

УДК 519.651

ФОРМУЛА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МАРКОВА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

С. К. Татевян¹, Н. А. Сорокин¹, С. Ф. Залёткин²

Излагаются некоторые свойства рядов Чебышёва, положенные в основу построения численно-аналитических методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется вычислению коэффициентов Чебышёва с помощью численного интегрирования, для чего выводится квадратурная формула Маркова с одним фиксированным узлом и весовой функцией, соответствующей ортогональной системе многочленов Чебышёва первого рода. Описываются свойства частичной суммы ряда Чебышёва с коэффициентами, вычисленными по формуле Маркова.

Ключевые слова: многочлены Чебышёва первого рода, численный анализ, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, ряды Чебышёва, численно-аналитические методы, квадратурная формула Маркова.

Введение. Настоящая работа посвящена изучению вопросов, связанных с приближением функций с помощью ортогональных разложений по многочленам Чебышёва первого рода — рядов Чебышёва. Обсуждаемый круг вопросов включает вычисление коэффициентов Фурье–Чебышёва по формуле численного интегрирования, приближение функции частичной суммой ряда Чебышёва, оценки точности данного приближения.

Статья состоит из семи разделов. В разделе 1 рассматриваются ряды Чебышёва, условия равномерной сходимости рядов Чебышёва. В разделе 2 дается вывод формулы численного интегрирования А. А. Маркова для интеграла

$$\int_0^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Здесь получены выражения для абсцисс, коэффициентов и остаточного члена квадратурной формулы. В третьем разделе приводится формула Маркова для интегралов вида

$$\int_a^b \frac{f(x) dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}.$$

В четвертом разделе доказывается сходимость квадратурного процесса по формулам Маркова.

В пятом разделе описывается применение формулы Маркова для приближенного вычисления коэффициентов $a_i[f]$ ряда Чебышёва функции $f(x)$. В шестом разделе изучаются свойства частичной суммы ряда Чебышёва функции $f(x)$ с приближенными коэффициентами, вычисленными по квадратурной формуле Маркова. Доказано, что частичная сумма одновременно является интерполяционным многочленом функции $f(x)$ с узлами интерполирования, совпадающими с абсциссами квадратурной формулы Маркова. Установлена зависимость между коэффициентами Чебышёва $a_i[f]$ и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова.

В седьмом разделе приводятся оценки для погрешности приближения функции частичной суммой ее ряда Чебышёва, коэффициенты которого определены по формуле численного интегрирования.

Изложенные в статье вычислительные приемы рассматриваются нами в качестве средства конструирования численно-аналитических методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения задачи Коши для канонической системы

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + X, \tag{I}$$

¹ Институт астрономии РАН, ул. Пятницкая 48, 109017, Москва; e-mail: nsorokin@inasan.rssi.ru

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

и задачи Коши для нормальной системы

$$y' = f(x, y), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + X, \quad (\text{Ia})$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (\text{IIa})$$

нами построены на основе рядов Чебышёва и изложенного в данной статье способа вычисления коэффициентов Чебышёва. Этим методам посвящена отдельная работа.

1. Ряды Фурье по многочленам Чебышёва первого рода. Будем использовать систему многочленов Чебышёва первого рода

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Эта система многочленов ортогональна на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2)$$

т.е.

$$(T_i, T_j) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x) T_j(x) dx = 0 \quad (3)$$

при $i \neq j$. При этом

$$(T_i, T_i) = \|T_i\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & i > 0, \\ \pi, & i = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(см. теорему 5.1 в [1]).

Рассмотрим действительную функцию $f(x)$, которая определена на отрезке $[-1, 1]$ и квадрат которой интегрируем на $[-1, 1]$ с весом $p(x)$, указанным в (2). Используя обычное обозначение для такого функционального пространства $L_2(-1, 1; p(x))$, можно записать:

$$f(x) \in L_2\left(-1, 1; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Для функции $f(x)$ можно определить коэффициенты Фурье

$$a_i[f] = \frac{1}{\|T_i\|^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_i(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots$$

Рассмотрим ряд Фурье по ортогональным многочленам Чебышёва $T_i(x)$ первого рода

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i[f] \cdot T_i(x). \quad (5)$$

Ряд (5) называется также *рядом Чебышёва* функции $f(x)$. Определим коэффициенты $a_i[f] = a_i$ по формуле

$$a_i[f] = a_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_i(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots \quad (6)$$

С помощью подстановки $x = \cos t$ получаем равносильную формулу

$$a_i[f] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \cos it dt, \quad i = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Введем обозначение

$$\sum_{j=l}^m a_j = \frac{1}{2}a_l + a_{l+1} + \dots + a_m, \quad m \geq l. \tag{8}$$

Тогда ряд Чебышёва (5) функции $f(x)$ может быть представлен так:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i[f] \cdot T_i(x), \tag{9}$$

где $a_i[f]$ определены по формуле (6). Коэффициенты (6) также называются *коэффициентами Чебышёва* функции $f(x)$.

Коэффициент Чебышёва (7) функции $f(x)$ совпадает с тригонометрическим коэффициентом Фурье четной функции $\varphi(t) = f(\cos t)$. Ряд Чебышёва (9) функции $f(x)$ при условии $x = \cos t$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i[f] \cdot \cos it \tag{10}$$

одновременно является тригонометрическим рядом Фурье четной функции $\varphi(t) = f(\cos t)$.

Будем использовать также систему смещенных многочленов Чебышёва первого рода $T_n^*(x)$ на отрезке $[0, 1]$, которые простым образом связаны с многочленами T_n :

$$T_n^*(x) = T_n(2x - 1), \quad n = 0, 1, \dots \tag{11}$$

Последовательность многочленов $T_n^*(x)$ ортогональна на отрезке $[0, 1]$ с весом

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, \tag{12}$$

т.е.

$$(T_i^*, T_j^*) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} T_i^*(x) T_j^*(x) dx = 0 \tag{13}$$

при $i \neq j$. При этом

$$(T_i^*, T_i^*) = \|T_i^*\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & i > 0, \\ \pi, & i = 0 \end{cases} \tag{14}$$

(см. теорему 5.2 в [1]). Для функции

$$f(x) \in L_2\left(0, 1; \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\right)$$

рассмотрим ряд Фурье по смещенным многочленам Чебышёва первого рода $T_i^*(x)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \tag{15}$$

где символ \sum' определен формулой (8). Коэффициенты ряда определяются по формуле

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x) T_i^*(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots \tag{16}$$

Ряд (15) называется также *смещенным рядом Чебышёва* функции $f(x)$. С помощью подстановки

$$x = \cos^2 \frac{t}{2} \tag{17}$$

и соотношения

$$T_i^*(x) = T_{2i}(\sqrt{x}), \quad x \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (18)$$

(см. § 1, теорему 1.13 в [6]) получаем равносильную формулу для коэффициентов

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right) \cos it \, dt, \quad i = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Подставим (17) в $T_i^*(x)$:

$$T_i^*\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right) = T_{2i}\left(\cos \frac{t}{2}\right) = \cos\left(2i \arccos \cos \frac{t}{2}\right) = \cos\left(2i \cdot \frac{t}{2}\right) = \cos it. \quad (20)$$

Коэффициент Чебышёва (19) функции $f(x)$ совпадает с тригонометрическим коэффициентом Фурье четной функции $\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)$. Из (20) следует, что смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ при условии $x = \cos^2 \frac{t}{2}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^*[f] \cdot \cos it \quad (21)$$

одновременно является тригонометрическим рядом Фурье четной функции $\psi(t) = \cos^2 \frac{t}{2}$.

Для функций, принадлежащих указанным здесь функциональным пространствам, их ряды Чебышёва (9) (и, соответственно, смещенные ряды Чебышёва (15)) сходятся в этих пространствах к данным функциям, т.е. *сходятся в среднем с весом $p(x)$* из (2) (и, соответственно, *сходятся в среднем с весом $p(x)$* из (12)).

Вопрос о равномерной сходимости ряда Чебышёва (9) и смещенного ряда Чебышёва (15) функции $f(x)$ сводится к вопросу о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (10) четной функции $\varphi(t) = f(\cos t)$ и, соответственно, тригонометрического ряда Фурье (21) четной функции $\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)$. Условия, достаточные для равномерной сходимости рядов Чебышёва, являются следствием соответствующих теорем о тригонометрических рядах Фурье.

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Действительная функция $f(x)$, определенная на сегменте $[a, b]$, называется функцией *ограниченной вариации* или *ограниченного изменения* на сегменте $[a, b]$, $a < b$, если для любого разбиения сегмента

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$$

числовое множество

$$V[\{x_i\}] = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

ограничено сверху. Точная верхняя грань множества $\{V[\{x_i\}]\}$ называется *полным изменением* или *полной вариацией* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначается символом

$$\mathbf{V}_a^b f(x) = \sup\{V[\{x_i\}]\}.$$

(См. гл. 9, дополнение 2, стр. 386 в [3] или гл. XV, § 4 в [2].)

Определение 2. Для каждого $\delta > 0$ *модулем непрерывности* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется точная верхняя грань модуля разности $|f(x') - f(x'')|$ по всем точкам $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющим неравенству $|x' - x''| \leq \delta$ (см. гл. 4, § 6, п. 4 в [3]).

