqslant C$. *Тогда имеет место равенство* $\lim\limits_{k\to\infty} K\varphi_k(x) = K\varphi(x)$, $0 < x \leqslant 1$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получим следующие равенства:

$$K\varphi(x) = \frac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2} = \frac{x}{\pi(x^2+1)}\int\limits_0^1 \varphi(s)\,ds + \frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1 \xi \int\limits_0^\xi \varphi(s)\,ds\,\frac{d\xi}{(x^2+\xi^2)^2}\,, \tag{3.9}$$

$$K\varphi_k(x) = \frac{x}{\pi(x^2+1)}\int\limits_0^1 \varphi_k(s)\,ds + \frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1 \xi \int\limits_0^\xi \varphi_k(s)\,ds\,\frac{d\xi}{(x^2+\xi^2)^2}\,. \tag{3.10}$$

Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Полагая $f_0(\xi) = \dfrac{C\xi}{(x^2+\xi^2)^2}$, $f_k(\xi) = \dfrac{\xi}{(x^2+\xi^2)^2}\int\limits_0^\xi \varphi_k(s)\,ds$ и $f(\xi) = \dfrac{\xi}{(x^2+\xi^2)^2}\int\limits_0^\xi \varphi(s)\,ds$, убедимся в выполнении всех условий теоремы Лебега при $x > 0$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2x}{\pi}\int\limits_0^1 \xi\int\limits_0^\xi \varphi_k(s)\,ds\,\dfrac{d\xi}{(x^2+\xi^2)^2} = \dfrac{2x}{\pi}\int\limits_0^1 \xi\int\limits_0^\xi \varphi(s)\,ds\,\dfrac{d\xi}{(x^2+\xi^2)^2}$. Кроме того, из (3.8) при $x = 1$ получим следующее равенство: $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_0^1 \varphi_k(s)\,ds = \int\limits_0^1 \varphi(s)\,ds$. Из равенств (3.9) и (3.10) в силу полученных предельных соотношений будем иметь $\lim\limits_{k\to\infty} K\varphi_k(x) = K\varphi(x)$ при $0 < x \leqslant 1$. Лемма доказана.

Аналогично доказательству леммы 3.3 доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.5. *Пусть последовательность* $\{\varphi_k(x)\} \subset C[0,1]$ *удовлетворяет условиям:* $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x)$, $|\varphi_k(x)| \leqslant \varphi_0(x)$, $k = 1,2,\ldots$, *где* $\varphi_0(x) \in L_1[0,1]$. *Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty}(K_0\varphi_k)(x) = (K_0\varphi)(x)$, $x \in [0,1]$.

4. Непрерывность, вполне непрерывность, норма и спектральный радиус интегральных операторов. В данном разделе устанавливаются непрерывность, вполне непрерывность и вычисляются норма и спектральный радиус некоторых интегральных операторов.

Оператор $(K_0\varphi)(x) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \dfrac{\varphi(\xi)\,d\xi}{1+(x-\xi)^2}$ действует в пространстве $C[0,1]$ и является вполне непрерывным. Наиболее общим утверждением является следующая лемма.

Лемма 4.1. *Для любого* $n \in N$ *оператор* $K_0 : L_1[0,1] \to C^n[0,1]$, *где* $L_1[0,1]$ — *лебегово пространство суммируемых, а* $C^n[0,1]$ — *пространство* n *раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке* $[0,1]$, *является вполне непрерывным.*

Утверждение леммы проверяется непосредственно.

Рассмотрим интегральный оператор $(K\varphi)(x) = \dfrac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \dfrac{\varphi(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2}$, $0 < x \leqslant 1$, $(K\varphi)(0) = \dfrac{\varphi(0)}{2}$.

Лемма 4.2. *Оператор* K *действует в пространстве* $C[0,1]$, *но не является вполне непрерывным.*

Доказательство. Действие оператора K в пространстве $C[0,1]$ следует из следствия 3.3. Докажем, что оператор K не является вполне непрерывным.

Рассмотрим семейство нормированных в пространстве $C[0,1]$ функций $\varphi_n(x) = x^{1/n}$, $n = 1,2,\ldots$. Имеем $(K\varphi_n)(x) = \dfrac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \dfrac{\xi^{1/n}\,d\xi}{x^2+\xi^2} = \dfrac{x^{1/n}}{\pi}\int\limits_0^{1/x} \dfrac{t^{1/n}\,dt}{1+t^2}$, $x > 0$, $(K\varphi_n)(0) = 0$, $n = 1,2,\ldots$. Для каждого

$x > 0$, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} (K\varphi_n)(x) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{1/x} \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{4}$ при $0 < x \leqslant 1$. Отсюда и из равенств $(K\varphi_n)(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, вытекает, что семейство $\{K\varphi_n\}$ не может быть равностепенно непрерывным. Следовательно, в силу теоремы Арцела [13] это семейство не может быть компактным. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Справедливы равенства* $\rho(K) = \|K\|_{C\to C} = \dfrac{1}{2}$, *где* $\rho(K)$ — *спектральный радиус оператора* $K : C[0,1] \to C[0,1]$.

Доказательство. Имеем $\bigl|K\varphi(x)\bigr| \leqslant \dfrac{x\|\varphi\|_C}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{d\xi}{x^2+\xi^2} \leqslant \dfrac{1}{2}\,\|\varphi\|_C$, если $0 < x \leqslant 1$, и $K\varphi(0) = \dfrac{1}{2}\,\varphi(0)$. Следовательно, $\|K\varphi\|_C \leqslant \dfrac{1}{2}\,\|\varphi\|_C$. Отсюда вытекает непрерывность оператора $K : C[0,1] \to C[0,1]$ и справедливость неравенства $\|K\| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим функцию $\varphi_0(t) \equiv 1$. Из равенства $K\varphi(0) = \dfrac{1}{2}\,\varphi(0)$ следует неравенство $\|K\varphi_0\|_C \geqslant \dfrac{1}{2}$. Отсюда и из неравенства $\|K\| \leqslant \dfrac{1}{2}$ получим равенство $\|K\|_{C\to C} = \dfrac{1}{2}$. Далее имеем

$$\|K^n\|_{C\to C} \leqslant \|K\|^n_{C\to C} = \frac{1}{2^n}\,, \quad \|K^n\varphi_0\|_C \geqslant \bigl|K^n\varphi_0(0)\bigr| = \frac{1}{2^n}\,\varphi_0(0) = \frac{1}{2^n}\,. \tag{4.1}$$

Из второго неравенства (4.1) следует, что $\|K^n\|_{C\to C} \geqslant \dfrac{1}{2^n}$. Отсюда и из первого неравенства (4.1) получим: $\|K^n\|_{C\to C} = \dfrac{1}{2^n}$. Согласно определению спектрального радиуса имеем $\rho(K) = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{\|K^n\|} = \dfrac{1}{2}$. Лемма доказана.

Рассмотрим систему интегральных уравнений (2.10). Так как и переменная x, и переменная y изменяются на интервале $(0,1)$ независимо друг от друга, их можно обозначить одной буквой, например буквой x. Введем обозначения

$$A = \begin{pmatrix} 0 & SK\varphi_2 & K_0\varphi_3 & K\varphi_4 \\ KS\varphi & 0 & SKS\varphi_3 & K_0\varphi_4 \\ K_0\varphi_1 & SKS\varphi_2 & 0 & KS\varphi_4 \\ K\varphi_1 & K_0\varphi_2 & SK\varphi_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} J\,0\,0\,0 \\ 0\,J\,0\,0 \\ 0\,0\,J\,0 \\ 0\,0\,0\,J \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где операторы K, K_0, S определены выше, 0 — нулевой, а J — единичный операторы: $(J\varphi)(x) = \varphi(x)$, $(0\varphi)(x) = 0$ для любой функции $\varphi \in C[0,1]$. В силу введенных обозначений систему (2.10) можно представить в виде

$$(I + A)\overline{\Phi}\,(x) = \overline{\Psi}(x), \tag{4.3}$$

где $\overline{\Phi}(x) = \bigl(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)\bigr)^{\mathrm{T}}$, $\overline{\Psi}(x) = \bigl(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x)\bigr)^{\mathrm{T}}$, а символ Т обозначает операцию транспонирования. Так как каждый составляющий оператор матричного оператора A действует в пространстве $C[0,1]$, то сам оператор A действует в пространстве вектор-функций

$$\overline{C}\,[0,1] = \bigl\{\,\overline{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}} : \varphi_i \in C[0,1],\ i = \overline{1,4}\,\bigr\}$$

с нормой $\|\,\overline{\Phi}\,\|_{\overline{C}\,[0,1]} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} \|\varphi_i\|_{C[0,1]}$.

Лемма 4.4. *Для операторов* $A : \overline{C}\,[0,1] \to \overline{C}\,[0,1]$ *и* $A^2 : \overline{C}\,[0,1] \to \overline{C}\,[0,1]$ *число* $\lambda = 1$ *является собственным значением, а вектор-функция* $\overline{\Phi}_0 = (\varphi_0, \varphi_0, \varphi_0, \varphi_0)^{\mathrm{T}}$, $\varphi_0(x) \equiv 1$, *является единственной собственной функцией этих операторов с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство. Покажем справедливость равенства $A\,\overline{\Phi}_0 = \overline{\Phi}_0$. Вычислим первую координату вектор-функции $A\,\overline{\Phi}_0$:

$$(A\,\overline{\Phi}_0)_1 = (SK\varphi_0)(x) + (K_0\varphi_0)(x) + (K\varphi_0)(x) = \frac{1-x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{d\eta}{(1-x)^2+\eta^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{1+(x-\xi)^2} + \frac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{d\eta}{x^2+\eta^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x} + \operatorname{arctg}(1-x)\right) + \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = 1 = \varphi_0(x).$$

Аналогичными вычислениями можно показать, что и оставшиеся координаты вектор-функции $A\,\overline{\Phi}_0$ также совпадают с $\varphi_0(x)$.

Отсюда следует равенство $A^2\,\overline{\Phi}_0 = \overline{\Phi}_0$. Докажем, что равенству $A^2\,\overline{\Phi} = \overline{\Phi}$ удовлетворяет только вектор-функция $\overline{\Phi}_0$ (с точностью до постоянного множителя).

Предположим противное. Пусть вектор-функция $\overline{\Phi}_1$ удовлетворяет равенству $A^2\,\overline{\Phi} = \overline{\Phi}$ и является линейно независимой с функцией $\overline{\Phi}_0$.

