УДК 517.988.68

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Ю. Кокурин[1], **О. В. Карабанова**[2]

Строится и исследуется конечномерный итерационный процесс градиентного типа для приближенного решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Изучается сходимость этого процесса в условиях погрешностей. Предлагается критерий останова итераций, который обеспечивает получение аппроксимаций решения, адекватных уровню погрешностей в исходных данных. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06–01–00282а) и программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2006 – 2008 гг.)" в рамках тематического плана Марийского государственного университета (проект № 1.1.07).

Ключевые слова: нелинейные уравнения, нерегулярный оператор, градиентные методы, устойчивость, операторные уравнения, регулярные методы.

1. Рассматривается уравнение

$$F(x) = 0, \quad x \in H_1, \tag{1.1}$$

где $F : H_1 \to H_2$ — нелинейный дифференцируемый по Фреше оператор и H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Пусть x^* — решение уравнения (1.1).

Обозначим $\Omega_R(x) = \big\{z \in H_1 : \|z - x\| \leqslant R\big\}$. Будем предполагать, что производная F' удовлетворяет условию Липшица

$$\big\|F'(x_1) - F'(x_2)\big\| \leqslant L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega_R(x^*). \tag{1.2}$$

Кроме того предполагается, что оператор $F'(x^*)$ вполне непрерывен. Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ используется для единообразного обозначения норм различных пространств. Считаем, что вместо точного оператора F доступно лишь его приближение $\widetilde{F}$, удовлетворяющее условию (1.2) с той же константой L, а также неравенствам

$$\big\|\widetilde{F}(x^*)\big\| \leqslant \delta, \quad \big\|\widetilde{F}'(x^*) - F'(x^*)\big\| \leqslant \delta. \tag{1.3}$$

Ввиду полной непрерывности $F'(x^*)$ линейные операторы $F'(x)$ и $F'^*(x)F'(x)$ не обладают свойством непрерывной обратимости одновременно для всех точек $x \in \Omega_R(x^*)$, так что уравнение (1.1) является нерегулярным [1, с. 16]. В этих условиях задача (1.1) оказывается в общем случае некорректно поставленной. Таким образом, при сколь угодно малом $\delta > 0$ возмущенное уравнение $\widetilde{F}(x) = 0$, $x \in H_1$ может не иметь решений либо множество его решений может существенно отличаться от множества решений уравнения (1.1). Численная аппроксимация решений нерегулярных уравнений требует разработки специальных методов, обладающих свойством устойчивости к малым возмущениям исходных данных (см., например, [1 – 3] и указанные там ссылки). В [1, 3 – 7] при различных предположениях относительно оператора F построен и исследован широкий класс регуляризованных итерационных процессов для уравнения (1.1). При этом в [3, 5] на оператор F налагаются структурные ограничения типа монотонности либо обобщенной регулярности в окрестности решения. Заметим, что в случае ненулевой погрешности в задании оператора F вырабатываемые этими процессами последовательности $\{x_n\}$, как правило, не сходятся к x^* при $n \to \infty$. Поэтому в качестве приближения к решению выбирается элемент последовательности $\{x_n\}$ с некоторым конечным номером $n = n(\delta)$, где момент останова $n(\delta)$ определяется так, что $\lim\limits_{\delta\to 0} n(\delta) = \infty$, $\lim\limits_{\delta\to 0} x_{n(\delta)} = x^*$.

В [6, 7] исследовался итерационный процесс

$$x_0 \in H_1, \quad x_{n+1} = x_n - \mu_n\big(\widetilde{F}'^*(x_n)\widetilde{F}(x_n) + \alpha_n(x_n - \xi)\big), \tag{1.4}$$

[1] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пл. Ленина, д. 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kokurin@marsu.ru

[2] Марийский государственный технический университет, Центр фундаментального образования, пл. Ленина, д. 3, 424000, г. Йошкар-Ола; e-mail: olesik_k@inbox.ru