Таким образом, по определению

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \leq \delta; \quad x', x'' \in [a, b]\}. \quad (22)$$

Приведем (без доказательства) теоремы о равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Признак Дирихле–Жордана (см. гл. XIX, § 4, п. 699 в [2]).

Ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix), \tag{23}$$

где

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos ix \, dx, \quad i = 0, 1, \dots, \tag{24}$$

$$b_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin ix \, dx, \quad i = 1, 2, \dots,$$

периодической с периодом 2π функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно в промежутке $[a, b]$, если в некотором более широком промежутке $[A, B]$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченное изменение.

В частности, если функция $f(x)$, заданная в промежутке $[-\pi, \pi]$, непрерывна в этом промежутке и имеет в нем ограниченное изменение, а также удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то ее ряд Фурье во всем промежутке сходится к ней равномерно.

Для доказательства достаточно продолжить функцию $f(x)$ периодически с периодом 2π на всю числовую ось, тогда за промежутки $[A, B]$ можно взять любой, содержащий внутри себя промежуток $[-\pi, \pi]$.

Теорема Дини–Липшица (см. гл. 8, § 5, п. 5 в [4]).

Для равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию $f(-\pi) = f(\pi)$ и чтобы ее модуль непрерывности на сегменте $[-\pi, \pi]$ имел порядок

$$\omega(f, \delta) = o\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right), \tag{25}$$

т.е. является при $\delta \rightarrow 0$ бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем $\frac{1}{\ln(1/\delta)}$.

Докажем следующие две теоремы о равномерной сходимости рядов Чебышёва.

Теорема 1. Для произвольной функции $f(x)$, непрерывной и имеющей ограниченную вариацию на сегменте $[-1, 1]$, ее ряд Чебышёва (9) сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-1, 1]$.

Для произвольной функции $f(x)$, непрерывной и имеющей ограниченную вариацию на сегменте $[0, 1]$, ее смещенный ряд Чебышёва (15) сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $\{t_i\}$ — произвольное разбиение отрезка $[-\pi, \pi]$:

$$-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{n-1} < t_n = \pi. \tag{26}$$

Пусть $x = \cos t$; обозначим $\varphi(t) = f(\cos t)$. Тогда

$$V[\{t_i\}] = \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(\cos t_{i+1}) - f(\cos t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \tag{27}$$

При изменении i от 0 до n точки $x_i = \cos t_i$ будут пробегать отрезок $[-1, 1]$ два раза: слева направо и справа налево. Пусть m — такое значение i , при котором $x_m < x_{m+1}$, $x_{m+1} > x_{m+2}$. Разобьем последнюю сумму в (27) на две суммы:

$$V[\{t_i\}] = \sum_{i=0}^m |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_{i=m+1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \tag{28}$$

Обозначим $x_i = \tau_{n+1-i}$, $n - i = j$. Тогда вторую сумму в (28) можно представить в виде

$$\sum_{i=m+1}^{n-1} |f(\tau_{n+1-i}) - f(\tau_{n-i})| = \sum_{j=1}^{n-m-1} |f(\tau_{j+1}) - f(\tau_j)|. \tag{29}$$

Точки x_i при изменении i от 0 до m (в первой сумме (28)) монотонно возрастают от -1 до 1 . Точки τ_j при изменении j от 1 до $n - m - 1$ (в правой сумме (29)) также монотонно возрастают от -1 до 1 . Первая сумма в (28) ограничена сверху полным изменением функции $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$, т.е. величиной $\int_{-1}^1 f(x)$. Сумма в (29), а следовательно, и вторая сумма в (28) также ограничены этой величиной. Таким образом, для произвольного разбиения (26) сегмента $[-\pi, \pi]$ сумма $V[\{t_i\}]$ в (27) ограничена сверху, а именно:

$$V[\{t_i\}] \leq 2 \int_{-1}^1 f(x). \quad (30)$$

Следовательно, функция $\varphi(t) = f(\cos t)$ является непрерывной функцией в промежутке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет условию $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ и имеет в нем ограниченное изменение. Поэтому по признаку Дирихле–Жордана ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (10) с коэффициентами (7) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Значит, и совпадающий с ним ряд Чебышёва (9) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-1, 1]$.

Точки $x'_i = \cos^2 \frac{t_i}{2}$ при изменении i от 0 до n пробегает отрезок $[0, 1]$ два раза: слева направо и справа налево. Аналогично доказывается, что для произвольного разбиения (26) сумма

$$V[\{t_i\}] = \sum_{i=0}^{n-1} |\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| f\left(\cos^2 \frac{t_{i+1}}{2}\right) - f\left(\cos^2 \frac{t_i}{2}\right) \right| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x'_{i+1}) - f(x'_i)| \quad (31)$$

для функции $\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)$ также ограничена сверху, а именно:

$$V[\{t_i\}] \leq 2 \int_0^1 f(x). \quad (32)$$

Следовательно, функция $\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)$ является непрерывной функцией в промежутке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет условию $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ и имеет в нем ограниченное изменение. Поэтому по признаку Дирихле–Жордана ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (21) с коэффициентами (19) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Значит, и совпадающий с ним смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[0, 1]$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если модуль непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ имеет порядок

$$\omega(f, \delta) = o\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right), \quad (33)$$

то ее ряд Чебышёва (9) сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-1, 1]$.

Если модуль непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$ имеет порядок (33), то ее смещенный ряд Чебышёва (15) сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $t', t'' \in [-\pi, \pi]$ и $|t' - t''| \leq \delta$. Для $x = \cos t$ и $\varphi(t) = f(\cos t)$ имеем:

$$|x' - x''| = |\cos t' - \cos t''| \leq |t' - t''| \leq \delta;$$

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| = |f(\cos t') - f(\cos t'')| = |f(x') - f(x'')| \leq \omega(f, \delta). \quad (34)$$

Из соотношения (34) следует, что между модулем непрерывности функции $\varphi(t) = f(\cos t)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ и модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ выполняется неравенство

$$\omega(\varphi, \delta) \leq \omega(f, \delta). \quad (35)$$

Из (33) и (35) получаем

$$\omega(\varphi, \delta) = o\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right). \quad (36)$$

Таким образом, функция $\varphi(t) = f(\cos t)$ удовлетворяет условию $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ и ее модуль непрерывности на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет порядок (36). Поэтому по теореме Дини–Липшица ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (10) с коэффициентами

(7) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Значит, и совпадающий с ним ряд Чебышёва (9) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-1, 1]$.

Для $x = \cos^2 \frac{t}{2}$ и $\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)$ имеем:

$$|x' - x''| = \left| \cos^2 \frac{t'}{2} - \cos^2 \frac{t''}{2} \right| = \left| \frac{1 + \cos t'}{2} - \frac{1 + \cos t''}{2} \right| = \frac{1}{2} |\cos t' - \cos t''| \leq \frac{1}{2} |t' - t''| \leq \frac{1}{2} \delta,$$

$$|\psi(t') - \psi(t'')| = \left| f\left(\cos^2 \frac{t'}{2}\right) - f\left(\cos^2 \frac{t''}{2}\right) \right| = |f(x') - f(x'')| \leq \omega\left(f, \frac{\delta}{2}\right) \leq \omega(f, \delta). \tag{37}$$

Из соотношения (37) следует, что между модулем непрерывности функции $\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ и модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$ выполняется неравенство

$$\omega(\psi, \delta) \leq \omega(f, \delta). \tag{38}$$

Из (33) и (38) получаем

$$\omega(\psi, \delta) = o\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right). \tag{39}$$

Таким образом, функция $\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)$ удовлетворяет условию $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ и ее модуль непрерывности на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет порядок (39). Поэтому по теореме Дини–Лишица ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (21) с коэффициентами (19) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Значит, и совпадающий с ним смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[0, 1]$. Теорема доказана.

Следствие. Если на сегменте $[-1, 1]$ (соответственно на сегменте $[0, 1]$):

а) функция $f(x)$ удовлетворяет условию Лишица

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|, \tag{40}$$

где $L = \text{const}$, x', x'' — любые точки сегмента, или

б) функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте и ее производная ограничена на нем

$$|f'(x)| \leq L, \tag{41}$$

то ряд Чебышёва (9) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-1, 1]$ (соответственно смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[0, 1]$).

Доказательство. Если на указанном сегменте выполнено условие (40) или (41), то на этом сегменте $f(x)$ является функцией с ограниченной вариацией. Ее модуль непрерывности на этом сегменте имеет порядок $\omega(f, \delta) = O(\delta)$. Следовательно, для функции $f(x)$ выполнены условия обеих теорем.