Определим числа $\mu^+ = \sup\{\mu : \overline{\Phi}_0 - \mu\overline{\Phi}_1 \geqslant 0\}$, $\mu^- = \inf\{\mu : \overline{\Phi}_0 - \mu\overline{\Phi}_1 \geqslant 0\}$. Здесь неравенства понимаются покоординатно и при всех $x \in [0,1]$. Заметим, что хотя бы одна из величин μ^+ и μ^- является конечной. Через μ_0 обозначим одну из величин μ^+ и μ^-, имеющую конечное значение (если обе величины конечны, то μ_0 — любая из них).

Рассмотрим функцию $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_0 - \mu_0\overline{\Phi}_1$. Введенная вектор-функция $\overline{\Phi}$ является неотрицательной и удовлетворяет равенству $A^2\,\overline{\Phi} = \overline{\Phi}$. Введя обозначение $\overline{\Psi} = A\,\overline{\Phi}$, получим систему равенств

$$\overline{\Phi} = A\,\overline{\Psi}, \quad \overline{\Psi} = A\,\overline{\Phi}. \tag{4.4}$$

Из неотрицательности вектор-функции $\overline{\Phi}$ вытекает неотрицательность вектор-функции $\overline{\Psi}$.

Покажем, что каждая координата вектор-функции $\overline{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}}$ строго положительна на отрезке $[0,1]$. Действительно, если вектор-функция $\overline{\Phi}$ не является строго положительной, то найдется точка $x_0 \in [0,1]$, в которой некоторая ее координата обращается в нуль. Для определенности будем предполагать, что $\varphi_1(x_0) = 0$. Для первой координаты первой функции системы (4.4) в точке x_0 получим

$$\varphi_1(x_0) = \frac{1-x_0}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\psi_2(\eta)\,d\eta}{(1-x_0)^2+\eta^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\psi_3(\xi)\,d\xi}{1+(x_0-\xi)^2} + \frac{x_0}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\psi_4(\eta)\,d\eta}{x_0^2+\eta^2} = 0. \tag{4.5}$$

Из этого равенства в силу неотрицательности функций ψ_2, ψ_3 и ψ_4 имеем

$$\begin{cases} \psi_2(\eta) \equiv 0, \psi_3(\xi) \equiv 0, \psi_4(\eta) \equiv 0, \text{если} \quad 0 < x_0 < 1, \\ \psi_2(0) = 0, \psi_3(\xi) \equiv 0, \psi_4(\eta) \equiv 0, \text{если} \quad x_0 = 1, \\ \psi_2(\eta) \equiv 0, \psi_3(\xi) \equiv 0, \psi_4(0) = 0, \text{если} \quad x_0 = 0. \end{cases}$$

Во всех трех случаях имеет место тождество $\psi_3(\xi) \equiv 0$. Поэтому для третьей координаты второй функции системы (4.4) получим $\psi_3(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{1+(x-\xi)^2} + \frac{1-x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{(1-x)^2+(1-\eta)^2} + \frac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{x^2+\eta^2} \equiv 0$. Из полученного тождества в силу неотрицательности функций φ_1, φ_2 и φ_4 приходим к следующим тождествам:

$$\varphi_1(\xi) \equiv 0, \quad \varphi_2(\eta) \equiv 0, \quad \varphi_4(\eta) \equiv 0. \tag{4.6}$$

Так как $\varphi_1(\xi) \equiv 0$, то в равенстве (4.5) можно положить $x_0 = 1/2$. Следовательно, $\psi_2(\eta) \equiv 0$. Для второй координаты второй функции системы (4.4) имеем

$$\psi_2(x) = \frac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_1(\xi)\,d\xi}{x^2+(1-\xi)^2} + \frac{1-x}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_3(\xi)\,d\xi}{(1-x)^2+(1-\xi)^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi_4(\eta)\,d\eta}{1+(x-\eta)^2} \equiv 0.$$

Из этого тождества в силу неотрицательности функций φ_1, φ_3 и φ_4 получим $\varphi_1(\xi) \equiv 0$, $\varphi_3(\xi) \equiv 0$ и $\varphi_4(\eta) \equiv 0$. Отсюда и из тождеств (4.6) вытекает, что вектор-функция $\overline{\Phi}\,(x)$ тождественно равна нулю, т.е. $\overline{\Phi}_0(x) - \mu_0\overline{\Phi}_1(x) \equiv 0$. Полученное тождество противоречит линейной независимости вектор-функций $\overline{\Phi}_0(x)$ и $\overline{\Phi}_1(x)$.

Таким образом, каждая координата вектор-функции $\overline{\Phi}(x)$ строго положительна. Это противоречит выбору величины μ_0. Следовательно, вектор-функция $\overline{\Phi}_0(x)$ является единственной собственной функцией, отвечающей собственному значению $\lambda = 1$.

Покажем, что и для интегрального оператора A вектор-функция $\overline{\Phi}_0(x)$ является единственной собственной функцией (с точностью до постоянного множителя), отвечающей собственному значению $\lambda = 1$. Если допустить, что имеется еще другая собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda = 1$, то она является собственной функцией и для интегрального оператора A^2. Но у оператора A^2 имеется только одна собственная функция (с точностью до постоянного множителя), отвечающая собственному значению $\lambda = 1$. Следовательно, и у оператора A всего одна собственная функция (с точностью до постоянного множителя), отвечающая собственному значению $\lambda = 1$. Лемма доказана.

Следствие 4.1. Однородное уравнение $(I + A)\,\overline{\Phi} = 0$ имеет только тривиальное решение.

Лемма 4.5. *Для спектрального радиуса оператора* $A : \overline{C} \to \overline{C}$, *где* $\overline{C} = \overline{C}\,[0,1]$, *и норм операторов* A^k, $k = 1, 2, \dots$, *справедливы равенства* $\rho(A) = \|A^k\|_{\overline{C}\to\overline{C}} = 1$.

Доказательство. Для любой вектор-функции $\overline{\Phi} \in \overline{C}\,[0,1]$ выполнены неравенства $-\|\Phi\|_{\overline{C}}\,\overline{\Phi}_0 \leqslant \overline{\Phi}\,(x) \leqslant \|\Phi\|_{\overline{C}}\,\overline{\Phi}_0(x)$, где $\overline{\Phi}_0(x)$ — собственная функция оператора A, отвечающая собственному значению $\lambda = 1$. Применяя оператор A к каждому члену двойного неравенства, в силу неотрицательности ядер составляющих операторов оператора A имеем $-\|\Phi\|_{\overline{C}}\,\overline{\Phi}_0(x) \leqslant (A\,\overline{\Phi})(x) \leqslant \|\Phi\|_{\overline{C}}\,\overline{\Phi}_0(x)$. Переходя к нормам в двойном неравенстве, получим $\|A\,\overline{\Phi}\|_{\overline{C}} \leqslant \|\overline{\Phi}\|_{\overline{C}}$. Из полученного неравенства следует, что $\|A\|_{\overline{C}\to\overline{C}} \leqslant 1$. Заметим, что $\lambda = 1$ является собственным значением оператора A, поэтому в последнем соотношении может иметь место только равенство $\|A\|_{\overline{C}\to\overline{C}} = 1$. Из этого равенства, в силу приведенного выше замечания, для любого $k = 2, 3, \dots$ получим равенство $\|A^k\|_{\overline{C}\to\overline{C}} = 1$, из которого, в свою очередь, следует $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|_{\overline{C}\to\overline{C}}} = 1$. Лемма доказана.

5. Равностепенная непрерывность семейств функций. Пусть x_0 – фиксированная точка отрезка $[0,1]$. Семейство $\{h_k(x)\}$ назовем равностепенно непрерывным в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in [0,1]$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $\bigl|h_k(x) - h_k(x_0)\bigr| < \varepsilon$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Лемма 5.1. *Пусть семейство* $\{h_k = h_k(x)\}$ *равномерно ограничено на отрезке* $[0,1]$ $\Bigl(\bigl|h_k(x)\bigr| \leqslant C,$ $x \in [0,1],\ k = 1, 2, \dots\Bigr)$ *и равностепенно непрерывно в точке* $x = 0$. *Тогда семейство* $\{g_k = Kh_k\}$ *равностепенно непрерывно на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\bigl|Kh_k(x) - Kh_k(0)\bigr| &= \left|\frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{h_k(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2} - \frac{h_k(0)}{2}\right| = \left|\frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{h_k(\xi)\,d\xi}{x^2+\xi^2} - \frac{x}{\pi} - \int_0^1 \frac{h_k(0)\,d\xi}{x^2+\xi^2} + \frac{h_k(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \right.\\ &\left. - \frac{h_k(0)}{2}\right| \leqslant \left|\frac{h_k(0)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{h_k(0)}{2}\right| + \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{\bigl|h_k(\xi) - h_k(0)\bigr|}{x^2+\xi^2}\,d\xi \equiv I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Число $x_0 > 0$ выберем таким, чтобы

$$\frac{2C}{\pi}\,x_0 < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{5.2}$$

Тогда для $0 < x < x_0$ получим

$$I_1 = \left|\frac{h_k(0)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{\bigl|h_k(0)\bigr|}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{C}{\pi}\operatorname{arctg} x < \frac{C}{\pi}\,x < \frac{C}{\pi}\,x_0 < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{5.3}$$

Оценим второе слагаемое I_2:

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{1/x} \frac{\bigl|h_k(xu) - h_k(0)\bigr|}{1+u^2}\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^{1/x_0} \frac{\bigl|h_k(xu) - h_k(0)\bigr|}{1+u^2}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{1/x_0}^{1/x} \frac{\bigl|h_k(xu) - h_k(0)\bigr|}{1+u^2}\,du \equiv I_{21} + I_{22}.$$

Для интеграла I_{22} приходим к оценке

$$I_{22} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{1/x_0}^{1/x} \frac{2C\,du}{1+u^2} = \frac{2C}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x_0}\right] = \frac{2C}{\pi}\left[\operatorname{arctg} x_0 - \operatorname{arctg} x\right] \leqslant \frac{2C}{\pi}\operatorname{arctg} x_0 < \frac{2Cx_0}{\pi} < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{5.4}$$

Для доказательства последнего неравенства мы воспользовались неравенством (5.2).

Фиксируем точку x_0, удовлетворяющую неравенству (5.2), и рассмотрим интеграл I_{21}. Поскольку семейство $\{h_k\}$ равностепенно непрерывно в точке $x = 0$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любого $t : 0 < t < \delta$ выполняется $\big|h_k(t) - h_k(0)\big| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Отсюда при $t = xu$ и $0 < u < 1/x_0$, где x удовлетворяет условию $x < \delta x_0$, следует $\big|h_k(xu) - h_k(0)\big| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Имеем

$$I_{21} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1/x_0} \frac{\big|h_k(xu) - h_k(0)\big|}{1+u^2}\,du < \frac{\varepsilon}{3\pi}\int\limits_0^{1/x_0}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\varepsilon}{3\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{3\pi}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Отсюда и из (5.1) в силу (5.3) и (5.4) получим $\big|Kh_k(x) - Kh_k(0)\big| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$.