в котором $\mu_n, \alpha_n > 0$ — априори назначаемые величины шага и параметра регуляризации на n-й итерации, $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$, $n = 0, 1, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$. Итерация метода (1.4) эквивалентна применению одного шага стандартной схемы градиентного спуска [8, с. 67] для минимизации функционала Тихонова

$$\widetilde{\Phi}_{\alpha_n}(x) = \frac{1}{2}\,\big\|\widetilde{F}(x)\big\|^2 + \frac{1}{2}\,\alpha_n\|x-\xi\|^2, \quad x \in H_1. \tag{1.5}$$

Здесь $\xi \in H_1$ — управляющий параметр, играющий роль начальной оценки решения x^*. При исследовании асимптотических свойств методов типа (1.4) ключевую роль играет следующее предположение о приближенной истокопредставимости начальной невязки $x^* - \xi$.

Условие 1. Имеет место представление

$$x^* - \xi = F'^{\,*}(x^*)v + w, \quad v \in H_2, \quad w \in H_1, \quad \|w\| \leqslant \Delta. \tag{1.6}$$

В соотношении (1.6) элемент w играет роль погрешности классического истокообразного представления $x^* - \xi \in R\big(F'^{\,*}(x^*)\big)$ [6, 7], Δ — уровень этой погрешности.

Потребности практической реализации итерационных методов решения (1.1) диктуют необходимость разработки их аналогов, оперирующих с конечномерными аппроксимациями пространств и операторов. Целью настоящей работы является построение и исследование конечномерного аналога итерационного процесса (1.4) без привлечения каких-либо структурных условий на операторы F и $\widetilde{F}$.

2. Зафиксируем семейства конечномерных линейных подпространств $\{M_m\} \subset H_1$, $\{N_s\} \subset H_2$. Обозначим через P_m и Q_s ортопроекторы из H_1 и H_2 на подпространства M_m и N_s соответственно. Предполагаем, что семейства $\{M_m\}$, $\{N_s\}$ плотны в пространствах H_1, H_2, так что

$$\lim_{m\to\infty}\big\|(I-P_m)x\big\| = 0 \quad \forall x \in H_1, \quad \lim_{s\to\infty}\big\|(I-Q_s)y\big\| = 0 \quad \forall y \in H_2. \tag{2.1}$$

Всюду в этой работе предполагается выполненным следующее условие.

Условие 2. Задана последовательность $\{\zeta_m\}$, такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\zeta_m = 0, \quad \big\|(I-P_m)x^*\big\| \leqslant \zeta_m. \tag{2.2}$$

В силу полной непрерывности оператора $F'(x^*)$ имеет место соотношение (см. [9, с. 202])

$$\lim_{s\to\infty}\big\|(I-Q_s)F'(x^*)\big\| = 0. \tag{2.3}$$

Во многих случаях при выполнении условий (2.1) предельное соотношение (2.3) удается уточнить, указав такую последовательность $\{\eta_s\}$, что

$$\lim_{s\to\infty}\eta_s = 0, \quad \big\|(I-Q_s)F'(x^*)\big\| \leqslant \eta_s. \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что последовательности $\{\zeta_m\}$, $\{\eta_s\}$, удовлетворяющие условиям (2.2), (2.4), зафиксированы.

Пример. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение (1.1) с оператором $F : L_2(a,b) \to L_2(c,d)$:

$$\big[F(x)\big](t) \equiv \int\limits_a^b K\big(t,\tau,x(\tau)\big)\,d\tau - f(t), \quad t \in [c,d], \quad f \in L_2(c,d). \tag{2.5}$$

Будем предполагать, что ядро $K(t,\tau,x)$ дважды непрерывно дифференцируемо по всем аргументам и удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\,(t,\tau,x)\right| \leqslant \mathcal{M} < \infty \quad \forall t \in [c,d], \quad \tau \in [a,b], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