2. Формула численного интегрирования Маркова для отрезка $[0, 1]$ с одним фиксированным узлом $a_1 = 0$ и весовой функцией $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Остановимся на задаче вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b p(x)f(x) dx, \tag{42}$$

где $p(x)$ — некоторая фиксированная неотрицательная на $[a, b]$ функция, могущая обращаться в нуль лишь в конечном числе точек, и такая, что интеграл $\int_a^b p(x)|x|^m dx$ имеет конечное значение при $m = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим квадратурную формулу, содержащую наперед заданные узлы a_1, \dots, a_m и имеющую вид

$$\int_a^b p(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^m D_l f(a_l) + R(f). \tag{43}$$

Эта формула содержит параметры $A_i, x_i, i = 1, \dots, n$, и $D_l, l = 1, \dots, m$. При любом расположении узлов x_i можно за счет выбора коэффициентов A_i и D_l достигнуть того, чтобы остаточный член $R(f)$

квадратурной формулы (43) обращался в нуль для всех алгебраических многочленов степени не выше $n + m - 1$. Для этого достаточно, чтобы она была интерполяционной. Для того чтобы остаточный член $R(f)$ квадратурной формулы (43) обращался в нуль для многочленов более высокой степени, необходимо специальным образом выбирать узлы x_i . В (43) коэффициенты A_i , D_l и узлы x_i выбирают таким образом, чтобы $R(f)$ обращался в нуль для многочленов возможно более высокой степени.

Обозначим

$$\Omega(x) = (x - a_1) \dots (x - a_m), \quad \omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Справедлива следующая теорема из [5]:

Теорема. Для того чтобы квадратурная формула

$$\int_a^b p(x)f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^m D_l f(a_l) \quad (44)$$

была точной для многочленов степени $2n + m - 1$, необходимо и достаточно, чтобы формула была интерполяционной и чтобы многочлен $\omega(x)$ был ортогонален на отрезке $[a, b]$ с весом $p(x)\Omega(x)$ к любому многочлену $q(x)$ степени, не превосходящей $n - 1$.

Доказательство теоремы приведено в [5].

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ производную порядка $2n + m$, то остаточный член $R(f)$ будет равен [5]:

$$R(f) = \int_a^b p(x)\Omega(x)\omega^2(x) \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!} dx, \quad a < \xi < b. \quad (45)$$

Из теоремы следует, что для того чтобы построить квадратурную формулу (43) при любом n , надо построить многочлен $\omega(x)$, ортогональный на отрезке $[a, b]$ с весом $p(x)\Omega(x)$ ко всем многочленам степени не выше $n - 1$.

Рассмотрим квадратурную формулу частного вида, а именно: формулу численного интегрирования А. А. Маркова.

Пусть $m = 1$ и $a_1 = a$. Тогда квадратурная формула (43) примет вид

$$\int_a^b p(x)f(x) dx = D f(a) + \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R(f). \quad (46)$$

Алгебраическая степень точности этой формулы равна $2n$. Многочлен $\omega(x)$ будет принадлежать системе многочленов, ортогональных на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x) = (x - a)p(x)$. Обозначим через $P_s(x)$, $s = 0, 1, \dots$, ортонормированную на отрезке $[a, b]$ с весом $p(x)$ систему многочленов, а через $\Pi_s(x)$, $s = 0, 1, \dots$, — систему многочленов, ортонормированную на том же отрезке $[a, b]$, но с другим весом $\rho(x) = (x - a)p(x)$ (s — степень многочленов $P_s(x)$ и $\Pi_s(x)$). Воспользуемся формулой преобразования ортогональной системы многочленов $P_s(x)$ при умножении веса $p(x)$ на многочлен $x - a$ (см. гл. 9, § 1, § 2 в [5]):

$$\Pi_n(x) = \frac{K_n}{x - a} (P_{n+1}(x)P_n(a) - P_n(x)P_{n+1}(a)), \quad (47)$$

где $K_n = \text{const} \neq 0$. Многочлен $\omega(x)$ только постоянным множителем отличается от $\Pi_n(x)$. Пусть α_n — старший коэффициент многочлена

$$\Pi_n(x) = \alpha_n x^n + \dots \quad (48)$$

Тогда для коэффициентов A_i и D справедливы формулы (см. (9.2.2) и (9.2.3) в [5])

$$A_i = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}(x_i - a)\Pi'_n(x_i)\Pi_{n-1}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (49)$$

$$D = \frac{1}{\Pi_n(a)} \int_a^b p(x)\Pi_n(x) dx. \quad (50)$$

Выражение $\Pi'_n(x_i)$ в (49) обозначает значение производной многочлена $\Pi_n(x)$ в точке x_i .

Предположим, что

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{51}$$

и отрезок $[a, b]$ совпадает с отрезком $[0, 1]$. Квадратурная формула Маркова (46) примет вид

$$\int_0^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{x(1-x)}} = D f(0) + \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R(f). \tag{52}$$

Построим систему многочленов $\Pi_s(x)$, ортонормированную на отрезке $[0, 1]$ с весом

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}. \tag{53}$$

2.1. Система многочленов, ортонормированная на отрезке $[0, 1]$ с весом $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. Многочленами $P_s(x)$, ортогональными на отрезке $[0, 1]$ с весом (51), являются смещенные многочлены Чебышёва первого рода (11)

$$T_s^*(x) = T_s(2x - 1), \quad s = 0, 1, \dots$$

Подставляя в (47) смещенные многочлены Чебышёва и учитывая равенства

$$T_s^*(0) = T_s(-1) = (-1)^s, \quad s = 0, 1, \dots, \tag{54}$$

имеем (в дальнейшем вместо буквы s в качестве индекса многочлена T_s будем писать букву n):

$$\Pi_n(x) = K_n \frac{T_{n+1}^*(x)(-1)^n - T_n^*(x)(-1)^{n+1}}{x} = (-1)^n K_n \frac{T_{n+1}^*(x) + T_n^*(x)}{x}. \tag{55}$$

Получим для многочлена $\Pi_n(x)$ простое выражение через тригонометрические функции. Выразим сначала $\Pi_n(x)$ через обычные многочлены Чебышёва. Сделаем замену переменной

$$x = \frac{1+y}{2}, \quad y \in [-1, 1].$$

Тогда

$$\Pi_n\left(\frac{1+y}{2}\right) = (-1)^n 2K_n \frac{T_{n+1}(y) + T_n(y)}{1+y}.$$

Положим $y = \cos \varphi$; тогда, учитывая (1),

$$\begin{aligned} \Pi_n\left(\frac{1+\cos \varphi}{2}\right) &= (-1)^n 2K_n \frac{\cos(n+1)\varphi + \cos n\varphi}{1+\cos \varphi} = (-1)^n 2K_n \frac{2 \cos(n+1/2)\varphi \cdot \cos \varphi/2}{2 \cos^2 \varphi/2} = \\ &= (-1)^n 2K_n \frac{\cos(n+1/2)\varphi}{\cos \varphi/2}. \end{aligned} \tag{56}$$

При замене переменной

$$x = \frac{1+\cos \varphi}{2} \tag{57}$$

весовая функция $\rho(x)$ в (53) примет вид

$$\rho\left(\frac{1+\cos \varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1+\cos \varphi}{2}}{1-\frac{1+\cos \varphi}{2}}} = \sqrt{\frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi}} = \frac{\cos \varphi/2}{\sin \varphi/2} = \frac{1+\cos \varphi}{\sin \varphi}. \tag{58}$$

Найдем коэффициент K_n в выражении (55) для $\Pi_n(x)$. Так как $\Pi_n(x)$ — ортонормированный на отрезке $[0, 1]$ с весом $\rho(x)$ из (53) многочлен, то должно выполняться равенство

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Pi_n^2(x) dx = 1. \quad (59)$$

Вычислим интеграл с помощью правила замены переменной (57). Учитывая (56), (58), имеем:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Pi_n^2(x) dx = -4K_n^2 \int_{\pi}^0 \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\cos^2(n + 1/2)\varphi}{\cos^2 \varphi/2} \frac{\sin \varphi}{2} d\varphi = 2K_n^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos(2n + 1)\varphi) d\varphi = 2\pi K_n^2.$$

Отсюда и из (59) получаем

$$K_n^2 = \frac{1}{2\pi}, \quad K_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (60)$$

Так как K_n не зависит от n , то индекс n в K_n будем в дальнейшем опускать.