Таким образом, нами доказана равностепенная непрерывность семейства $\{g_k = Kh_k\}$ в точке $x = 0$. Докажем равностепенную непрерывность этого семейства на всем отрезке $[0, 1]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Мы должны показать существование такого числа $\delta > 0$, что если $|x - y| < \delta$, то $\big|g(x) - g(y)\big| < \varepsilon$. Для простоты записи индекс k опущен.

Из равностепенной непрерывности семейства $\{g_k = Kh_k\}$ в точке $x = 0$ следует существование такого $\delta_0 > 0$, что из условия $0 < x \leqslant \delta_0$ вытекает справедливость неравенства $\big|g(x) - g(0)\big| < \varepsilon/3$.

Фиксируем δ_0 и рассмотрим семейство $\{g_k = Kh_k\}$ на отрезке $[\delta_0, 1]$. Из леммы 3.1 вытекает ограниченность семейства $\{g_k = Kh_k\}$ в пространстве $C^1[\delta_0, 1]$. Отсюда следует равностепенная непрерывность этого семейства в $C[\delta_0, 1]$, т.е. существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых $x, y \in [\delta_0, 1]$, удовлетворяющих условию $|x - y| < \delta_1$, вытекает справедливость неравенства $\big|g(x) - g(y)\big| < \varepsilon/3$.

Положим $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$. Пусть $x, y \in [0, 1]$ и $|x - y| < \delta$. Возможны случаи: 1) $0 \leqslant x,\ y \leqslant \delta_0$; 2) $\delta_0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$; 3) $0 \leqslant x < \delta_0 < y \leqslant 1$.

Для случая 1) имеем $\big|g_k(x) - g_k(y)\big| \leqslant \big|g_k(x) - g_k(0)\big| + \big|g_k(0) - g_k(y)\big| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$.

Для случая 2) имеем $\big|g_k(x) - g_k(y)\big| < \varepsilon/3$.

Для случая 3) имеем $\big|g_k(x) - g_k(y)\big| < \big|g_k(x) - g_k(0)\big| + \big|g_k(0) - g_k(\delta_0)\big| + \big|g_k(\delta_0) - g_k(y)\big| < \varepsilon$.

Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Пусть семейство функций* $\big\{h_k(x)\big\} \in C[0, 1]$ *равномерно ограничено на отрезке* $[0, 1]$, *т.е.* $\|h_k\|_C \leqslant C$, *и равностепенно непрерывно в точке* $x = 0$. *Тогда семейство* $\big\{\varphi_k = (I - K^2)^{-1}h_k\big\}$ *равностепенно непрерывно в точке* $x = 0$.

Доказательство. Так как норма $\|K\|_{C\to C} = 1/2$, то ряд Неймана [13] (индекс k для простоты опущен) $\varphi = (I - K^2)^{-1}\ h = h + K^2h + K^4h + \cdots$ сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. В силу оценки $\|K^{2n}h\|_C \leqslant \|K\|^{2n}_{C\to C}\|h\|_C \leqslant \dfrac{C}{2^{2n}} = \dfrac{C}{4^n}$ имеем $\big\|K^{2n}h + K^{2(n+1)}h + \cdots\big\|_C \leqslant C\Big(\dfrac{1}{4^n} + \dfrac{1}{4^{n+1}} + \cdots\Big) = \dfrac{C}{3\cdot 4^{n-1}}\,$.

Отсюда при $\dfrac{C}{4^{n-1}} < \varepsilon$ получим

$$\big\|K^{2n}h + K^{2(n+1)}h + \cdots\big\|_C < \varepsilon/3. \tag{5.5}$$

Рассмотрим приращение

$$\varphi(x) - \varphi(0) = (I - K^2)^{-1}h(x) - (I - K^2)^{-1}h(0) = \big[h(x) - h(0)\big] + \big[K^2h(x) - K^2h(0)\big] + \cdots\,.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ из равностепенной непрерывности семейства $\big\{h_k = h_k(x)\big\}$ следует существование такого $\delta_0 > 0$, что из условия $x < \delta_0$ вытекает $\big|h(x) - h(0)\big| < \dfrac{\varepsilon}{3n}$. Применяя $2k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ раз лемму 5.1, найдем $\delta_k > 0$, такое, что из условия $x < \delta_k$ следует неравенство $\big|K^{2k}h(x) - K^{2k}h(0)\big| < \dfrac{\varepsilon}{3n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Положим $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}\}$. Из последних неравенств при $x < \delta$ получим

$$\Big|\big[h(x) - h(0)\big] + \big[K^2h(x) - K^2h(0)\big] + \cdots + \big[K^{2(n-1)}h(x) - K^{2(n-1)}h(0)\big]\Big| < n\,\frac{\varepsilon}{3n} = \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{5.6}$$

Из неравенства (5.5) имеем

$$\begin{aligned}\Big|\big[K^{2n}h(x) - K^{2n}h(0)\big] + \big[K^{2(n+1)}h(x) - K^{2(n+1)}h(0)\big] + \cdots\Big| \leqslant \\ \leqslant \big|K^{2n}h(x) + K^{2(n+1)}h(x)\big| + \big|K^{2n}h(0) + K^{2(n+1)}h(0) + \cdots\big| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Из неравенств (5.6) и (5.7) окончательно получим $\big|\varphi(x) - \varphi(0)\big| < \varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Пусть семейство функций* $\big\{h_k = h_k(x)\big\} \in C[0, 1]$ *равномерно ограничено на отрезке* $[0, 1]$, *т.е.* $\|h_k\|_C \leqslant C$, *и равностепенно непрерывно на отрезке* $[0, \sigma]$, *где* $0 < \sigma \leqslant 1$. *Тогда семейство* $\big\{\varphi_k = (I - K^2)^{-1}h_k\big\}$ *равностепенно непрерывно на* $[0, \sigma]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. По заданному ε число n выберем таким образом, чтобы имело место неравенство (5.5). По условию семейство $\{h_k = h_k(x)\}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[0, \sigma]$, а семейства $\{K^2 h\}, \{K^4 h\}, \ldots, \{K^{2(n-1)} h\}$ равностепенно непрерывны на отрезке $[0, 1]$ в силу леммы 5.1; следовательно, семейство функций $\{\psi(x) = h + K^2 h + K^4 h + \cdots + K^{2(n-1)} h\}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[0, \sigma]$. По заданному ε число $\delta > 0$ выберем так, чтобы $|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon/3$, если x, $y \in [0, \sigma]$, $|x - y| < \delta$. Так как $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\psi(x) - \psi(y)| + |R_n h(x)| + |R_n h(y)|$, где $R_n h(t) = \varphi(t) - \psi(t)$, то из (5.5) и неравенства $|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon/3$ вытекает $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ для всех x, $y \in [0, \sigma]$, $|x - y| < \delta$. Лемма доказана.

6. Однозначная разрешимость системы интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций. В этом разделе доказывается корректная разрешимость оператора $A : \overline{C} \to \overline{C}$ $\left(\overline{C} = \overline{C}\,[0, 1]\right)$, где операторы I и A определены равенствами (4.2), и однозначная разрешимость системы интегральных уравнений (4.3) в пространстве $\overline{C}\,[0, 1]$.

Теорема 6.1. *Оператор $(I + A) : \overline{C}\,[0, 1] \to \overline{C}\,[0, 1]$ является корректно разрешимым, т.е. существует такое $d > 0$, что для любой вектор-функции $\overline{\Phi} \in \overline{C}\,[0, 1]$ выполнено*

$$\left\|(I + A)\overline{\Phi}\,\right\|_{\overline{C}} \geqslant d \|\,\overline{\Phi}\,\|_{\overline{C}}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Предположим противное: неравенство (6.1) не выполнено. Тогда существует последовательность нормированных вектор-функций

$$\overline{\Phi}_k = (\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \varphi_{3k}, \varphi_{4k})^{\mathrm{T}}, \quad \left\|\,\overline{\Phi}_k\right\|_{\overline{C}} = 1, \quad \|\varphi_{ik}\|_C \leqslant 1, \quad i = \overline{1, 4}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.2}$$

для которой имеет место предельное соотношение $\left\|\,\overline{\Phi}_k + A\,\overline{\Phi}_k\right\|_{\overline{C}} \to 0$ при $k \to \infty$. Это соотношение в координатах можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\varphi_{1k} + SK\varphi_{2k} + K_0\varphi_{3k} + K\varphi_{4k} = \psi_{1k} \to 0, \qquad KS\varphi_{1k} + \varphi_{2k} + SKS\varphi_{3k} + K_0\varphi_{4k} = \psi_{2k} \to 0,\\ &K_0\varphi_{1k} + SKS\varphi_{2k} + \varphi_{3k} + KS\varphi_{4k} = \psi_{3k} \to 0, \quad K\varphi_{1k} + K_0\varphi_{2k} + SK\varphi_{3k} + \varphi_{4k} = \psi_{4k} \to 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где сходимость равномерна по $x \in [0, 1]$. Из равенства (6.2) следует, что $\|\varphi_{ik}\|_C \leqslant 1$, $i = \overline{1, 4}$, $k = 1, 2, \ldots$.

В приводимых ниже рассуждениях неоднократно используется процедура выбора подпоследовательности из последовательностей $\{\varphi_{ik}\}$, $i = \overline{1, 4}$, $k = 1, 2, \ldots$. Во избежание загромождения записи дополнительными индексами без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $\{\varphi_{ik}\}$ удовлетворяет соответствующим предельным соотношениям.

Так как K_0 — вполне непрерывный оператор, то при $k \to \infty$ существуют следующие пределы:

$(K_0\varphi_{3k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{13}(x)$, $(K_0\varphi_{4k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{24}(x)$, $(K_0\varphi_{1k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{31}(x)$, $(K_0\varphi_{2k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{42}(x)$ равномерно по $x \in [0, 1]$;

$(SK\varphi_{2k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{12}(x)$, $(SKS\varphi_{3k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{23}(x)$, $(KS\varphi_{4k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{34}(x)$, $(SK\varphi_{3k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{43}(x)$ в каждой точке $x \in [0, 1]$ и равномерно на каждом отрезке $[0, \sigma]$, $0 < \sigma < 1$;

$(K\varphi_{4k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{14}(x)$, $(KS\varphi_{1k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{21}(x)$, $(SKS\varphi_{2k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{32}(x)$, $(K\varphi_{1k})(x) \to \widetilde{\varphi}_{41}(x)$ в каждой точке $x \in [0, 1]$ и равномерно на каждом отрезке $[\delta, 1]$, $0 < \delta < 1$.