В этом случае оператор (2.5) обладает всеми свойствами гладкости, указанными в разделе 1, а его производная является вполне непрерывным оператором. В качестве M_m, N_s могут быть выбраны подпространства, образованные полиномами по классическим ортогональным тригонометрическим системам на (a,b) и (c,d), содержащими $2m+1$ и $2s+1$ слагаемое соответственно. Операторы проектирования P_m

и Q_s сопоставляют функции $x = x(t)$ отрезок указанной длины ее ряда Фурье по соответствующей тригонометрической системе. Предположим, что решение $x^* = x^*(t)$ уравнения (1.1), (2.5) принадлежит пространству $W_2^1(a,b)$. Используя (2.6) и известную оценку погрешности приближения функции тригонометрическим полиномом [10, с. 137], для подходящих констант $C_1 = C_1(x^*)$, $C_2 = C_2(x^*)$ нетрудно получить

$$\big\|(I-P_m)x^*\big\| \leqslant C_1 m^{-1}, \quad \big\|(I-Q_s)F'(x^*)\big\| \leqslant C_2 s^{-1}. \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что в рассматриваемом случае можно положить $\zeta_m = C_1 m^{-1}$, $\eta_s = C_2 s^{-1}$.

Перейдем к построению конечномерного аналога итерационного процесса (1.4). Сопоставим уравнению (1.1) его конечномерную аппроксимацию

$$Q_s F(P_m x) = 0, \quad x \in H_1. \tag{2.8}$$

Для уравнения (2.8) аналогично (1.5) запишем функционал Тихонова

$$\widetilde{\Phi}_{\alpha s m}(x) = \frac{1}{2}\,\big\|Q_s \widetilde{F}(P_m x)\big\|^2 + \frac{1}{2}\,\alpha\big\|P_m(x-\xi)\big\|^2, \quad x \in H_1. \tag{2.9}$$

Применяя для минимизации функционала (2.9) с $\alpha = \alpha_n$ один шаг метода градиентного спуска, приходим к следующей итерационной схеме:

$$x_{n+1} = x_n - \mu_n\big(P_m \widetilde{F}'^*(P_m x_n) Q_s \widetilde{F}(P_m x_n) + \alpha_n P_m(x_n - \xi)\big). \tag{2.10}$$

Заметим, что если $x_0 \in M_m$, то в силу (2.10) $x_n \in M_m$ для всех $n \geqslant 1$. В этом случае схема (2.10) принимает вид

$$x_0 \in M_m, \quad x_{n+1} = x_n - \mu_n\big(P_m \widetilde{F}'^*(x_n) Q_s \widetilde{F}(x_n) + \alpha_n(x_n - P_m\xi)\big). \tag{2.11}$$

Всюду далее объектом изучения является итерационный процесс (2.11).

В соответствии с общей концепцией построения устойчивых итерационных методов решения нерегулярных уравнений [1, 5] в качестве аппроксимации решения x^* следует выбрать итерационную точку, полученную на n-м ($n = n(\delta,\Delta,s,m)$) шаге процесса (2.11) с некоторыми фиксированными значениями s и m. При этом номер итерации $n = n(\delta,\Delta,s,m)$, на котором происходит останов, необходимо согласовать с погрешностями δ, Δ и с номерами используемых подпространств s, m так, чтобы равномерно относительно выбора приближенного оператора $\widetilde{F}$ из условий (1.3) выполнялось равенство

$$\lim_{\substack{\delta,\,\Delta\to 0;\\ s,\,m\to\infty}} \|x_{n(\delta,\Delta,s,m)} - x^*\| = 0. \tag{2.12}$$

Ниже будет указан способ нахождения момента останова $n(\delta,\Delta,s,m)$, обеспечивающего выполнение (2.12), и дана оценка погрешности аппроксимации $\|x_{n(\delta,\Delta,s,m)} - x^*\|$.