Итак, система многочленов, ортонормированная на отрезке $[0, 1]$ с весом (53), задается следующими формулами, а именно: через смещенные многочлены Чебышёва

$$\Pi_n(x) = (-1)^n K \frac{T_{n+1}^*(x) + T_n^*(x)}{x}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad (61)$$

через обычные многочлены Чебышёва

$$\Pi_n(x) = (-1)^n K \frac{T_{n+1}(2x-1) + T_n(2x-1)}{x}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad (62)$$

при условии

$$x = \frac{1 + \cos \varphi}{2} \quad (57)$$

имеем простое выражение $\Pi_n(x)$ через тригонометрические функции:

$$\Pi_n(x) = \Pi_n\left(\frac{1 + \cos \varphi}{2}\right) = (-1)^n 2K \frac{\cos(n + 1/2)\varphi}{\cos \varphi/2}, \quad n = 0, 1, \dots. \quad (63)$$

Из (62) находим, что старший коэффициент многочлена $\Pi_n(x)$ равен

$$\alpha_n = (-1)^n K 2^{(n+1)-1} \cdot 2^{n+1} = (-1)^n K 2^{2n+1}. \quad (64)$$

Заметим, что многочлен $\frac{\Pi_n(x)}{\alpha_n}$ совпадает с многочленом Якоби n -ой степени $G_n(p, q, x)$ из системы многочленов, ортогональной на отрезке $[0, 1]$ с весовой функцией $(1-x)^{p-q} \cdot x^{q-1}$, а именно:

$$\frac{\Pi_n(x)}{\alpha_n} = G_n\left(1, \frac{3}{2}, x\right), \quad (65)$$

многочлены $G_n\left(1, \frac{3}{2}, x\right)$ ортогональны на отрезке $[0, 1]$ с весом $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ (см. формулу 22.2.2 при $p = 1$, $q = 3/2$ в [6]). Для многочленов $G_n(p, q, x)$ справедливо функциональное соотношение (см. формулу 22.5.2 в [6])

$$G_n(p, q, x) = \frac{n! \Gamma(n+p)}{\Gamma(2n+p)} P_n^{(p-q, q-1)}(2x-1), \quad (66)$$

где $P_n^{(\alpha, \beta)}(y)$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-y)^\alpha (1+y)^\beta$ и равные

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-y)^{-\alpha} (1+y)^{-\beta} \frac{d^n}{dy^n} \left[(1-y)^{\alpha+n} (1+y)^{\beta+n} \right], \quad \alpha, \beta > -1 \quad (67)$$

(см. формулу 22.11.1 в [6]).

Полагая $p = 1$, $q = 3/2$, получаем

$$G_n\left(1, \frac{3}{2}, x\right) = \frac{n! \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} P_n^{(-1/2, 1/2)}(2x-1) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} P_n^{(-1/2, 1/2)}(2x-1), \tag{68}$$

$$P_n^{(-1/2, 1/2)}(2x-1) = \frac{(-1)^n}{n!} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n-1/2} x^{n+1/2}]. \tag{69}$$

Таким образом, формулы (63), (65), (68) дают для многочлена Якоби (69) простое выражение через тригонометрические функции.

2.2. Абсциссы формулы Маркова. Найдем корни многочлена $\Pi_n(x)$. Воспользуемся его выражением через тригонометрические функции (63). Из (63) имеем

$$\begin{aligned} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi &= 0, \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi &= -\frac{\pi}{2} + \pi i, \quad i = 1, 2, \dots, \\ \varphi &= \frac{-\frac{\pi}{2} + \pi i}{n + \frac{1}{2}} = \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}, \quad i = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Итак, корни многочлена $\Pi_n(x)$, а значит, и абсциссы x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, квадратурной формулы Маркова (52) будут равны

$$x_i = \frac{1 + \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{70}$$

Заметим, что абсциссы (70) квадратурной формулы Маркова (52) являются нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода степени $2n$

$$U_{2n}^*(x) = U_{2n}(2x-1). \tag{71}$$

Здесь $U_s(x)$ — многочлен Чебышёва второго рода s -й степени, который при $|x| < 1$ может быть записан в виде

$$U_s(x) = \frac{\sin((s+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad s = 0, 1, \dots. \tag{72}$$

Нули многочлена Чебышёва второго рода $U_s(x)$ равны

$$u_{sj} = \cos \frac{j\pi}{s+1}, \quad s \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, s; \tag{73}$$

нули смещенного многочлена Чебышёва второго рода $U_s^*(x)$ равны

$$u_{sj}^* = \frac{1 + u_{sj}}{2} = \frac{1 + \cos \frac{j\pi}{s+1}}{2}, \quad s \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, s \tag{74}$$

(см., например, теорему 4.1 в [6]).

2.3. Коэффициенты формулы Маркова. Коэффициент D квадратурной формулы Маркова (52) вычисляем по формуле (50).

Для отыскания $\Pi_n(0)$ нельзя применить формулу (61) непосредственно, так как при $x = 0$ эта формула содержит неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Поэтому для вычисления $\Pi_n(0)$ применим первое правило Лопиталья. При этом нам потребуется формула для производной смещенного многочлена Чебышёва

$$(T_n^*(x))' = 2n \cdot U_{n-1}^*(x). \tag{75}$$

Эта формула следует из формулы (13) в теореме 1.2 в [1]

$$T'_n(x) = nU_{n-1}(x). \quad (76)$$

Кроме этого, нам понадобятся следующие формулы для значений многочлена Чебышёва второго рода:

$$U_n^*(0) = U_n(-1) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n \cdot (n+1), \quad U_n(1) = n+1, \quad (77)$$

которые вытекают из (17), (19) в теореме 4.4 в [1] при $m=0$ (см. также формулы (1.6.13) и (1.6.14) в [7]). По правилу Лопиталя находим

$$\begin{aligned} \Pi_n(0) &= (-1)^n K \lim_{x \rightarrow 0} (T_{n+1}^*(x) + T_n^*(x))' = (-1)^n K \lim_{x \rightarrow 0} [2(n+1)U_n^*(x) + 2nU_{n-1}^*(x)] = \\ &= (-1)^n 2K [(n+1)U_n^*(0) + nU_{n-1}^*(0)] = (-1)^n 2K [(n+1)^2(-1)^n + n^2(-1)^{n-1}] = 2K(2n+1). \end{aligned}$$

Итак,

$$\Pi_n(0) = 2K(2n+1). \quad (78)$$

Теперь рассмотрим интеграл в (50). Вычислим его с помощью правила замены переменной $x = \frac{1+y}{2}$:

$$\int_0^1 p(x) \Pi_n(x) dx = (-1)^n K \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \cdot \frac{T_{n+1}^*(x) + T_n^*(x)}{x} dx = (-1)^n 2K \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(y) + T_n(y)}{(1+y)\sqrt{1-y^2}} dy. \quad (79)$$

Интеграл в (79) содержит ортогональные многочлены Чебышёва первого рода. Для его вычисления воспользуемся формулой 22.13.3 в [6]:

$$V.p. \int_{-1}^1 \frac{T_n(y) dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}} = \pi U_{n-1}(x). \quad (80)$$

Полагая в (80) $x = -1$, находим

$$\int_0^1 p(x) \Pi_n(x) dx = (-1)^n 2K \pi (U_n(-1) + U_{n-1}(-1)) = (-1)^n 2K \pi [(-1)^n (n+1) + (-1)^{n-1} n] = 2K \pi. \quad (81)$$

Подставляя (78), (81) в (50), окончательно находим коэффициент D :

$$D = \frac{\pi}{2n+1}. \quad (82)$$

Для вычисления коэффициентов A_i квадратурной формулы (52) обратимся к (49).

Найдем сначала производную $\Pi'_n(x_i)$. Из формулы (61), учитывая, что x_i — корень многочлена $\Pi_n(x)$, находим:

$$\Pi'_n(x_i) = (-1)^n K \frac{T_{n+1}^{*'}(x_i) + T_n^{*'}(x_i)}{x_i} = (-1)^n 2K \frac{(n+1)U_n(2x_i-1) + nU_{n-1}(2x_i-1)}{x_i}. \quad (83)$$

Из (70) следует

$$2x_i - 1 = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}, \quad x_i = \cos^2 \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}. \quad (84)$$

Значения многочленов Чебышёва второго рода в (83) могут быть получены по формуле (72):

$$U_n(2x_i-1) = \frac{\sin \frac{(n+1)(2i-1)\pi}{2n+1}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}}, \quad (85)$$

$$U_{n-1}(2x_i - 1) = \frac{\sin \frac{n(2i-1)\pi}{2n+1}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}}. \tag{86}$$

Упростим числитель в (85), (86):

$$\begin{aligned} \sin \frac{(n+1)(2i-1)\pi}{2n+1} &= \sin \frac{(2n+2)(2i-1)\pi}{2(2n+1)} = \sin \left[(2i-1)\frac{\pi}{2} + \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)} \right] = \\ &= (-1)^{i-1} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)} = (-1)^{i-1} \sqrt{x_i}, \end{aligned} \tag{87}$$

$$\sin \frac{n(2i-1)\pi}{2n+1} = \sin \frac{2n(2i-1)\pi}{2(2n+1)} = \sin \left[(2i-1)\frac{\pi}{2} - \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)} \right] = (-1)^{i-1} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)} = (-1)^{i-1} \sqrt{x_i}. \tag{88}$$

В (87), (88) мы учли второе равенство из (84). Подставляя (85)–(88) в (83), приходим к следующему значению производной многочлена $\Pi'_n(x_i)$:

$$\Pi'_n(x_i) = (-1)^{n+i-1} \cdot 2K(2n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i} \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}}. \tag{89}$$

Теперь найдем значение многочлена $\Pi_{n-1}(x_i)$. Воспользуемся представлением $\Pi_{n-1}(x_i)$ через тригонометрические функции. Заменяя в (63) n на $n-1$, имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{n-1}(x_i) &= \Pi_{n-1} \left(\frac{1 + \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2} \right) = (-1)^{n-1} 2K \frac{\cos \frac{(2n-1)(2i-1)\pi}{2(2n+1)}}{\cos \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}} = \\ &= (-1)^{n-1} 2K \frac{\cos \frac{(2n-1)(2i-1)\pi}{2(2n+1)}}{\sqrt{x_i}}. \end{aligned}$$