В силу полученных соотношений из (6.3) при $k \to \infty$ будем иметь:

$$\begin{aligned} &\varphi_{1k}(x) \to -\widetilde{\varphi}_{12}(x) - \widetilde{\varphi}_{13}(x) - \widetilde{\varphi}_{14}(x) \equiv \varphi_1(x), \quad \varphi_{2k}(x) \to -\widetilde{\varphi}_{21}(x) - \widetilde{\varphi}_{23}(x) - \widetilde{\varphi}_{24}(x) \equiv \varphi_2(x),\\ &\varphi_{3k}(x) \to -\widetilde{\varphi}_{31}(x) - \widetilde{\varphi}_{32}(x) - \widetilde{\varphi}_{34}(x) \equiv \varphi_3(x), \quad \varphi_{4k}(x) \to -\widetilde{\varphi}_{41}(x) - \widetilde{\varphi}_{42}(x) - \widetilde{\varphi}_{43}(x) \equiv \varphi_4(x) \end{aligned}$$

в каждой точке $x \in [0, 1]$ и равномерно на каждом отрезке $[\delta, \sigma]$: $0 < \delta < \sigma < 1$.

Таким образом, из полученных соотношений получим

$$\overline{\Phi}_k(x) \to \overline{\Phi}\,(x), \quad k \to \infty, \quad \overline{\Phi}\,(x) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^{\mathrm{T}}, \tag{6.4}$$

в каждой точке $x \in [0, 1]$, причем сходимость равномерна на каждом отрезке $[\delta, \sigma]$: $0 < \delta < \sigma < 1$.

Заметим, что вектор-функция $\overline{\Phi}\,(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и непрерывна на интервале $(0, 1)$. Из соотношения (6.4) следует, что $A\,\overline{\Phi}_k(x) \to A\,\overline{\Phi}\,(x)$ при $k \to \infty$ во всех точках $x \in [0, 1]$ и равномерно на каждом отрезке $[\delta, \sigma]$: $0 < \delta < \sigma < 1$. Действительно, из свойств оператора K (см. лемму 3.3) следует, что $KS\varphi_{1k} \to KS\varphi_1$, $K\varphi_{1k} \to K\varphi_1$, $SK\varphi_{2k} \to SK\varphi_2$, $SKS\varphi_{2k} \to SKS\varphi_2$, $SKS\varphi_{3k} \to SKS\varphi_3$, $SK\varphi_{3k} \to SK\varphi_3$, $K\varphi_{4k} \to K\varphi_4$, $KS\varphi_{4k} \to KS\varphi_4$ при $k \to \infty$ для всех точек $x \in [0, 1]$ и равномерно на каждом отрезке $[\delta, \sigma]$: $0 < \delta < \sigma < 1$.

Из свойств оператора K_0 (см. леммы 3.5 и 4.1) следует сходимость $K_0\varphi_{mk}(x) \to K_0\varphi_m(x)$ при $k\to\infty$, $m=\overline{1,4}$, равномерно по x на отрезке $[0,1]$.

Покажем, что функция $\overline{\Phi}(x)$ является равномерным пределом последовательности $\left\{\overline{\Phi}_k(x)\right\}$ на всем отрезке $[0,1]$. Действительно, так как предельное соотношение (6.4) равномерно на каждом отрезке $[\delta,\sigma]$, $0<\delta<\sigma<1$, то достаточно доказать равномерную сходимость последовательности $\left\{\overline{\Phi}_k(x)\right\}$ в малой окрестности точек $x=0$ и $x=1$.

Этот факт установим поэтапно. Сначала докажем равномерную сходимость последовательностей $\left\{\varphi_{1k}(x)\right\}$ и $\left\{\varphi_{4k}(x)\right\}$ в окрестности точки $x=0$.

С этой целью рассмотрим систему

$$\varphi_{1k}+K\varphi_{4k}=\psi'_{1k},\ K\varphi_{1k}(x)+\varphi_{4k}=\psi'_{4k}\ (\psi'_{1k}=\psi_{1k}-SK\varphi_{2k}-K_0\varphi_{3k},\ \psi'_{4k}=\psi_{1k}-K_0\varphi_{2k}-SK\varphi_{3k}),$$

которая образована из первого и четвертого уравнений системы (6.3).

Применим ко второму уравнению этой системы оператор K и затем, вычитая полученное соотношение из первого уравнения, будем иметь

$$\varphi-K^2\varphi=h\quad(\varphi=\varphi_{1k},\quad h=h_{1k}=\psi'_{1k}-K\psi'_{4k}),\tag{6.4$'$}$$

или $(I-K^2)\varphi=h$. Так как оператор $I-K^2$ является обратимым, то из (6.4$'$) получим $\varphi=(I-K^2)^{-1}h$. Из ограниченности последовательностей $\left\{\varphi_{2k}(x)\right\}$ и $\left\{\varphi_{3k}(x)\right\}$ в силу леммы 3.1 следует равностепенная непрерывность семейств $\left\{(SK\varphi_{2k})(x)\right\}$ и $\left\{(SK\varphi_{3k})(x)\right\}$ на отрезке $[0,\sigma]$. Последовательности $\{\psi_{1k}(x)\}$, $\{\psi_{4k}(x)\}$, $\left\{(K_0\varphi_{2k})(x)\right\}$ и $\left\{(K_0\varphi_{3k})(x)\right\}$ равномерно сходятся на $[0,1]$. Поэтому семейства $\left\{\psi'_{1k}(x)\right\}$ и $\left\{\psi'_{4k}(x)\right\}$ равномерно ограничены на $[0,1]$ и равностепенно непрерывны на $[0,\sigma]$. Это свойство сохраняется и для семейства $\left\{h=h_{1k}(x)\right\}$ в силу леммы 5.1. Отсюда и из леммы 5.3 вытекает равностепенная непрерывность семейства $\left\{\varphi=\varphi_{1k}=(I-K^2)^{-1}h_{1k}\right\}$ на отрезке $[0,\sigma]$.

Полагая $\varphi=\varphi_{4k}(x)$, $h=h_{4k}(x)=\psi'_{4k}(x)-K\psi'_{1k}(x)$ в (6.4$'$) и проведя аналогичное рассуждение, получим равностепенную непрерывность семейства $\left\{\varphi=\varphi_{4k}=(I-K^2)^{-1}h_{4k}\right\}$ на отрезке $[0,\sigma]$. Равностепенная непрерывность семейств $\left\{\varphi_{1k}(x)\right\}$ и $\left\{\varphi_{4k}(x)\right\}$ в окрестности точки $x=0$ доказана.

Докажем равностепенную непрерывность семейств $\left\{\varphi_{2k}(x)\right\}$ и $\left\{\varphi_{3k}(x)\right\}$ в окрестности точки $x=1$. При этом будем использовать установленное ранее свойство равностепенной непрерывности семейств $\left\{\varphi_{1k}(x)\right\}$ и $\left\{\varphi_{4k}(x)\right\}$ в окрестности точки $x=0$.

Рассмотрим систему

$$\varphi_{2k}+SKS\varphi_{3k}=\psi'_{2k},\ SKS\varphi_{2k}+\varphi_{3k}=\psi'_{3k}\ (\psi'_{2k}=\psi_{2k}-KS\varphi_{1k}-K_0\varphi_{4k},\ \psi'_{3k}=\psi_{3k}-K_0\varphi_{1k}-KS\varphi_{4k}),$$

которая образована из второго и третьего уравнений системы (6.3).

Применим ко второму уравнению этой системы оператор SKS и вычтем полученное соотношение из первого уравнения. Получим $\varphi_{2k}(x)-\big((SKS)^2\varphi_{2k}\big)(x)=\psi'_{2k}(x)-(SKS\psi'_{3k})(x)$, т.е. $\varphi-(SKS)^2\varphi=h$, где $\varphi=\varphi_{2k}(x)$, $h=h_{2k}=\psi'_{2k}(x)-(SKS\psi'_{3k})(x)$. Полученное уравнение можно записать в виде $\varphi-SK^2S\varphi=h$. Применив оператор S к этому равенству, получим $(I-K^2)S\varphi=Sh$. Так как оператор $I-K^2$ является обратимым, то отсюда имеем $S\varphi=(I-K^2)^{-1}Sh$. Применим оператор S к этому равенству. Тогда $\varphi=S(I-K^2)^{-1}Sh$. Из равностепенной непрерывности семейств $\left\{\varphi_{1k}(x)\right\}$ и $\left\{\varphi_{4k}(x)\right\}$ на отрезке $[0,\sigma]$ вытекает равностепенная непрерывность семейств $\left\{(KS\varphi_{1k})(x)\right\}$ и $\left\{(KS\varphi_{4k}(x)\right\}$ на отрезке $[1-\sigma,1]$. Последовательности $\left\{\psi_{2k}(x)\right\}$, $\left\{\psi_{3k}(x)\right\}$, $\left\{(K_0\varphi_{1k})(x)\right\}$ и $\left\{(K_0\varphi_{4k})(x)\right\}$ равномерно сходятся на отрезке $[0,1]$. Поэтому семейства $\left\{\psi'_{2k}(x)\right\}$ и $\left\{\psi'_{3k}(x)\right\}$ равномерно ограничены на отрезке $[0,1]$ и равностепенно непрерывны на отрезке $[1-\sigma,1]$. Отсюда в силу леммы 5.3 вытекает равностепенная непрерывность семейства $\left\{\varphi=\varphi_{2k}=S(I-K^2)^{-1}Sh_{2k}\right\}$ на отрезке $[1-\sigma,1]$.

Положим $\varphi-SK^2S\varphi=h$ и $\varphi=\varphi_{3k}(x)$, $h=h_{3k}(x)=\psi'_{3k}(x)-(SKS\psi'_{2k})(x)$. Проведя аналогичное рассуждение, получим равностепенную непрерывность семейства $\left\{\varphi=\varphi_{3k}(x)=S(I-K^2)^{-1}Sh_{3k}\right\}$ на отрезке $[1-\sigma,1]$.

Равностепенная непрерывность семейств $\left\{\varphi_{2k}(x)\right\}$ и $\left\{\varphi_{3k}(x)\right\}$ в окрестности точки $x=1$ доказана.