3. Перейдем к получению оценок, необходимых для обоснования аппроксимационных свойств итерационного процесса (2.11). Ниже нам потребуется следующее соотношение, непосредственно вытекающее из (1.2) и (1.3):

$$\big\|\widetilde{F}'(x)\big\| \leqslant N \equiv \big\|F'(x^*)\big\| + LR + \delta \quad \forall x \in \Omega_R(x^*). \tag{3.1}$$

На основании [11, с. 376] и (2.2) имеем представление:

$$\begin{gathered} \widetilde{F}(x) = \widetilde{F}(x^*) + \widetilde{F}'(x)(x-x^*) + \widetilde{G}(x), \quad x \in \Omega_R(x^*); \\ \big\|\widetilde{G}(x)\big\| \leqslant \frac{1}{2}\,L\|x-x^*\|^2 \leqslant L\|x-P_m x^*\|^2 + L\zeta_m^2. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Из (2.11) далее получим

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - P_m x^*\|^2 &= \Big\|(x_n - P_m x^*) - \mu_n\big(P_m \widetilde{F}'^*(x_n) Q_s \widetilde{F}(x_n) + \alpha_n(x_n - P_m\xi)\big)\Big\|^2 = \\ &= \|x_n - P_m x^*\|^2 + \mu_n^2\big\|P_m \widetilde{F}'^*(x_n) Q_s \widetilde{F}(x_n) + \alpha_n(x_n - P_m\xi)\big\|^2 - \\ &\quad - 2\mu_n\big(x_n - P_m x^*, P_m \widetilde{F}'^*(x_n) Q_s \widetilde{F}(x_n) + \alpha_n(x_n - P_m\xi)\big). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Оценим отдельные слагаемые из правой части последнего равенства в (3.3). Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &\equiv -2\mu_n\big(x_n - P_m x^*, P_m \widetilde{F}'^*(x_n) Q_s \widetilde{F}(x_n) + \alpha_n(x_n - P_m\xi)\big) = \\ &= -2\alpha_n\mu_n\|x_n - P_m x^*\|^2 - 2\mu_n\big(x_n - P_m x^*, P_m \widetilde{F}'^*(x_n) Q_s \widetilde{F}(x_n)\big) - 2\alpha_n\mu_n\big(x_n - P_m x^*, P_m(x^* - \xi)\big). \end{aligned}$$

Используя (1.6), (3.2), приходим к равенству

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n = &-2\alpha_n\mu_n\|x_n - P_m x^*\|^2 - 2\mu_n\big\|Q_s\widetilde{F}'(x_n)(x_n - P_m x^*)\big\|^2 - \\ &-2\mu_n\big(x_n - P_m x^*, P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s\widetilde{F}(x^*)\big) - 2\mu_n\big(x_n - P_m x^*, P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s\widetilde{F}'(x_n)(P_m x^* - x^*)\big) - \\ &-2\mu_n\big(x_n - P_m x^*, P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s\widetilde{G}(x_n)\big) - 2\alpha_n\mu_n\big(x_n - P_m x^*, P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s v\big) + \\ &+2\alpha_n\mu_n\Big(x_n - P_m x^*, \big(P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s - P_m F'^*(x^*)\big)v\Big) - 2\alpha_n\mu_n(x_n - P_m x^*, P_m w).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Предположим, что $x_n \in \Omega_R(x^*)$. Из (1.3), (2.2), (2.4) нетрудно получить

$$\big\|P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s - P_m F'^*(x^*)\big\| \leqslant L\|x_n - P_m x^*\| + L\zeta_m + \eta_s + \delta. \tag{3.5}$$

Из (3.4) с учетом (3.1), (3.2), (3.5) следует

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n \leqslant &-2\alpha_n\mu_n\|x_n - P_m x^*\|^2 + 2\mu_n\Big(-\big\|Q_s\widetilde{F}'(x_n)(x_n - P_m x^*)\big\|^2 + \\ &+\big\|Q_s\widetilde{F}'(x_n)(x_n - P_m x^*)\big\|\big(N\zeta_m + \delta + L\|x_n - P_m x^*\|^2 + L\zeta_m^2 + \alpha_n\|v\|\big)\Big) + \\ &+2\alpha_n\mu_n\big(L\|x_n - P_m x^*\| + L\zeta_m + \eta_s + \delta\big)\,\|v\|\,\|x_n - P_m x^*\| + 2\alpha_n\mu_n\Delta\|x_n - P_m x^*\|.\end{aligned}$$