Упростим числитель и получим окончательное выражение для значения многочлена $\Pi_{n-1}(x_i)$:

$$\Pi_{n-1}(x_i) = (-1)^{n-1} 2K \frac{1}{\sqrt{x_i}} \cos \left[(2i-1)\frac{\pi}{2} - \frac{(2i-1)\pi}{2n+1} \right] = (-1)^{n+i} 2K \frac{1}{\sqrt{x_i}} \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}. \tag{90}$$

Отношение старших коэффициентов $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ находим с учетом (64):

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = -4. \tag{91}$$

Подставляя (89), (90) и (91) в (49), находим коэффициент A_i :

$$A_i = -4 \cdot \frac{1}{x_i} \cdot \frac{(-1)^{n+i-1} \sqrt{x_i} \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2K(2n+1)} \cdot \frac{(-1)^{n+i} \sqrt{x_i}}{2K \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}} = \frac{1}{K^2(2n+1)}. \tag{92}$$

Итак, мы доказали, что коэффициенты A_i квадратурной формулы Маркова (52) равны между собой:

$$A_i = \frac{2\pi}{2n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{93}$$

2.4. Остаточный член формулы Маркова. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2n+1$, то остаточный член $R(f)$ формулы (52), согласно (45) и формуле среднего значения, может быть представлен в виде

$$R(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_0^1 \frac{x\omega^2(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \omega^2(x) dx, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \tag{94}$$

Напомним, что многочлен $\omega(x)$ степени n принадлежит системе многочленов, ортогональных на отрезке $[0, 1]$ с весом

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}. \quad (53)$$

Многочлен $\omega(x)$ отличается от многочлена $\Pi_n(x)$ (61) только постоянным множителем, равным обратной величине старшего коэффициента α_n , а именно:

$$\omega(x) = \frac{1}{\alpha_n} \Pi_n(x) \quad (95)$$

и

$$R(f) = \frac{1}{\alpha_n^2} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Pi_n^2(x) dx, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (96)$$

Многочлен $\Pi_n(x)$ — ортонормированный на отрезке $[0, 1]$ с весом (53); интеграл в (96), являющийся квадратом нормы этого многочлена, равен 1 (см. формулу (59)). Поэтому, с учетом (64) и (60),

$$R(f) = \frac{1}{\alpha_n^2} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} = \frac{2\pi}{2^{4n+2}} \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{2^{4n+1}} \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (97)$$

Таким образом, квадратурная формула Маркова (52) для отрезка $[0, 1]$ с одним наперед заданным узлом $a_1 = 0$ и весовой функцией

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

имеет вид

$$\int_0^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{2n+1} f(0) + \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (98)$$

или, пользуясь обозначением (8) п. 1,

$$\int_0^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{i=0}^n f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}} \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (99)$$

Абсциссы квадратуры (99) вычисляются по формулам:

$$x_0 = 0, \quad (100)$$

$$x_i = \frac{1 + \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Узлы $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, являются нулями многочлена Якоби $G_n\left(1, \frac{3}{2}, x\right)$ или многочлена $P_n^{(-1/2, 1/2)}(2x-1)$ (см. формулы (68), (69)) и совпадают с нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода степени $2n$

$$U_{2n}^*(x) = U_{2n}(2x-1).$$

Алгебраическая степень точности формулы (99) равна $2n$.

3. Формула численного интегрирования Маркова для интегралов вида $\int_a^b \frac{f(x) dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$.

Приведем отрезок интегрирования $[a, b]$ к отрезку $[0, 1]$ линейным преобразованием

$$x = (b-a)\alpha + a, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (101)$$

Обратное преобразование дается формулой

$$\alpha = \frac{x - a}{b - a}. \tag{102}$$

При преобразовании (101) функция

$$h(x) = \frac{b - a}{\sqrt{(b - x)(x - a)}} \tag{103}$$

преобразуется в функцию

$$p(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}}. \tag{104}$$

Найдем интеграл, применяя правило замены переменной:

$$\int_a^b \frac{f(x) dx}{\sqrt{(b - x)(x - a)}} = \int_0^1 \frac{f[(b - a)\alpha + a]}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}} d\alpha. \tag{105}$$

Вычисляя интеграл по отрезку $[0, 1]$ от функции $\varphi(\alpha) = f[(b - a)\alpha + a]$ переменной α с помощью (99) и применяя для определения остаточного члена $R(\varphi)$ правило дифференцирования сложной функции

$$\varphi^{(2n+1)}(\alpha) = (b - a)^{2n+1} f^{(2n+1)}[(b - a)\alpha + a], \tag{106}$$

получаем квадратурную формулу Маркова следующего вида:

$$\int_a^b \frac{f(x) dx}{\sqrt{(b - x)(x - a)}} = \frac{2\pi}{2n + 1} \sum_{i=0}^{n'} f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}} (b - a)^{2n+1} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n + 1)!}, \quad a \leq \eta \leq b. \tag{107}$$

Абсциссы квадратуры (107) есть:

$$x_0 = a, \tag{108}$$

$$x_i = (b - a)\alpha_i + a, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{109}$$

$$\alpha_i = \frac{1 + \cos \frac{(2i - 1)\pi}{2n + 1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{110}$$

Символ \sum' определен формулой (8) п. 1. Для весовой функции (103) квадратурная формула будет иметь вид:

$$\int_a^b \frac{(b - a)f(x) dx}{\sqrt{(b - x)(x - a)}} = \frac{2\pi(b - a)}{2n + 1} \sum_{i=0}^{n'} f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}} (b - a)^{2n+2} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n + 1)!}, \quad a \leq \eta \leq b. \tag{111}$$

4. Сходимость квадратурного процесса по формулам Маркова. Обозначим $Q_n(f)$ квадратурную сумму в (107):

$$Q_n(f) = \frac{2\pi}{2n + 1} \sum_{i=0}^{n'} f(x_i^{(n)}), \tag{112}$$

где $x_i^{(n)} = x_i$ (x_i определены по формулам (108)–(110)), а через $I(f)$ — интеграл в (107):

$$I(f) = \int_a^b \frac{f(x) dx}{\sqrt{(b - x)(x - a)}}. \tag{113}$$

Докажем, что для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ квадратурный процесс по формулам Маркова

$$I(f) = Q_n(f) + R_n(f), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{114}$$

сходится, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = I(f). \quad (115)$$

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса (см., например, гл. 4, §3, п. 1 в [8]) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P(x)$, что для всех $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Пусть m — степень этого многочлена. Рассмотрим остаток квадратуры (114) при $2n \geq m$:

$$R_n(f) = I(f) - Q_n(f) = [I(f) - I(P)] + [I(P) - Q_n(P)] + [Q_n(P) - Q_n(f)]. \quad (116)$$

Абсолютная величина первого слагаемого не превышает

$$\varepsilon \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \varepsilon\pi.$$

Так как степень многочлена $P(x)$ не превосходит алгебраической степени точности квадратурной формулы (114), то $I(P) = Q_n(P)$, и второе слагаемое в (116) равно нулю. Абсолютная величина третьего слагаемого (116) также не превышает $\varepsilon\pi$. Отсюда получаем, что

$$|R_n(f)| = |I(f) - Q_n(f)| < 2\varepsilon\pi.$$

Следовательно, остаток квадратуры $R_n(f)$ может быть сделан сколь угодно малым. Это доказывает существование предела (115), а значит, и сходимость квадратурного процесса, определяемого равенством (114).

5. Приближенное вычисление коэффициентов смещенного ряда Чебышёва по формуле численного интегрирования Маркова. Вернемся теперь к вопросу о вычислении коэффициентов

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x) T_i^*(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots,$$

смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^*[f] \cdot T_i^*(x).$$

Здесь символ \sum' определен формулой (8) п. 1. Применим квадратурную формулу Маркова (99) для вычисления интеграла (16), принимая в качестве интегрируемой функции произведение $f(x)T_i^*(x)$:

$$a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) T_i^*(x_j) + \frac{\pi}{2^{4n+1}} \frac{(f \cdot T_i^*)^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \right]$$

или

$$a_i^* = \frac{4}{2n+1} \sum_{j=0}^n f(x_j) T_i^*(x_j) + R(f \cdot T_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (117)$$

где

$$R(f \cdot T_i^*) = \frac{1}{2^{4n}} \frac{(f \cdot T_i^*)^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (118)$$

Абсциссы x_j , входящие в (117), есть

$$x_0 = 0, \quad (119)$$

$$x_j = \frac{1 + \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n+1}}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (120)$$

Значения смещенного многочлена Чебышёва в (117) равны:

$$T_i^*(0) = T_i(-1) = (-1)^i, \tag{121}$$

$$T_i^*(x_j) = T_i(2x_j - 1) = \cos \frac{i(2j - 1)\pi}{2n + 1}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{122}$$

Подставим (121), (122) в (117):

$$a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{(-1)^i 2}{2n + 1} f(0) + \frac{4}{2n + 1} \sum_{j=1}^n \cos \frac{i(2j - 1)\pi}{2n + 1} f(x_j) + R(f \cdot T_i^*), \quad i = 0, 1, \dots \tag{123}$$

Отбрасывая остаточный член $R(f \cdot T_i^*)$, получаем приближенное значение коэффициента смещенного ряда Чебышёва

$$a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx \approx \frac{(-1)^i 2}{2n + 1} f(0) + \frac{4}{2n + 1} \sum_{j=1}^n \cos \frac{i(2j - 1)\pi}{2n + 1} f(x_j), \quad i = 0, 1, \dots \tag{124}$$

Формула (124) будет давать точное значение коэффициента Чебышёва a_i^* функции $f(x)$, если $f(x)$ является многочленом степени не выше $2n - i$.