Докажем равностепенную непрерывность семейства $\left\{\varphi_{1k}(x)\right\}$ в окрестности точки $x=1$ и семейства $\left\{\varphi_{2k}(x)\right\}$ в окрестности точки $x=0$. Рассмотрим систему

$$\varphi_{1k}+SKS\varphi_{2k}=\psi''_{1k},\ KS\varphi_{1k}+\varphi_{2k}=\psi''_{2k}\ (\psi''_{1k}=\psi_{1k}-K_0\varphi_{3k}-K\varphi_{4k},\ \psi''_{2k}=\psi_{2k}-SKS\varphi_{2k}-K_0\varphi_{4k}),$$

которая составлена из первых двух уравнений системы (6.3).

Применим ко второму уравнению этой системы оператор SK и затем, вычитая полученное соотношение из первого уравнения, будем иметь $\varphi_{1k} - SK^2S\varphi_{1k} = \psi''_{1k} - SK\psi''_{2k}$, т.е. $(I-K^2)S\varphi_{1k} = S\psi''_{1k} - K\psi''_{2k}$. Отсюда $S\varphi_{1k} = (I-K^2)^{-1}(S\psi''_{1k} - K\psi''_{2k})$ и, следовательно, $\varphi_{1k} = S(I-K^2)^{-1}(S\psi''_{1k} - K\psi''_{2k})$. Так как оператор K_0 является вполне непрерывным, то семейства $\{K_0\varphi_{3k}\}$ и $\{K_0\varphi_{4k}\}$ — равностепенно непрерывны на отрезке $[0,1]$. Из равностепенной непрерывности семейства $\{\varphi_{2k}\}$ в окрестности точки $x=1$ и семейства $\{\varphi_{4k}\}$ в окрестности точки $x=0$ в силу леммы 5.1 следует равностепенная непрерывность семейств $\{SKS\varphi_{2k}\}$ и $\{K\varphi_{4k}\}$ на отрезке $[0,1]$. Отсюда вытекает равностепенная непрерывность семейств $\{\psi''_{1k} = \psi_{1k} - K_0\varphi_{3k} - K\varphi_{4k}\}$ и $\{\psi''_{2k} = \psi_{2k} - SKS\varphi_{2k} - K_0\varphi_{4k}\}$ на отрезке $[0,1]$, и поэтому семейство $\big\{\varphi_{1k}(x)\big\}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[0,1]$.

Применяя к первому уравнению оператор KS и вычитая полученное соотношение из второго уравнения, получим $\varphi_{2k}(x) - (K^2\varphi_{2k})(x) = \psi''_{2k}(x) - (KS\psi''_{1k})(x)$, т.е. $\varphi_{2k} = (I-K^2)^{-1}\big(\psi''_{2k}(x) - (KS\psi''_{1k})(x)\big)$. Так как семейства $\{\psi''_{1k}\}$ и $\{\psi''_{2k}\}$ равностепенно непрерывны на отрезке $[0,1]$, то и семейство $\{\varphi_{2k}\}$ равностепенно непрерывно на отрезке $[0,1]$.

Равностепенная непрерывность семейства $\{\varphi_{1k}\}$ в окрестности точки $x=1$ и семейства $\{\varphi_{2k}\}$ в окрестности точки $x=0$ доказана. Таким образом, нами установлена равностепенная непрерывность семейств $\{\varphi_{1k}\}$ и $\{\varphi_{2k}\}$ на отрезке $[0,1]$.

Докажем равностепенную непрерывность семейств $\{\varphi_{3k}\}$ и $\{\varphi_{4k}\}$ на $[0,1]$.

Рассмотрим систему

$$\varphi_{3k} + KS\varphi_{4k} = \psi''_{3k},\ SK\varphi_{3k} + \varphi_{4k} = \psi''_{4k}\ (\psi''_{3k} = \psi_{3k} - K_0\varphi_{1k} - SKS\varphi_{2k},\ \psi''_{4k} = \psi_{4k} - K\varphi_{1k} - K_0\varphi_{2k}),$$

которая составлена из последних двух уравнений системы (6.3). Из этой системы находим

$$\varphi_{3k}(x) = (I-K^2)^{-1}\big(\psi''_{3k}(x) - KS\psi''_{4k}(x)\big), \quad \varphi_{4k}(x) = S(I-K^2)^{-1}\big(S\psi''_{3k}(x) - K\psi''_{4k}(x)\big).$$

Так как семейства $\big\{\psi''_{3k}(x)\big\}$ и $\big\{\psi''_{4k}(x)\big\}$ равностепенно непрерывны на отрезке $[0,1]$, то и семейства $\big\{\varphi_{3k}(x)\big\}$ и $\big\{\varphi_{4k}(x)\big\}$ являются равностепенно непрерывными на отрезке $[0,1]$.

Таким образом, нами показано, что семейства $\big\{\varphi_{1k}(x)\big\}$, $\big\{\varphi_{2k}(x)\big\}$, $\big\{\varphi_{3k}(x)\big\}$ и $\big\{\varphi_{4k}(x)\big\}$ являются равностепенно непрерывными на отрезке $[0,1]$. Тогда из теоремы Арцела вытекает равномерная сходимость (без ограничения общности) последовательности $\overline{\Phi}_k(x) = \big(\varphi_{1k}(x), \varphi_{2k}(x), \varphi_{3k}(x), \varphi_{4k}(x)\big)^{\mathrm{T}}$ к функции $\overline{\Phi}\,(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)\big)^{\mathrm{T}}$, причем $\overline{\Phi} \in \overline{C}$.

Переходя к пределу в (6.3) при $k \to \infty$, получим

$$\begin{aligned} &\varphi_1 + SK\varphi_2 + K_0\varphi_3 + K\varphi_4 = 0, && KS\varphi_1 + \varphi_2 + SKS\varphi_3 + K_0\varphi_4 = 0,\\ &K_0\varphi_1 + SKS\varphi_2 + \varphi_3 + KS\varphi_4 = 0, && K\varphi_1 + K_0\varphi_2 + SK\varphi_3 + \varphi_4 = 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Так как $\|\,\overline{\Phi}_k\|_{\overline{C}} = 1$ и $\|\,\overline{\Phi}_k - \overline{\Phi}\,\|_{\overline{C}} \to 0$, то $\|\,\overline{\Phi}\,\|_{\overline{C}} = 1$. Это равенство противоречит утверждению следствия 4.1, так как система (6.5) не имеет ненулевого решения. Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Уравнение* (4.3) *однозначно разрешимо в пространстве* $\overline{C}\,[0,1]$.

Доказательство. В силу теоремы 6.1 достаточно доказать, что образ оператора $I+A$ совпадает со всем пространством $\overline{C}\,[0,1]$. Пусть $\overline{\Psi} \in \overline{C}\,[0,1]$ — произвольная вектор-функция. Покажем, что уравнение $\overline{\Phi} + A\,\overline{\Phi} = \overline{\Psi}$ разрешимо в $\overline{C}\,[0,1]$. Пусть $0 < \lambda < 1$ — произвольное число. Тогда существует вектор-функция $\overline{\Phi}_\lambda \in \overline{C}\,[0,1]$, такая, что $\overline{\Phi}_\lambda + \lambda A\,\overline{\Phi}_\lambda = \overline{\Psi}$, где $\overline{\Phi}_\lambda$ определяется равенством $\overline{\Phi}_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}\overline{\Psi}$. Существование обратного оператора $(I+\lambda A)^{-1}$ следует из равенства $\|A\|_{\overline{C}\to\overline{C}} = 1$ и условия $0 < \lambda < 1$. Из неравенства (6.1) при $\lambda > 1 - \dfrac{d}{2}$ будем иметь

$$\|\,\overline{\Phi}_\lambda\|_{\overline{C}} \leqslant \frac{1}{d}\,\|\,\overline{\Phi}_\lambda + \lambda A\,\overline{\Phi}_\lambda + (1-\lambda)A\,\overline{\Phi}_\lambda\|_{\overline{C}} \leqslant \frac{1}{d}\,\|\,\overline{\Psi}\,\|_{\tilde{C}} + \frac{1-\lambda}{d}\,\|\,\overline{\Phi}_\lambda\|_{\overline{C}} \leqslant \frac{1}{d}\,\|\,\overline{\Psi}\,\|_{C} + \frac{1}{2}\,\|\,\overline{\Phi}_\lambda\|_{\overline{C}}\,.$$

Из этого неравенства следует, что $\|\,\overline{\Phi}_\lambda\|_{\overline{C}} \leqslant \big\|(I+\lambda A)^{-1}\overline{\Psi}\,\big\|_{\overline{C}} \leqslant \dfrac{2}{d}\,\|\,\overline{\Psi}\,\|_{\overline{C}}$ при $1 - \dfrac{d}{2} < \lambda < 1$ для любой вектор-функции $\overline{\Psi} \in \overline{C}\,[0,1]$. Пусть $1 - \dfrac{d}{2} < \lambda, \lambda' < 1$. Тогда имеем

$$\overline{\Phi}_\lambda - \overline{\Phi}_{\lambda'} = (I+\lambda A)^{-1}\overline{\Psi} - (I+\lambda' A)^{-1}\overline{\Psi} = (I+\lambda A)^{-1}(\lambda' - \lambda)(I+\lambda' A)^{-1}\overline{\Psi}.$$

Переходя к норме в этом равенстве, получим

$$\|\,\overline{\Phi}_\lambda - \overline{\Phi}_{\lambda'}\|_{\overline{C}} \leqslant |\lambda' - \lambda|\,\big\|(I+\lambda' A)^{-1}\big\|_{\overline{C}\to\overline{C}}\,\big\|(I+\lambda A)^{-1}\big\|_{\overline{C}\to\overline{C}}\,\|\,\overline{\Psi}\,\|_{\overline{C}} \leqslant |\lambda' - \lambda|\,\frac{4}{d^2}\,\|\,\overline{\Psi}\,\|_{\overline{C}}\,.$$

Пусть $1-\dfrac{d}{2}<\lambda_k<1$, $\lambda_k\to 1$, $k\to\infty$. Полагая $\lambda=\lambda_k$ и $\lambda'=\lambda_m$ в последнем неравенстве, приходим к заключению, что последовательность $\{\overline{\Phi}_{\lambda_k}\}$ является фундаментальной. Пусть $\overline{\Phi}_{\lambda_k}\to\overline{\Phi}$, $k\to\infty$. Переходя в равенстве $\overline{\Phi}_\lambda+\lambda A\,\overline{\Phi}_\lambda=\overline{\Psi}$ к пределу при $\lambda=\lambda_k$, $k\to\infty$, получим равенство $\overline{\Phi}+A\,\overline{\Phi}=\overline{\Psi}$. Это означает, что образом оператора $I+A$ является $\overline{C}\,[0,1]$. Отсюда и из (6.1) вытекает существование $(I+A)^{-1}$ и справедливость оценки $\big\|(I+A)^{-1}\big\|_{\overline{C}\to\overline{C}}\leqslant\dfrac{1}{d}$. Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что функция $\overline{\Psi}(x)=\big(\psi_1(x),\psi_2(x),\psi_3(x),\psi_4(x)\big)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет условию согласованности в угловых точках области, если имеют место следующие равенства: $\psi_1(0)=\psi_4(0)$, $\psi_1(1)=\psi_2(0)$, $\psi_3(1)=\psi_2(1)$, $\psi_3(0)=\psi_4(1)$.