Пользуясь элементарными неравенствами

$$(b_1 + \dots + b_k)^2 \leqslant k(b_1^2 + \dots + b_k^2), \quad b_1 b_2 \leqslant \frac{1}{4}\,b_1^2 + b_2^2, \tag{3.6}$$

получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n \leqslant &-2\alpha_n\mu_n\|x_n - P_m x^*\|^2 + 2\mu_n L^2\|x_n - P_m x^*\|^4 + 2\mu_n\big((N\zeta_m + \delta)^2 + L^2\zeta_m^4 + \alpha_n^2\|v\|^2\big) + \\ &+2\alpha_n\mu_n L\|v\|\,\|x_n - P_m x^*\|^2 + 2\alpha_n\mu_n\big((L\zeta_m + \eta_s + \delta)\|v\| + \Delta\big)\|x_n - P_m x^*\|.\end{aligned}$$

Применение второго неравенства из (3.6) дает

$$\big((L\zeta_m + \eta_s + \delta)\|v\| + \Delta\big)\|x_n - P_m x^*\| \leqslant \frac{1}{4}\,\|x_n - P_m x^*\|^2 + \big((L\zeta_m + \eta_s + \delta)\|v\| + \Delta\big)^2. \tag{3.7}$$

В дальнейшем будем предполагать, что элемент v, участвующий в истокообразном представлении (1.6), удовлетворяет условию

$$\|v\| \leqslant \min\big\{(2L)^{-1}, 1\big\}. \tag{3.8}$$

Из (3.7), (3.8) следует, что для некоторой константы $C_3 = C_3(L, N, \alpha_0)$ имеет место оценка

$$\mathcal{A}_n \leqslant -\frac{1}{2}\,\alpha_n\mu_n\|x_n - P_m x^*\|^2 + 2\mu_n L^2\|x_n - P_m x^*\|^4 + C_3\mu_n\big(\alpha_n(\eta_s^2 + \Delta^2) + \zeta_m^2 + \alpha_n^2 + \delta^2\big). \tag{3.9}$$

Перейдем к оценке второго слагаемого из правой части последнего равенства в (3.3). Из (2.2), (3.1) следует

$$\big\|\widetilde{F}(x)\big\| \leqslant \big\|\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(x^*)\big\| + \big\|\widetilde{F}(x^*)\big\| \leqslant N\|x - P_m x^*\| + N\zeta_m + \delta \quad \forall x \in \Omega_R(x^*). \tag{3.10}$$

Как и выше, предполагаем, что $x_n \in \Omega_R(x^*)$. В силу (1.6), (3.1), (3.6), (3.8), (3.10) выполняется

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n \equiv &\ \mu_n^2\big\|P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s\widetilde{F}(x_n) + \alpha_n(x_n - P_m\xi)\big\|^2 \leqslant \\ &\leqslant 3\mu_n^2\Big(\big\|P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s\widetilde{F}(x_n)\big\|^2 + \alpha_n^2\|x_n - P_m x^*\|^2 + \alpha_n^2\big\|P_m(x^* - \xi)\big\|^2\Big) \leqslant \\ &\leqslant 3\mu_n^2\big((3N^4 + \alpha_n^2)\|x_n - P_m x^*\|^2 + 3N^2(N^2\zeta_m^2 + \delta^2) + 2\alpha_n^2(N^2 + \Delta^2)\big).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Объединяя (3.3) и оценки (3.9), (3.11), находим