Предположим, что $f(x)$ — многочлен степени k . Ряд Чебышёва многочлена степени k тождественно совпадает со своей k -й частичной суммой и многочлен $f(x)$ будет равен этой частичной сумме:

$$f(x) = \sum_{i=0}^k a_i^* \cdot T_i^*(x). \tag{125}$$

Здесь $a_k^* \cdot T_k^*(x)$ — член ряда Чебышёва с максимальным номером, содержащийся в частичной сумме, a_k^* — коэффициент Чебышёва с максимальным номером, входящий в частичную сумму. При вычислении a_k^* под знаком интеграла в (124) будет многочлен $f(x)T_k^*(x)$ степени $2k$. Для того чтобы коэффициент a_k^* вычислялся точно по квадратурной формуле Маркова (124), необходимо, чтобы алгебраическая степень точности квадратуры (124) была не менее $2k$, т.е.

$$2n \geq 2k, \quad n \geq k. \tag{126}$$

Поэтому число нефиксированных узлов квадратурной формулы (124) должно быть не менее степени многочлена $f(x)$ или, другими словами, не менее максимального номера коэффициента Чебышёва.

6. Частичная сумма смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова. Рассмотрим k -ую частичную сумму смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$

$$\sum_{i=0}^k a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \quad k > 0. \tag{127}$$

Пусть коэффициенты a_i^* вычислены по квадратурной формуле Маркова (117) или (124) с числом нефиксированных узлов $n = k$. Подставляя квадратурную сумму (117) при $n = k$ в (127), получим

$$J_k(x) = \sum_{i=0}^k \left(\frac{4}{2k + 1} \sum_{j=0}^k f(x_j) T_i^*(x_j) \right) \cdot T_i^*(x), \tag{128}$$

где

$$x_0 = 0, \tag{129}$$

$$x_j = \frac{1 + \cos \frac{(2j - 1)\pi}{2k + 1}}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{130}$$

Напомним, что x_j , $j = 1, 2, \dots, k$, являются нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва U_{2k}^* второго рода (71) степени $2k$, а числа

$$u_{2k,2j-1} = 2x_j - 1 = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2k+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (131)$$

являются нечетными нулями обычного многочлена Чебышёва U_{2k} второго рода (72).

Для дальнейшего нам понадобится тождество для смещенных многочленов Чебышёва первого рода.

6.1. Тождество Кристоффеля–Дарбу для смещенных многочленов Чебышёва первого рода. Воспользуемся тождеством Кристоффеля–Дарбу для обычных многочленов Чебышёва $T_i(x)$ (см. формулу (51) в теореме 2.8 в [1] при $n = k$):

$$2(x-y) \sum_{i=0}^k T_i(x)T_i(y) = T_{k+1}(x)T_k(y) - T_k(x)T_{k+1}(y). \quad (132)$$

Положим $x = 2t - 1$, $y = 2\tau - 1$. Тогда $x - y = 2(t - \tau)$. Подставим в (132) и, учитывая, что $T_i(2t - 1) = T_i^*(t)$, получим

$$4(t - \tau) \sum_{i=0}^k T_i^*(t)T_i^*(\tau) = T_{k+1}^*(t)T_k^*(\tau) - T_k^*(t)T_{k+1}^*(\tau).$$

Заменим в полученном равенстве t на x , τ на y :

$$4(x - y) \sum_{i=0}^k T_i^*(x)T_i^*(y) = T_{k+1}^*(x)T_k^*(y) - T_k^*(x)T_{k+1}^*(y). \quad (133)$$

Это и есть тождество Кристоффеля–Дарбу для смещенных многочленов Чебышёва первого рода. Формулу (133) можно записать в виде

$$4(x - y) \sum_{i=0}^k T_i(2x - 1)T_i(2y - 1) = T_{k+1}(2x - 1)T_k(2y - 1) - T_k(2x - 1)T_{k+1}(2y - 1). \quad (134)$$

6.2. Связь частичной суммы ряда Чебышёва с интерполированием. Частичная сумма (128) смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$ представляет собой многочлен степени k . Преобразуем формулу (128) к виду

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{4}{2k+1} \left(\sum_{i=0}^k T_i^*(x_j)T_i^*(x) \right) f(x_j). \quad (135)$$

Докажем, что многочлен (135) является интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $f(x)$ с узлами интерполирования $x_0, x_j, j = 1, 2, \dots, k$, определяемыми формулами (129), (130).

Вычислим выражение

$$Q_j(x) = \frac{4}{2k+1} \sum_{i=0}^k T_i^*(x_j)T_i^*(x) \quad (136)$$

при $x = x_l$, $l = 0, 1, \dots, k$.

1-й случай. Пусть $l \neq j$, $j \neq 0$ и $l \neq 0$. Значение суммы в (136) найдем, если воспользуемся тождеством Кристоффеля–Дарбу (133), (134) при $x = x_j$ и $y = x_l$:

$$4(x_j - x_l) \sum_{i=0}^k T_i^*(x_j)T_i^*(x_l) = T_{k+1} \left(\cos \frac{(2j-1)\pi}{2k+1} \right) \cdot T_k \left(\cos \frac{(2l-1)\pi}{2k+1} \right) - T_k \left(\cos \frac{(2j-1)\pi}{2k+1} \right) \cdot T_{k+1} \left(\cos \frac{(2l-1)\pi}{2k+1} \right). \quad (137)$$

Выразим значения многочленов Чебышёва в правой части (137) через тригонометрические функции:

$$T_{k+1}\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right) = \cos\frac{(k+1)(2j-1)\pi}{2k+1} = \cos\left(j\pi + \frac{(j-k-1)\pi}{2k+1}\right) = (-1)^j \cos\frac{(j-k-1)\pi}{2k+1},$$

$$T_k\left(\cos\frac{(2l-1)\pi}{2k+1}\right) = \cos\frac{k(2l-1)\pi}{2k+1} = \cos\left(l\pi - \frac{(l+k)\pi}{2k+1}\right) = (-1)^l \cos\frac{(l+k)\pi}{2k+1}.$$

Правая часть (137) будет равна

$$(-1)^{j+l} \cos\frac{(j-k-1)\pi}{2k+1} \cos\frac{(l+k)\pi}{2k+1} - (-1)^{j+l} \cos\frac{(l-k-1)\pi}{2k+1} \cos\frac{(j+k)\pi}{2k+1}.$$

Преобразуем произведение косинусов в сумму косинусов и получим следующее значение для правой части (137):

$$(-1)^{j+l} \frac{1}{2} \left[\cos\frac{(-2k-1+j-l)\pi}{2k+1} - \cos\frac{(-2k-1+l-j)\pi}{2k+1} \right] =$$

$$= (-1)^{j+l} \frac{1}{2} \left[\cos\left(-\pi + \frac{(j-l)\pi}{2k+1}\right) - \cos\left(-\pi + \frac{(l-j)\pi}{2k+1}\right) \right] = 0.$$

Следовательно, левая часть (137) равна нулю, т.е.

$$(x_j - x_l) \sum_{i=0}^k T_i^*(x_j) T_i^*(x_l) = 0.$$

Так как, по предположению, $j \neq l$, а значит, $x_j \neq x_l$, то сумма в левой части (137) равна нулю. Таким образом, $Q_j(x_l) = 0$ при $l \neq j$, $j \neq 0$ и $l \neq 0$.

2-й случай. Пусть $l = 0$, $j \neq 0$. Тогда сумма в (136) при $x = x_0$ будет равна

$$\sum_{i=0}^k T_i^*(x_j) T_i^*(0) = \sum_{i=0}^k (-1)^i T_i^*(x_j) = \sum_{i=0}^k (-1)^i T_i\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right). \tag{138}$$

Будем применять обозначение

$$\sum_{i=l}^m a_i = \frac{1}{2} a_l + a_{l+1} + \dots + a_{m-1} + \frac{1}{2} a_m, \quad m > l. \tag{139}$$

Сумму с одним штрихом в (138) преобразуем в сумму с двумя штрихами:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i T_i\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right) = \sum_{i=0}^k (-1)^i T_i\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right) + \frac{1}{2} (-1)^k T_k\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right). \tag{140}$$

Воспользуемся тождеством (63) из теоремы 2.8 в [1]:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i T_i(y) = \frac{1}{2} (-1)^k (y-1) U_{k-1}(y). \tag{141}$$

Заменим сумму \sum'' в правой части (140) с помощью тождества (141) при $y = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}$, при этом правая часть (140) примет вид:

$$\frac{(-1)^k}{2} \left[\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1} - 1 \right) \cdot U_{k-1}\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right) + \cos\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} \right]. \tag{142}$$

Значение многочлена Чебышёва второго рода может быть получено по формуле (72). Подстановка этого значения, которое равно

$$\frac{\sin\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1}}{\sin\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}},$$

приведет выражение в квадратных скобках в (142) к следующему виду:

$$\left[\cos \frac{(2j-1)\pi}{2k+1} \cdot \sin \frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} - \sin \frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} + \sin \frac{(2j-1)\pi}{2k+1} \cdot \cos \frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} \right] \left(\sin \frac{(2j-1)\pi}{2k+1} \right)^{-1}.$$

Простые преобразования выражения в квадратных скобках дают:

$$\sin \frac{(k+1)(2j-1)\pi}{2k+1} - \sin \frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} = 2 \cos \left(\frac{2k+1}{2} \cdot \frac{(2j-1)\pi}{2k+1} \right) \cdot \sin \frac{(2j-1)\pi}{2(2k+1)} = 0.$$

Значит, $Q_j(x_0) = 0$ при $j \neq 0$. Равенство $Q_0(x_l) = 0$ при $l \neq 0$ доказывается аналогично.