Теорема 6.3. *Пусть функция* $\overline{\Psi}(x)=\big(\psi_1(x),\psi_2(x),\psi_3(x),\psi_4(x)\big)^{\mathrm{T}}$ *удовлетворяет условию согласованности. Тогда решение* $\overline{\Phi}\,(x)=\big(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),\varphi_4(x)\big)^{\mathrm{T}}$ *системы* (2.10) *удовлетворяет условию согласованности.*

Доказательство. При $x=1$ из первого и при $x=0$ из второго уравнений системы (2.10) будем иметь

$$\varphi_1(1)+SK\varphi_2(1)+K_0\varphi_3(1)+K\varphi_4(1)=\psi_1(1),\quad KS\varphi_1(0)+\varphi_2(0)+SKS\varphi_3(0)+K_0\varphi_4(0)=\psi_2(0).\quad(6.6)$$

Так как $SK\varphi(1)=\dfrac{\varphi(0)}{2}$, $K_0\varphi(1)=KS\varphi(1)$, $KS\varphi(0)=\dfrac{\varphi(1)}{2}$, $SKS\varphi(0)=KS\varphi(1)$, $K_0\varphi(0)=K\varphi(1)$, то, подставляя эти равенства в (6.6), получим

$$\varphi_1(1)+\frac{\varphi_2(0)}{2}+KS\varphi_3(1)+K\varphi_4(1)=\psi_1(1),\quad \frac{\varphi_1(1)}{2}+\varphi_2(0)+KS\varphi_3(1)+K\varphi_4(1)=\psi_2(0).$$

Отсюда в силу второго из равенств (2.10) имеем $\varphi_1(1)=\varphi_2(0)$.

Аналогичными рассуждениями при $x=1$ из второго и третьего уравнений системы (2.10) получим $\varphi_2(1)=\varphi_3(1)$, при $x=0$ из третьего и при $x=1$ из четвертого уравнений системы (2.10) получим $\varphi_3(0)=\varphi_4(1)$, при $x=0$ из первого и четвертого уравнений системы (2.10) получим $\varphi_1(0)=\varphi_4(0)$. Теорема доказана.

7. Слабая непрерывность интегрального оператора K в пространстве ограниченных измеримых функций. В этом разделе обосновываются утверждения, используемые в доказательстве теоремы об ограниченности решения задачи Дирихле в пространстве ограниченных измеримых функций.

Лемма 7.1. *Пусть дана последовательность* $\{\varphi_k(x)\}$, *такая, что* $\|\varphi_k\|_{L_\infty[0,1]}\leqslant N$ *для* $k=1,2,\ldots$. *Тогда найдутся функция* $\varphi_0\in L_\infty[0,1]$ *и подпоследовательность* $\{\varphi_{k_j}(x)\}$ *последовательности* $\{\varphi_k(x)\}$, *удовлетворяющие условию* $\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_0^x\big(\varphi_{k_j}(\xi)-\varphi_0(\xi)\big)\,d\xi=0$, $x\in[0,1]$.

Доказательство. Положим

$$\psi_k(x)=\int\limits_0^x\varphi_k(\xi)\,d\xi.\quad(7.1)$$

Семейство $\{\psi_k\}$ равномерно ограничено $\big(\big|\psi_k(x)\big|\leqslant\|\varphi_k\|_{L_\infty[0;1]}\,|x|\leqslant\|\varphi_k\|_{L_\infty[0;1]}\leqslant N\big)$ и равностепенно непрерывно, так как

$$\big|\varphi_k(x)-\varphi_k(x')\big|=\left|\int\limits_x^{x'}\varphi_k(\xi)\,d\xi\right|\leqslant\|\varphi_k\|_{L_\infty[0,1]}\,|x-x'|\leqslant K|x-x'|,\quad K=\mathrm{const},\quad(7.2)$$

т.е. функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица. Отсюда и из теоремы Арцела следует, что существует функция $\psi_0(x)$, удовлетворяющая равенству

$$\lim_{k\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\big|\psi_k(x)-\psi_0(x)\big|=0.\quad(7.3)$$

Функция $\psi_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица, что следует из (7.2). Следовательно, функция $\psi_0(x)$ является абсолютно непрерывной. Поэтому почти всюду имеет место неравенство $\big|\psi_0'(x)\big|\leqslant M$, означающее, что $\varphi_0(x)=\psi_0'(x)\in L_\infty[0,1]$. Из этого равенства и абсолютной непрерывности функции $\psi_0(x)$, учитывая, что $\psi_0(0)=0$, следует равенство

$$\psi_0(x)=\int\limits_0^x \varphi_0(\xi)\,d\xi. \tag{7.4}$$

Из (7.3) в силу (7.1) и (7.4) получим $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\int\limits_0^x \bigl(\varphi_k(\xi)-\varphi_0(\xi)\bigr)\,d\xi\right|=0$. Лемма доказана.

Лемма 7.2. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}$ $\bigl(\|\varphi_k\|_{L_\infty[0,1]}\leqslant N,\ k=1,2,\dots\bigr)$ — *последовательность ограниченных измеримых функций, удовлетворяющих условию* $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_0^x \bigl(\varphi_k(\xi)-\varphi_0(\xi)\bigr)\,d\xi=0$. *Тогда при* $0<x\leqslant 1$ *и* $0\leqslant y\leqslant 1$ *выполнено* $\lim\limits_{k\to\infty}(\Pi\varphi_k)(x,y)=(\Pi\varphi_0)(x,y)$, *где* $(\Pi\varphi)(x,y)=\dfrac{x}{\pi}\int\limits_0^1 \dfrac{\varphi(\eta)\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$(\Pi\varphi_k)=\frac{x}{\pi\bigl(x^2+(1-y)^2\bigr)}\int\limits_0^1\varphi_k(s)\,ds+\frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1\frac{(\eta-y)}{\bigl(x^2+(\eta-y)^2\bigr)^2}\int\limits_0^\eta\varphi_0(s)\,ds\,d\eta+$$
$$+\frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1\left[\frac{(\eta-y)}{\bigl(x^2+(\eta-y)^2\bigr)^2}\int\limits_0^\eta\bigl(\varphi_k(s)-\varphi_0(s)\bigr)\,ds\right]d\eta.$$

Подынтегральная функция $\chi_k(\eta)=\dfrac{(\eta-y)}{\bigl(x^2+(\eta-y)^2\bigr)^2}\int\limits_0^\eta\bigl(\varphi_k(s)-\varphi_0(s)\bigr)\,ds$ является ограниченной и стремится к нулю при каждом $\eta\in[0,1]$. Тогда согласно теореме Лебега имеем

$$\lim_{k\to\infty}(\Pi\varphi_k)(x,y)=\frac{x}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\varphi_0(\eta)\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}+\frac{2x}{\pi}\int\limits_0^1\frac{(\eta-y)}{\bigl(x^2+(\eta-y)^2\bigr)^2}\int\limits_0^\eta\varphi_0(s)\,ds\,d\eta=(\Pi\varphi_0)(x,y).$$

Лемма доказана.

Лемма 7.3. *Пусть* $\varphi\in L_\infty[0,1]$. *Тогда для каждой точки* $(x,y)\in G=(0,1)\times(0,1)$ *справедлива оценка* $\bigl|(\Pi\varphi)(x,y)\bigr|\leqslant\|\varphi\|_{L_\infty[0;1]}$.

Доказательство. Имеем

$$\bigl|(\Pi\varphi)(x,y)\bigr|\leqslant\frac{x}{\pi}\int\limits_0^1\frac{d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}\,\bigl\|\varphi(\eta)\bigr\|_{L_\infty[0;1]}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)\bigl\|\varphi(\eta)\bigr\|_{L_\infty[0;1]}\leqslant\bigl\|\varphi(\eta)\bigr\|_{L_\infty[0;1]}.$$

Лемма доказана.

8. Граничные значения интеграла Пуассона с плотностью из пространства ограниченных измеримых функций. Пусть $\varphi(x)$ — ограниченная измеримая функция на всей числовой оси. Определим функцию

$$\overline{\varphi}(x)=\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\varphi(\xi+x)\,d\xi,\quad 0<h\leqslant h_0<\infty, \tag{8.1}$$

во всех точках $x\in(-\infty,\infty)$, где существует предел в правой части (8.1). Множество таких точек обозначим $D(\overline{\varphi})$. Согласно теореме Лебега [12] множество $D(\overline{\varphi})$ имеет полную меру на любом отрезке числовой оси и справедливо равенство $\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)$ почти всюду. Вне множества $D(\overline{\varphi})$ положим $\overline{\varphi}(x)=0$.