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - P_m x^*\|^2 = &\ \|x_n - P_m x^*\|^2 + \mathcal{A}_n + \mathcal{B}_n \leqslant \\ &\leqslant \Big(1 - \frac{1}{2}\,\alpha_n\mu_n + 3\mu_n^2(3N^4 + \alpha_n^2)\Big)\|x_n - P_m x^*\|^2 + 2\mu_n L^2\|x_n - P_m x^*\|^4 + \\ &+C_3\mu_n\big(\alpha_n(\eta_s^2 + \Delta^2) + \zeta_m^2 + \alpha_n^2 + \delta^2\big) + 3\mu_n^2\big(3N^2(N^2\zeta_m^2 + \delta^2) + 2\alpha_n^2(N^2 + \Delta^2)\big).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Заметим, что при выполнении условия

$$\mu_n \leqslant \frac{\alpha_n}{12(3N^2+\alpha_0^2)}\,, \quad n=0,1,\ldots, \tag{3.13}$$

справедливо неравенство

$$1-\frac{1}{2}\,\alpha_n\mu_n + 3\mu_n^2(3N^2+\alpha_n^2) \leqslant 1-\frac{1}{4}\,\alpha_n\mu_n. \tag{3.14}$$

Окончательно на основании (3.12)–(3.14) заключаем, что с подходящей константой $C_4 = C_4(L,N,\alpha_0)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-P_m x^*\|^2 \leqslant \left(1-\frac{1}{4}\,\alpha_n\mu_n\right)\|x_n-P_m x^*\|^2 + 2\mu_n L^2\|x_n-P_m x^*\|^4 +\\ + C_4\mu_n\big(\alpha_n(\eta_s^2+\Delta^2)+\zeta_m^2+\alpha_n^2+\delta^2\big).\end{aligned} \tag{3.15}$$

В целях упрощения последующих рассуждений будем считать, что шаговый множитель μ_n в (2.11) выбирается пропорциональным параметру регуляризации α_n:

$$\mu_n = \kappa\alpha_n, \quad \kappa>0. \tag{3.16}$$

Условие (3.13) с учетом (3.16) принимает вид

$$\kappa \leqslant \frac{1}{12(3N^2+\alpha_0^2)}\,. \tag{3.17}$$

Из (3.15), (3.16) получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1 *и* 2, *соотношения* (3.8), (3.16), (3.17) *и последовательность* $\{x_n\}$ *строится согласно* (2.11). *Предположим, что* $x_n\in\Omega_R(x^*)$. *Тогда имеет место оценка*

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-P_m x^*\|^2 \leqslant \left(1-\frac{1}{4}\,\kappa\alpha_n^2\right)\|x_n-P_m x^*\|^2 + 2\kappa\alpha_n L^2\|x_n-P_m x^*\|^4 +\\ + C_4\kappa\alpha_n\big(\alpha_n(\eta_s^2+\Delta^2)+\zeta_m^2+\alpha_n^2+\delta^2\big).\end{aligned} \tag{3.18}$$

4. Опишем предлагаемый критерий останова итерационного процесса (2.11). Выберем величину $q>0$ так, что

$$q\alpha_0 > \delta+\Delta+\eta_s+\zeta_m, \tag{4.1}$$

и определим момент останова $n=n(\delta,\Delta,s,m)$ следующим образом:

$$n(\delta,\Delta,s,m) = \max\{n=0,1,\ldots : q\alpha_n \geqslant \delta+\Delta+\eta_s+\zeta_m\}+1. \tag{4.2}$$

Из (4.1) следует, что условие (4.2) корректно определяет конечный номер $n(\delta,\Delta,s,m)\geqslant 1$, причем

$$q\alpha_n \geqslant \delta+\Delta+\eta_s+\zeta_m, \quad n=0,1,\ldots,n(\delta,\Delta,s,m)-1, \tag{4.3}$$

$$q\alpha_{n(\delta,\Delta,s,m)} < \delta+\Delta+\eta_s+\zeta_m. \tag{4.4}$$

Обозначим $a_n = \|x_n-P_m x^*\|^2$. Из (3.18), (4.3) следует, что если выполняются условия теоремы 1, то для любого номера $0\leqslant n\leqslant n(\delta,\Delta,s,m)-1$ справедливо неравенство

$$a_{n+1} \leqslant \left(1-\frac{1}{4}\,\kappa\alpha_n^2\right)a_n + 2\kappa L^2\alpha_n a_n^2 + C_4\kappa(2q^2\alpha_0+2q^2+1)\alpha_n^3. \tag{4.5}$$