3-й случай. Пусть $l = j \neq 0$. Тогда

$$Q_j(x_j) = \frac{4}{2k+1} \sum_{i=0}^{k'} [T_i^*(x_j)]^2 = \frac{4}{2k+1} \sum_{i=0}^k T_i^2(2x_j - 1). \quad (143)$$

Для вычисления суммы квадратов многочленов Чебышёва воспользуемся тождеством (65) из теоремы 2.9 в [1]:

$$\sum_{i=0}^k T_i^2(y) = \frac{1}{4} (U_{2k}(y) + 2k + 3). \quad (144)$$

Преобразуем сумму со штрихом в (143) в сумму без штриха:

$$\sum_{i=0}^{k'} T_i^2(2x_j - 1) = \sum_{i=0}^k T_i^2(2x_j - 1) - \frac{1}{2} T_0^2, \quad T_0 = 1.$$

Заменим сумму квадратов на равную ей правую часть из (144) при $y = 2x_j - 1$:

$$\sum_{i=0}^{k'} T_i^2(2x_j - 1) = \frac{1}{4} [U_{2k}(2x_j - 1) + 2k + 3] - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} [U_{2k}(2x_j - 1) + 2k] + \frac{1}{4}. \quad (145)$$

Учтем, что $2x_j - 1$ есть нечетный корень многочлена Чебышёва второго рода U_{2k} . Поэтому

$$\sum_{i=0}^{k'} T_i^2(2x_j - 1) = \frac{2k+1}{4}. \quad (146)$$

Подставляя полученную сумму (146) в (143), имеем

$$Q_j(x_j) = 1 \quad \text{при} \quad j \neq 0.$$

4-й случай. Пусть $l = j = 0$. Как и в третьем случае, здесь будет выполняться равенство (145). Значение многочлена Чебышёва второго рода может быть найдено из (77):

$$U_{2k}(-1) = 2k + 1.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{k'} T_i^2(-1) = \frac{4k+1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{2}. \quad (147)$$

Подставляя полученную сумму (147) в (143), получаем

$$Q_0(x_0) = 2.$$

Напомним, что многочлен $Q_0(x)$ входит в сумму (135) для $J_k(x)$ с дополнительным коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$.

Итак, мы доказали, что

$$Q_j(x_l) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq l, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad l = 0, 1, \dots, k, \quad (148)$$

$$Q_j(x_j) = 1 \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (149)$$

$$Q_0(x_0) = 2. \quad (150)$$

Из (148)–(150) следует, что многочлен $J_k(x)$, определенный формулой (128), удовлетворяет условиям

$$J_k(x_l) = f(x_l), \quad l = 0, 1, \dots, k, \quad (151)$$

где x_l задаются формулами (129), (130), и, следовательно, является интерполяционным полиномом для функции $f(x)$ с узлами интерполирования (129), (130). Многочлен, определяемый по формуле (135), является интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $f(x)$.

6.3. Зависимость между коэффициентами Чебышёва и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова. Установим зависимость коэффициентов Чебышёва $a_i^*[J_k]$ интерполяционного полинома $J_k(x)$ (128) функции $f(x)$ от коэффициентов Чебышёва самой функции.

Формула (128) дает простое выражение для коэффициентов Чебышёва многочлена $J_k(x)$:

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^k{}' f(x_j) T_i^*(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad (152)$$

здесь x_j вычисляются по (129), (130), а символ \sum' определен формулой (8) в п. 1. Подставим в (152) разложение функции $f(x)$ в смещенный ряд Чебышёва

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty}{}' a_l^*[f] \cdot T_l^*(x). \quad (153)$$

Получим

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^k{}' \left(\sum_{l=0}^{\infty}{}' a_l^*[f] \cdot T_l^*(x_j) \right) T_i^*(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (154)$$

Поменяем местами порядок суммирования:

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty}{}' a_l^*[f] \sum_{j=0}^k{}' T_l^*(x_j) T_i^*(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (155)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx, \quad i, r = 0, 1, \dots, k. \quad (156)$$

Так как $r + i \leq 2k$, то в квадратурной формуле Маркова (99) при $n = k$ и $f(x) = T_r^*(x) \cdot T_i^*(x)$ остаточный член обращается в нуль, т.е.

$$\int_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{2\pi}{2k+1} \sum_{j=0}^k{}' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j); \quad (157)$$

абсциссы $x_j, j = 0, 1, \dots, k$, определены по (129), (130). В силу (13), (14) левая часть (157), а следовательно, и правая часть (157) будут равны

$$\frac{2\pi}{2k+1} \sum_{j=0}^k{}' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq i, \\ \pi & \text{при} \quad r = i = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при} \quad r = i > 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k'} T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq i, \\ 2 & \text{при } r = i = 0, \\ 1 & \text{при } r = i > 0. \end{cases} \quad (158)$$

Рассмотрим

$$T_l^*(x_j) = T_l(2x_j - 1) = T_l\left(\cos \frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right) = \cos \frac{l(2j-1)\pi}{2k+1}.$$

Пусть $l = q(2k+1) \pm r$, где q и r – произвольные целые неотрицательные числа. Тогда

$$T_l^*(x_j) = \cos \frac{[q(2k+1) \pm r](2j-1)\pi}{2k+1} = \cos \left[q(2j-1)\pi \pm \frac{r(2j-1)\pi}{2k+1} \right].$$

Воспользуемся формулами приведения и получим

$$T_l^*(x_j) = \begin{cases} \cos \frac{r(2j-1)\pi}{2k+1}, & \text{если } q \text{ четное,} \\ -\cos \frac{r(2j-1)\pi}{2k+1}, & \text{если } q \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (159)$$

Косинус в правой части (159) равен $T_r^*(x_j)$. Таким образом, для произвольных целых неотрицательных чисел q и r справедливо равенство

$$T_{q(2k+1) \pm r}^*(x_j) = \begin{cases} T_r^*(x_j), & \text{если } q \text{ четное,} \\ -T_r^*(x_j), & \text{если } q \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (160)$$

Для каждого $l \geq 0$ существуют такие целые числа $q \geq 0$ и $0 \leq r < 2k+1$, что

$$l = q(2k+1) + r. \quad (161)$$

Если $0 \leq r \leq k$, то положим $l = q(2k+1) + r$. Если $k < r$, то преобразуем (161) следующим образом:

$$l = [q(2k+1) + (2k+1)] - (2k+1) + r = (q+1)(2k+1) - (2k+1-r).$$

Обозначим $r_1 = 2k+1-r$. Тогда $0 < r_1 \leq k$ и $l = (q+1)(2k+1) - r_1$. Таким образом, для каждого $l \geq 0$ существуют такие целые числа $\bar{q} \geq 0$ и $-k \leq \bar{r} \leq k$, что

$$l = \bar{q}(2k+1) + \bar{r}, \quad (162)$$

где

$$\bar{q} = \begin{cases} q, & \text{если } r \leq k, \\ q+1, & \text{если } r > k, \end{cases} \quad \bar{r} = \begin{cases} r, & \text{если } r \leq k, \\ -r_1 = -(2k+1-r), & \text{если } r > k. \end{cases} \quad (163)$$

Из (160) следует, что

$$T_l^*(x_j) = T_{\bar{q}(2k+1) + \bar{r}}^*(x_j) = \begin{cases} T_{|\bar{r}|}^*(x_j), & \text{если } \bar{q} \text{ четное,} \\ -T_{|\bar{r}|}^*(x_j), & \text{если } \bar{q} \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (164)$$

Вернемся теперь к формуле (155) для коэффициента Чебышёва $a_i^*[J_k]$. Ввиду (158) для фиксированного $0 < i \leq k$ внутренняя сумма в (155) отлична от нуля только при

$$l = i, \quad 2k+1-i, \quad 2k+1+i, \quad 2(2k+1)-i, \quad 2(2k+1)+i, \dots,$$

т.е. при

$$l = i, \quad 2k+1-i, \quad 2k+1+i, \quad 4k+2-i, \quad 4k+2+i, \dots$$

Из (155), (164), (158) вытекает, что

$$a_i^*[J_k] = a_i^*[f] - a_{2k+1-i}^*[f] - a_{2k+1+i}^*[f] + a_{4k+2-i}^*[f] + a_{4k+2+i}^*[f] - \dots \quad (165)$$