Продолжим гармоническую функцию $u(x,y)=\dfrac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\varphi(\xi)\,d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}\equiv\dfrac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\overline{\varphi}(\xi)\,d\xi}{y^2+(x-\xi)^2}$, $y>0$, на граничные точки $(x,0)$ области $y>0$ по формуле

$$\overline{u}(x,y)=\begin{cases}u(x,y), & \text{если}\quad y>0,\ -\infty<x<\infty,\\ \overline{\varphi}(x), & \text{если}\quad y=0,\ x\in D(\overline{\varphi}).\end{cases} \tag{8.2}$$

Лемма 8.1. *Во всех точках $(x,0)$, где $x \in D(\overline{\varphi})$, существует предел функции $u(x,y)$ вдоль нормали к этой точке и справедливо равенство*

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = \overline{\varphi}(x), \quad x \in D(\overline{\varphi}). \tag{8.3}$$

Доказательство. Используя тождество

$$\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{y^2+(x-\xi)^2} \equiv 1 \quad \text{при} \quad y>0, \quad -\infty<x<\infty, \tag{8.4}$$

получим

$$u(x,y)-\overline{\varphi}(x) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)-\overline{\varphi}(x)}{y^2+(x-\xi)^2}\,d\xi = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x)}{y^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{y}{\pi}\int\limits_{|\xi|\leqslant\delta} + \frac{y}{\pi}\int\limits_{|\xi|>\delta} \equiv I_{1\delta}+I_{2\delta}. \tag{8.5}$$

Для интеграла $I_{1\delta}$ будем иметь

$$I_{1\delta} = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x)}{y^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{y}{\pi(y^2+\delta^2)}\bigl(v(\delta)-v(-\delta)\bigr) + \frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\xi v(\xi)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi. \tag{8.6}$$

Преобразуем каждое слагаемое по отдельности:

$$v(\delta)-v(-\delta) = \int\limits_0^{\delta}\bigl[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x)\bigr]\,ds - \int\limits_0^{-\delta}\bigl[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x)\bigr]\,ds = \int\limits_{-\delta}^{\delta}\bigl[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x)\bigr]\,ds,$$

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\xi v(\xi)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi = \int\limits_0^{\delta}+\int\limits_{-\delta}^{0} = \int\limits_0^{\delta}\frac{\xi v(\xi)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi - \int\limits_0^{\delta}\frac{\xi v(-\xi)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi = \int\limits_0^{\delta}\frac{\xi\bigl[v(\xi)-v(-\xi)\bigr]}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi = \int\limits_0^{\delta}\frac{2\xi^2 w(\xi,x)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi,$$

где $w(\xi,x) = \dfrac{1}{2\xi}\displaystyle\int\limits_{-\xi}^{\xi}\bigl[\varphi(x+s)-\overline{\varphi}(x)\bigr]\,ds = \dfrac{1}{2\xi}\bigl[v(\xi)-v(-\xi)\bigr]$. Заметим, что функция $w(\xi,x)$ является непрерывной по первой переменной при $\xi>0$ и в силу определения функции $\overline{\varphi}(x)$ при каждом $x\in D(\overline{\varphi})$ имеет место предельное соотношение: $w(\xi,x)\to 0$ при $\xi\to 0$.

Пусть $\varepsilon>0$ — заданное число. Для точки $x\in D(\overline{\varphi})$ величину $\delta>0$ выберем таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\sup\limits_{0<\xi<\delta}\bigl|w(\xi,x)\bigr|<\varepsilon/3$.

Оценивая по модулю соотношение (8.6), будем иметь

$$|I_{1\delta}| \leqslant \frac{2y\delta}{y^2+\delta^2}\bigl|w(\delta,x)\bigr| + \frac{4y}{\pi}\int\limits_0^{\delta}\frac{\xi^2\,d\xi}{(y^2+\xi^2)^2}\sup_{0<\xi<\delta}\bigl|w(\xi,x)\bigr|. \tag{8.7}$$

Так как $\dfrac{2y\delta}{\pi(y^2+\delta^2)^2}+\dfrac{4y}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\delta}\frac{\xi^2\,d\xi}{(y^2+\xi^2)^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}<1$, $\quad\bigl|w(\delta,x)\bigr|\leqslant\sup\limits_{0<\xi<\delta}\bigl|w(\xi,x)\bigr|$, то из неравенства (8.7) получим

$$|I_{1\delta}| \leqslant \sup_{0<\xi<\delta}\bigl|w(\xi,x)\bigr| < \varepsilon/2. \tag{8.8}$$

Фиксируем δ и оценим интеграл $I_{2\delta}$. Имеем

$$|I_{2\delta}| \leqslant \left|\frac{y}{\pi}\int\limits_{|\xi|>\delta}\frac{\varphi(x+\xi)-\overline{\varphi}(x)}{y^2+\xi^2}\,d\xi\right| \leqslant \frac{4y}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{d\xi}{y^2+\xi^2}\,\|\varphi\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}\right)\|\varphi\|_{L_\infty(-\infty,\infty)}.$$

Величину $y_0 > 0$ выберем такой, чтобы неравенство

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}\right)\|\varphi\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполнялось при $0 < y < y_0$. Тогда $|I_{2\delta}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и из (8.8) получим $\bigl|u(x,y) - \overline{\varphi}\,(x)\bigr| \leqslant |I_{1\delta}| + |I_{2\delta}| < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то отсюда следует справедливость равенства (8.3). Лемма доказана.

Пусть функция $\alpha(y)$ удовлетворяет условиям: $\alpha(y) > 0$ при $y > 0$ и $\alpha(y) \to 0$ при $y \to 0+$. Для заданной точки $x_0 \in D(\overline{\varphi}\,)$ и функции $\alpha(y)$ определим множество

$$G(x_0, \alpha) = \bigl\{(x,y) : |x_0 - x| \leqslant y\alpha(y),\ y > 0\bigr\}.$$

Функцию $\overline{u}(x,y)$ назовем $G(x_0,\alpha)$-непрерывной в точке $(x_0, 0)$, если

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in G(x_0)}} \overline{u}(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in G(x_0)}} u(x,y) = \overline{\varphi}\,(x_0). \tag{8.9}$$

Теорема 8.1. *Пусть $\varphi(x)$ — ограниченная измеримая функция на всей оси и $x_0 \in D(\overline{\varphi}\,)$. Тогда функция $\overline{u}(x,y)$, определенная в* (8.2), *является $G(x_0,\alpha)$-непрерывной в точке* $(x_0, 0)$.

Доказательство. Так как в точке $x_0 \in D(\overline{\varphi}\,)$ существует предел в правой части (8.1), то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти $h_0 > 0$, такое, что

$$\left|\overline{\varphi}\,(x_0) - \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} \varphi(x_0 + \xi)\,d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad 0 < h < h_0. \tag{8.10}$$

Используя (8.4), аналогично (8.5) получим $u(x,y) - \overline{\varphi}\,(x_0) = I_{1\delta} + I_{2\delta}$, где

$$I_{1\delta} = \frac{y}{\pi}\int\limits_{|\xi|\leqslant\delta} \frac{\varphi(x+\xi) - \overline{\varphi}\,(x_0)}{y^2+\xi^2}\,d\xi, \quad I_{2\delta} = \frac{y}{\pi}\int\limits_{|\xi|>\delta} \frac{\varphi(x+\xi) - \overline{\varphi}\,(x_0)}{y^2+\xi^2}\,d\xi. \tag{8.11}$$

Имеем $I_{1\delta} = \dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\varphi(x+\xi) - \overline{\varphi}\,(x_0)}{y^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{y}{\pi(y^2+\xi^2)}v(\xi)\Bigr|_{\xi=-\delta}^{\delta} + \frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\xi v(\xi)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi$. Так как

$$v(\xi) - v(-\xi) = \int\limits_{-\xi}^{\xi} \bigl[\varphi(x+s) - \overline{\varphi}\,(x_0)\bigr]\,ds,$$

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\xi v(\xi)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi = \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\xi v(\xi)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi + \int\limits_{\delta}^{0} \frac{-\xi v(-\xi)}{(y^2+\xi^2)^2}\,(-d\xi) = \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\bigl[v(\xi) - v(-\xi)\bigr]}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi = 2\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\xi^2 w(\xi,x,x_0)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi,$$

где $w(\xi,x,x_0) = \dfrac{1}{2\xi}\displaystyle\int\limits_{-\xi}^{\xi} \bigl[\varphi(x+s) - \overline{\varphi}\,(x_0)\bigr]\,ds$, то интеграл (8.11) можно представить в виде

$$I_{1\delta} = \frac{2y\delta}{y^2+\delta^2}\,\frac{1}{2\pi}\,w(\xi,x,x_0) + \frac{4y}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\xi^2 w(\xi,x_0,x_0)}{(y^2+\xi^2)^2}\,d\xi + \frac{4y}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\xi^2}{(y^2+\xi^2)^2}\,\bigl[w(\xi,x,x_0) - w(\xi,x_0,x_0)\bigr]d\xi. \tag{8.12}$$

Покажем непрерывность функции $w(\xi,x,x_0)$ по x в точке $x = x_0$ при каждом фиксированном ξ, таком, что $0 < \xi \leqslant \delta$. Действительно,

$$w(\xi,x,x_0) = \frac{1}{2\xi}\int\limits_{-\xi}^{\xi} \varphi(x+s)\,ds - \overline{\varphi}\,(x_0) = \frac{1}{2\xi}\int\limits_{x-\xi}^{x+\xi} \varphi(u)\,du - \overline{\varphi}\,(x_0).$$

Полагая $x < x'$, рассмотрим разность

$$w(\xi, x, x_0) - w(\xi, x', x_0) = \frac{1}{2\xi} \int\limits_{x}^{x'} \big[\varphi(s-\xi) - \varphi(s+\xi)\big]\, ds.$$

Из этого выражения при фиксированном $\xi : 0 < \xi \leqslant \delta$ и $x' \to x$ будем иметь $w(\xi, x', x_0) \to w(\xi, x, x_0)$ и

$$w(\delta, x, x_0) \to w(\delta, x_0, x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \tag{8.13}$$

Условие (8.10) для функции $w(\xi, x, x_0)$ имеет вид $\big|w(h, x_0, x_0)\big| < \varepsilon/3$ при $0 < h < h_0$. Пусть δ — фиксированное число, такое, что $0 < \delta < h_0$. Тогда в силу (8.13) существует $\sigma = \sigma(\delta) > 0$, такое, что $\big|w(\delta, x, x_0) - w(\delta, x_0, x_0)\big| < \varepsilon/3$ при $|x - x_0| < \sigma$. Из этих неравенств следуют соотношения

$$\big|w(\delta, x, x_0)\big| \leqslant \big|w(\delta, x, x_0) - w(\delta, x_0, x_0)\big| + \big|w(\delta, x_0, x_0)\big| < 2\varepsilon/3.$$

Таким образом, для первого слагаемого в правой части (8.12) выполнено

$$\frac{2y\delta}{y^2+\delta^2}\, \frac{1}{2\pi}\, \big|w(\delta, x, x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3},$$

если $0 < \delta < h_0$ и $|x - x_0| < \sigma$. Для второго слагаемого в правой части (8.12) справедлива оценка $\left|\dfrac{4y}{\pi} \displaystyle\int\limits_0^\delta \dfrac{\xi^2 w(\xi, x_0, x_0)}{(y^2+\xi^2)^2}\, d\xi\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ в силу выбора δ. Рассмотрим последнее слагаемое. Имеем

$$\frac{4y}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{\xi^2}{(y^2+\xi^2)^2} \big[w(\xi, x, x_0) - w(\xi, x_0, x_0)\big] d\xi = \frac{2}{\pi y} \int\limits_0^{\delta/y} \frac{s}{(1+s^2)^2} \left(\int\limits_x^{x_0} \big[\varphi(t - ys) - \varphi(t + ys)\big]\, dt \right) ds.$$