Покажем, что при подходящем выборе начального приближения x_0 найдется такая не зависящая от δ, Δ, s, m постоянная $C>0$, что

$$a_n \leqslant C\alpha_n, \quad n=0,1,\ldots,n(\delta,\Delta,s,m). \tag{4.6}$$

Будем предполагать, что

$$x_0\in M_m, \quad \|x_0-P_m x^*\| \leqslant \sqrt{C\alpha_0}, \quad \sqrt{C\alpha_0}+\zeta_m \leqslant R. \tag{4.7}$$

В силу (4.7), неравенство (4.6) выполняется для номера $n=0$. Согласно (4.7) и (2.2) имеем $x_0\in\Omega_R(x^*)$. Зафиксируем номер k, $0\leqslant k\leqslant n(\delta,\Delta,s,m)-1$, такой, что неравенство (4.6) выполняется при $n=k$, т.е.

$\|x_k - P_m x^*\| \leqslant \sqrt{C\alpha_k}$. Из (4.7), (2.2) в силу монотонности последовательности $\{\alpha_n\}$ получаем $\|x_k - x^*\| \leqslant \sqrt{C\alpha_k} + \zeta_m \leqslant R$, поэтому $x_k \in \Omega_R(x^*)$. Полагая в (4.5) $n = k$ и оценивая величину a_k в правой части (4.5) с использованием (4.6), находим

$$a_{k+1} \leqslant C\alpha_{k+1}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\,\kappa\alpha_k^2\right)\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} + 2\kappa L^2 C\,\frac{\alpha_k^3}{\alpha_{k+1}} + C_4 C^2\kappa(2q^2\alpha_0 + 2q^2 + 1)\,\frac{\alpha_k^3}{\alpha_{k+1}}\right]. \tag{4.8}$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условий

$$2L^2 C \leqslant \frac{1}{16}\,, \quad C_4 C^2(2q^2\alpha_0 + 2q^2 + 1) \leqslant \frac{1}{16}\,, \tag{4.9}$$

$$\frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_n^3} \leqslant \frac{\kappa}{8}\,, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.10}$$

выражение в квадратных скобках из (4.8) не превосходит единицы, так что $a_{k+1} \leqslant C\alpha_{k+1}$, и оценка (4.6) имеет место в силу принципа математической индукции. В свою очередь, условия (4.9) выполняются, если константа C выбрана так, что

$$0 < C \leqslant \min\left\{(32L^2)^{-1}, \left[16C_4(2q^2\alpha_0 + 2q^2 + 1)\right]^{-1/2}\right\}. \tag{4.11}$$

Условие (4.10) выполняется, например, для последовательности $\alpha_n = \dfrac{\alpha_0}{(n+1)^\gamma}$, $0 < \gamma < \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\alpha_0^2\kappa}{8}\right\}$. Из (4.6) и (2.2) следует $\|x_n - x^*\| \leqslant \sqrt{C\alpha_n} + \zeta_m$, $n = 0, 1, \ldots, n(\delta, \Delta, s, m)$. Полагая здесь $n = n(\delta, \Delta, s, m)$ и используя (4.4), получаем оценку

$$\|x_{n(\delta,\Delta,s,m)} - x^*\| \leqslant \sqrt{C\alpha_{n(\delta,\Delta,s,m)}} + \zeta_m < \sqrt{Cq^{-1}(\delta + \Delta + \eta_s + \zeta_m)} + \zeta_m.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и соотношения* (4.1), (4.7), (4.10), (4.11). *Тогда для последовательности* $\{x_n\}$, *вычисляемой согласно* (2.11), *справедлива оценка*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \sqrt{C\alpha_n} + \zeta_m, \quad n = 0, 1, \ldots, n(\delta, \Delta, s, m) \tag{4.12}$$