Оценив по модулю, получим

$$\left|\frac{4y}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{\xi^2}{(y^2+\xi^2)^2} \big[w(\xi, x, x_0) - w(\xi, x_0, x_0)\big] d\xi\right| \leqslant \frac{2}{\pi y} \int\limits_0^{\delta/y} \frac{s}{(1+s^2)^2} \left(\int\limits_x^{x_0} \Big[\big|\varphi(t - ys) - \varphi(t + ys)\big|\Big]\, dt \right) ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi y} \int\limits_0^{\delta/y} \frac{s\, ds}{(1+s^2)^2}\, 2\|\varphi\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} \leqslant \frac{2|x_0 - x|}{\pi y}\, \|\varphi\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} \leqslant \frac{2\alpha(y)}{\pi}\, \|\varphi\|_{L_\infty(-\infty,\infty)}.$$

Так как $(x, y) \in G(x_0, \alpha)$, то существует $y_0 > 0$, такое, что при $0 < y < y_0$ выполняется неравенство $\dfrac{2\alpha(y)}{\pi}\, \|\varphi\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $(x, y) \in G(x_0, \alpha)$, $0 < y < y_0$. Из полученных соотношений следует, что $|I_{1\delta}| < \varepsilon$. Фиксируя δ, имеем

$$|I_{2\delta}| \leqslant \frac{y}{\pi} \int\limits_{|\xi|>\delta} \frac{\big|\varphi(x+\xi)\big| + \big|\overline{\varphi}\,(x_0)\big|}{y^2+\xi^2}\, d\xi \leqslant \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\delta}{y}\right) \|\varphi\|_{L_\infty(-\infty,\infty)}.$$

Величину $y_0 > 0$ будем считать настолько малой, что $\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{y}\right)\|\varphi\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} < \varepsilon$ при $0 < y < y_0$. Тогда $|I_{2\delta}| \leqslant \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $|I_{1\delta}| < \varepsilon$ получим цепочку неравенств $\big|u(x, y) - \overline{\varphi}\,(x_0)\big| \leqslant |I_{1\delta}| + |I_{2\delta}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то отсюда следует справедливость равенства (8.9). Теорема доказана.

9. Доказательства теорем 1.1 – 1.3.

Доказательство теоремы 1.1. Эквивалентность условий а) и б) имеет место и в том случае, если условие гармоничности функции $u(x, y)$ заменить на условие непрерывности (доказательство следует из теоремы Кантора [11]).

Импликация б) ⇒ в). Пусть гармоническая функция $u(x, y)$ непрерывна на $\overline{G}$. Определим непрерывную функцию $\Psi(x, y) = u(x, y)\big|_\Gamma$. Пусть $\psi_1(x) = \Psi(x, 0)$, $\psi_2(x) = \Psi(1, x)$, $\psi_3(x) = \Psi(x, 1)$, $\psi_4(x) = \Psi(0, x)$. По этим функциям в силу теоремы 6.2 однозначно определяется решение системы (2.10):

$$\overline{\Phi}\,(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)\big)^{\mathrm{T}}.$$

Определим гармоническую в области G функцию $v(x,y) = \sum_{i=1}^{4} v_i(x,y)$, где $v_i(x,y) = (\Pi_i\varphi_i)(x,y)$, операторы Π_i, $i=\overline{1,4}$, определены равенствами (1.4).

Так как вектор-функция $\overline{\Psi}(x) = \big(\psi_1(x),\psi_2(x),\psi_3(x),\psi_4(x)\big)^{\mathrm{T}}$ является непрерывной на Γ, то она удовлетворяет условию согласованности, и поэтому в силу теоремы 6.3 функция $\overline{\Phi}(x)$ также удовлетворяет условию согласованности. Следовательно, функция $\Phi(x,y)$ непрерывна на Γ, и поэтому в силу теоремы 2.1 гармоническая функция $v(x,y)$ непрерывно продолжаема на $\overline{G}$. След продолжения функции $v(x,y)$ на границе Γ совпадает с функцией $\Psi(x,y)$: $v(x,y)\big|_\Gamma = \Psi(x,y)$. Отсюда и из (1.2) в силу принципа максимального значения гармонической функции [1] они совпадают и на квадрате G: $u(x,y)\equiv v(x,y)$. Импликация б) $\Rightarrow$ в) доказана.

Импликация в) $\Rightarrow$ б) следует из теоремы 2.1. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. *Импликация а) $\Rightarrow$ б).* Пусть $u(x,y)$ — ограниченная гармоническая функция в области G, т.е. $\big|u(x,y)\big| \leqslant M$, $(x,y)\in G$.

Определим функции $u_\varepsilon(x,y) = u\left(\varepsilon x + \dfrac{1-\varepsilon}{2}, \varepsilon y + \dfrac{1-\varepsilon}{2}\right)$, $0<\varepsilon<1$. Так как функция $u(x,y)$ определена в области G, то функции $u_\varepsilon(x,y)$ определены в области $G_\varepsilon = \left[\dfrac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}, \dfrac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right]\times\left[\dfrac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}, \dfrac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right]$, которая содержит замкнутую область $\overline{G} = G\cup\Gamma$. Функции $u_\varepsilon(x,y)$ являются непрерывными на замкнутой области $\overline{G}$ при всех $\varepsilon : 0<\varepsilon<1$. Обозначим через $\Psi_\varepsilon(x,y)$: $\Psi_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(x,y)\big|_\Gamma$ след функции $u_\varepsilon(x,y)$ на границе Γ. По этой функции определим вектор-функцию $\overline{\Psi}_\varepsilon(x) = \big(\psi_{1\varepsilon}(x),\psi_{2\varepsilon}(x),\psi_{3\varepsilon}(x),\psi_{4\varepsilon}(x)\big)^{\mathrm{T}}$, где

$$\psi_{1\varepsilon}(t) = \Psi_\varepsilon(t,0),\quad \psi_{2\varepsilon}(t) = \Psi_\varepsilon(1,t),\quad \psi_{3\varepsilon}(t) = \Psi_\varepsilon(t,1),\quad \psi_{4\varepsilon}(t) = \Psi_\varepsilon(0,t).$$

Заметим, что для любого $\varepsilon :\ 0<\varepsilon<1$ вектор-функция $\Psi_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию согласованности.

Из теорем 6.1 и 6.2 вытекает существование вектор-функции $\Phi_\varepsilon(x) = \big(\varphi_{1\varepsilon}(x),\varphi_{2\varepsilon}(x),\varphi_{3\varepsilon}(x),\varphi_{4\varepsilon}(x)\big)^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющей интегральному уравнению $(I+A)\Phi_\varepsilon = \Psi_\varepsilon(x)$ и допускающей оценку $\|\Phi_\varepsilon\|_{\overline{C}} \leqslant \dfrac{1}{d}\|\Psi_\varepsilon\|_{\overline{C}}$, где d — некоторая константа.

Так как гармоническая функция $u_\varepsilon(x,y)$ является непрерывной на замкнутой области $\overline{G} = G\cup\Gamma$, то в силу теоремы 1.1 (см. п. в) она представляется в виде

$$u_\varepsilon = \sum_{i=1}^{4} u_{i\varepsilon},\quad u_{i\varepsilon} = (\Pi_i\varphi_{i\varepsilon})(x,y),\quad (x,y)\in G,\quad i=\overline{1,4}. \tag{9.1}$$

Пусть задана последовательность $\{\varepsilon_k\} : \varepsilon_k \to 1-$ при $k\to\infty$. Без ограничения общности в силу леммы 7.1 будем считать, что для данной последовательности $\{\varepsilon_k\}$ существуют функции $\varphi_{1,1}(x)$, $\varphi_{2,1}(x)$, $\varphi_{3,1}(x)$, $\varphi_{4,1}(x)\in L_\infty[0;1]$, удовлетворяющие соотношениям

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^x \big(\varphi_{i\varepsilon_k}(\xi) - \varphi_{i,1}(\xi)\big)\,d\xi = 0,\quad i=\overline{1,4}.$$

Согласно лемме 7.2 имеет место предельное соотношение

$$u_{i\varepsilon_k}(x,y)\to u_{i1}(x,y),\quad (x,y)\in G,\quad i=\overline{1,4},\quad k\to\infty. \tag{9.2}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$ в (9.1) при $\varepsilon=\varepsilon_k$, в силу (9.2) будем иметь $\lim\limits_{k\to\infty} u_{\varepsilon_k}(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{4} u_{i1}(x,y)$. С другой стороны, по определению функции u_ε имеем $\lim\limits_{k\to\infty} u_{\varepsilon_k}(x,y) = u(x,y)$.

Из этих соотношений следует, что функция $u(x,y)$ представлена в виде суммы четырех функций, каждая из которых имеет вид (1.4). Импликация а) $\Rightarrow$ б) доказана.

Импликация б) $\Rightarrow$ а). Так как $\Pi_1 = T\Pi$, $\Pi_2 = S\Pi$, $\Pi_3 = ST\Pi$ и $\Pi_4 = \Pi$, где $Tu(x,y) = u(y,x)$, $Su(x,y) = u(1-x,y)$ и $(\Pi\varphi)(x,y) = \dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}$, то в силу леммы 7.1 верна импликация б) $\Rightarrow$ а). Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3. *Необходимость* утверждения теоремы очевидна.

Достаточность. Если $\Psi(x, y)$ является непрерывной функцией на Γ (функции ψ_i, $i = \overline{1, 4}$, определены выше), то вектор-функция $\overline{\Psi}(x) = \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x)\big)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет условию согласованности и принадлежит пространству вектор-функций $\overline{C}\,[0, 1]$. Тогда в силу теоремы 6.1 система интегральных уравнений (2.10) имеет единственное решение $\overline{\Phi} \in \overline{C}\,[0, 1]$, которое в силу теоремы 6.3 удовлетворяет условию согласованности. Отсюда в силу теоремы 1.1 следует, что гармоническая функция $u(x, y) = (\Pi\overline{\Phi}\,)(x, y)$ непрерывно продолжаема на замкнутую область $\overline{G}$ и ее след на Γ совпадает с вектор-функцией $\overline{\Psi}(x, y)$. Теорема 1.3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
2. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.
5. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
6. *Рудин У.* Теория функций на поликруге. М.: Мир, 1974.
7. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
8. *Тихонов А.Н., Морозов В.А.* Методы регуляризации некорректно поставленных задач // Вычислительные методы и программирование. Т. 35. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. 3–35.
9. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
10. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967.
11. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: Дрофа, 2004.
12. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 1999.
13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1999.
14. *Morozov V.A., Grebennikov A.I.* Methods for solution of ill-posed problems. Algorithmic aspects. Moscow: Moscow University Press, 2005.

Поступила в редакцию
15.11.2006