и кроме того

$$\|x_{n(\delta,\Delta,s,m)} - x^*\| < \sqrt{Cq^{-1}(\delta + \Delta + \eta_s + \zeta_m)} + \zeta_m. \tag{4.13}$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} \zeta_m = \lim\limits_{s\to\infty} \eta_s = 0$, из (4.13) следует, что при выполнении условий теоремы 2 имеет место (2.12). Неравенство (4.13), определяющее оценку погрешности приближения $x_{n(\delta,\Delta,s,m)}$, устанавливает устойчивость этого приближения по отношению к малым вариациям оператора F и к малым погрешностям в выполнении условия истокопредставимости $x^* - \xi \in R\bigl(F'^*(x^*)\bigr)$.

5. В [4] рассматривается другой класс конечномерных итерационных процессов для решения уравнения (1.1):

$$x_0 \in H_1, \quad x_{n+1} = \xi - \Theta\bigl(P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s\widetilde{F}'(x_n)P_m, \alpha_n\bigr)P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s\bigl(\widetilde{F}(x_n) - \widetilde{F}'(x_n)P_m(x_n - \xi)\bigr). \tag{5.1}$$

Здесь $\Theta(\lambda, \alpha)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$ — порождающая функция, выбор которой определяет конкретный метод в рамках схемы (5.1). Группа этих методов получается линеаризацией уравнения (1.1) в текущей итерационной точке x_n с последующей конечномерной аппроксимацией линеаризованного уравнения и с применением к полученному уравнению известной процедуры [12, с. 29] нахождения квазирешения, ближайшего к заданному элементу ξ. При изучении сходимости итерационных процедур (5.1) используется следующее предположение о приближенной истокопредставимости начальной невязки:

$$x^* - \xi = \bigl(F'^*(x^*)F'(x^*)\bigr)^\rho v + w, \quad v, w \in H_1, \quad \|w\| \leqslant \Delta, \quad \rho \geqslant \frac{1}{2}\,. \tag{5.2}$$

Оценка погрешности аппроксимации упомянутого процесса при соответствующем выборе момента останова $\widetilde{n}(\delta, \Delta, s, m)$ имеет вид $\|x_n - x^*\| = O(\alpha_n^\rho)$, $n = 0, 1, \ldots, \widetilde{n}(\delta, \Delta, s, m)$. Из (4.3) следует, что выражение в правой части оценки (4.12) имеет порядок $O(\sqrt{\alpha_n}\,)$. Таким образом, схема (5.1) при выполнении условия (5.2) с $\rho > 1/2$ гарантирует более быструю относительно α_n сходимость приближений x_n по сравнению со схемой (2.11). Из соотношения $R\Big(\big(F'^*(x^*)F'(x^*)\big)^{1/2}\Big) = R\big(F'^*(x^*)\big)$ следует, что в рамках условия истокопредставимости (1.6) оценки погрешности аппроксимации методов (2.11) и (5.1) имеют один и тот же порядок по α_n. В то же время, реализация итерационной схемы (2.11) не требует численной аппроксимации функции оператора $\Theta\big(P_m\widetilde{F}'^*(x_n)Q_s\widetilde{F}'(x_n)P_m,\alpha_n\big)$ и поэтому является менее трудоемкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: Едиториал УРСС, 2002.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
3. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Dordrecht: Kluwer, 1996.
4. *Карабанова О.В., Козлов А.И., Кокурин М.Ю.* Устойчивые итерационные процессы для решения нелинейных некорректных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 2002. **42**, № 8. 1133–1146.
5. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
6. *Бакушинский А.Б.* Итеративно регуляризованный градиентный метод решения нелинейных нерегулярных уравнений // ЖВМ и МФ. 2004. **44**, № 5. 805–811.
7. *Kokurin M.Yu.* Stable iteratively regularized gradient method for nonlinear irregular equations under large noise // Inverse Problems. 2006. **22**. 197–207.
8. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
9. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
10. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
11. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
12. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию
10.02.2007