В частности, при $i = k$ внутренняя сумма в (155) отлична от нуля только при

$$l = k, \quad 2k + 1 - k, \quad 2k + 1 + k, \quad 2(2k + 1) - k, \quad 2(2k + 1) + k, \dots$$

и

$$a_k^*[J_k] = a_k^*[f] - a_{k+1}^*[f] - a_{3k+1}^*[f] + a_{3k+2}^*[f] + a_{5k+2}^*[f] - \dots \quad (166)$$

Ввиду (158) для $i = 0$ внутренняя сумма в правой части (155) отлична от нуля только при

$$l = 0, \quad 2k + 1, \quad 2(2k + 1), \quad 3(2k + 1), \quad 4(2k + 1), \dots$$

Из (155), (164), (158) получаем

$$a_0^*[J_k] = a_0^*[f] - 2a_{2k+1}^*[f] + 2a_{4k+2}^*[f] - 2a_{6k+3}^*[f] + 2a_{8k+4}^*[f] - \dots \quad (167)$$

На основании формул (165), (167) можно сделать вывод о том, что если последовательность $\{a_i^*[f]\}$ достаточно регулярно стремится к нулю, то коэффициент

$$a_i^*[J_k] \approx a_i^*[f]$$

и имеет наибольшую абсолютную погрешность при $i = k$; при $i = k - 1, k - 2, \dots, 2, 1$ эта погрешность меньше; наименьшую погрешность имеет коэффициент $a_0^*[J_k]$.

7. О погрешности приближения функции частичной суммой ряда Чебышёва. Оценим с помощью *неравенства Лебега* остаток $r_k(x, f)$ смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^k a_i^*[f] \cdot T_i^*(x) + r_k(x, f), \quad (168)$$

где

$$r_k(x, f) = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \quad (169)$$

Преобразуем частичную сумму смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$:

$$S_k(x, f) = \sum_{i=0}^k a_i^*[f] \cdot T_i^*(x) = \sum_{i=0}^k \frac{2}{\pi} \int_0^1 p(\gamma) f(\gamma) T_i^*(\gamma) d\gamma \cdot T_i^*(x) = \int_0^1 p(\gamma) f(\gamma) \left(\frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^k T_i^*(\gamma) T_i^*(x) \right) d\gamma;$$

здесь

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}}.$$

Обозначим

$$K_k(x, \gamma) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^k T_i^*(x) T_i^*(\gamma). \quad (170)$$

Тогда

$$S_k(x, f) = \int_0^1 p(\gamma) f(\gamma) K_k(x, \gamma) d\gamma. \quad (171)$$

Пусть $Q_k(x)$ — алгебраический многочлен наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$ степени не выше k . Преобразуем k -й остаток смещенного ряда Чебышёва:

$$r_k(x, f) = f(x) - S_k(x, f) = [f(x) - Q_k(x)] + [Q_k(x) - S_k(x, f)]. \quad (172)$$

Рассмотрим разность $f(x) - Q_k(x)$. Для любого $x \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$|f(x) - Q_k(x)| \leq E_k(f), \quad (173)$$

где $E_k(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ многочленом степени не выше k на сегменте $[0, 1]$, или погрешность наилучшего приближения степени k . Оценим сверху погрешность наилучшего приближения. Для этого воспользуемся так называемыми прямыми теоремами о наилучших приближениях непрерывных функций алгебраическими многочленами. Приведем (без доказательства) одну из таких теорем.

7.1. О порядке наилучшего равномерного приближения.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[a, b]$, то при $n > p$ справедливо неравенство

$$E_n(f) \leq \frac{c_p}{n^p} \omega\left(f^{(p)}, \frac{b-a}{2(n-p)}\right),$$

где

$$c_p = \frac{1}{p!2^p} 11^{p+1} p^p (b-a)^p. \quad (174)$$

Здесь $\omega(f^{(p)}, \delta)$ — модуль непрерывности p -й производной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ (доказательство теоремы см. в [7], гл. IX, § 6, теорема 9.10).

Из этой теоремы следует, что если функция $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ $p+1$ раз, причем $(p+1)$ -я производная удовлетворяет условию

$$|f^{(p+1)}(x)| \leq M_{p+1}$$

при $x \in [a, b]$, то

$$E_n(f) \leq \frac{c_p(b-a)M_{p+1}}{n^p 2(n-p)} \leq \frac{c_p(b-a)M_{p+1}}{2n^p} \cdot \frac{p+1}{n}. \quad (175)$$

Подставив в (175) значение константы c_p из (174), получаем оценку

$$E_n(f) \leq \frac{11^{p+1} p^p (p+1) M_{p+1}}{2^{p+1} p! n^{p+1}} (b-a)^{p+1}, \quad n > p. \quad (176)$$

(См. также теорему о порядке наилучшего равномерного приближения непрерывных функций, приведенную в гл. 4, § 5, стр. 363, 364 в [8].)

Еще одну оценку для погрешности наилучшего приближения можно получить, если обратиться к теории интерполирования.

Пусть $f(x)$ имеет на $[a, b]$ производную $(n+1)$ -ого порядка, причем

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}.$$

Напомним оценку погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если в качестве узлов интерполирования взять числа

$$x_i = \frac{1}{2}[(b-a)\xi_i + b + a], \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где ξ_i являются корнями многочлена Чебышёва $T_{n+1}(\xi)$ на $[-1, 1]$. Оценка для этого случая будет такая:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}, \quad x \in [a, b] \quad (177)$$

(см. гл. 2, § 3, п. 2, формула (4) в [8]). Но если неравенство (177) выполняется на всем отрезке $[a, b]$ для некоторого многочлена степени n , то оно тем более будет выполняться для многочлена наилучшего равномерного приближения степени n функции $f(x)$ на $[a, b]$. Таким образом, отсюда следует оценка сверху наилучшего равномерного приближения степени n на сегменте $[a, b]$, а именно:

$$E_n(f) \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \quad (178)$$

В качестве примера использования приведенных оценок рассмотрим решение задачи Коши (I), (II). Допустим, что правая часть $f(x, y, y')$ дифференциального уравнения (I) имеет в рассматриваемой области изменения аргументов x, y, y' непрерывные ограниченные частные производные по аргументам x, y, y' $(p + 1)$ -го порядка. Тогда функция $F(x) = f(x, y(x), y'(x))$ имеет непрерывную ограниченную производную порядка $p + 1$ на $[x_0, x_0 + X]$, т.е. выполняется условие

$$|F^{(p+1)}(x)| \leq M_{p+1}, \quad x \in [x_0, x_0 + X]. \tag{179}$$

Мы обсуждаем решение задачи Коши (I), (II) на сегменте $[x_0, x_0 + h]$, $h \leq X$. На этом сегменте правую часть уравнения (II), взятую на решении задачи, рассмотрим как функцию переменной α :

$$F(x) = F(x_0 + \alpha h) = \Phi(\alpha), \quad \alpha \in [0, 1].$$

$\Phi(\alpha)$ имеет на $[0, 1]$ непрерывную и ограниченную производную до $(p + 1)$ -го порядка включительно. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\Phi^{(p+1)}(\alpha) = h^{p+1} F^{(p+1)}(x)$$

и

$$|\Phi^{(p+1)}(\alpha)| \leq h^{p+1} M_{p+1}. \tag{180}$$

Применим оценку сверху (176) для наилучшего приближения к функции $\Phi(\alpha)$ на $[0, 1]$ для $n = k > p$:

$$E_k(\Phi) \leq \frac{11^{p+1} p^p (p + 1) M_{p+1}}{2^{p+1} p! k^{p+1}} h^{p+1}, \quad k > p. \tag{181}$$

Аналогично оценка (178), применимая к $\Phi(\alpha)$ для $n = k = p$, дает:

$$E_k(\Phi) \leq \frac{M_{k+1} h^{k+1}}{2^{2k+1} (k + 1)!}. \tag{182}$$

Очевидно, что применение оценок (176) и (178) к функции $\Phi(\alpha)$ на сегменте $[0, 1]$ равносильно их применению к функции $F(x)$ на сегменте $[x_0, x_0 + h]$.

Оценка (181) дает порядок стремления $E_k(F)$ к нулю при $k \rightarrow \infty$. Она же и оценка (182) показывают порядок наилучшего равномерного приближения $E_k(F)$ относительно длины h частичного отрезка $[x_0, x_0 + h]$ при $h \rightarrow 0$.

7.2. Оценки остаточного члена ряда Чебышёва. Рассмотрим вторую разность в (172), а именно: разность между многочленом $Q_k(x)$ наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ и k -й частичной суммой ее смещенного ряда Чебышёва. Заметим, что многочлен $Q_k(x)$ совпадает с k -й частичной суммой своего ряда Чебышёва. Из интегрального представления частичной суммы (171) следует, что

$$Q_k(x) - S_k(x, f) = \int_0^1 p(\gamma) [Q_k(\gamma) - f(\gamma)] K_k(x, \gamma) d\gamma.$$

Отсюда имеем неравенство

$$|Q_k(x) - S_k(x, f)| \leq E_k(f) \cdot \int_0^1 p(\gamma) |K_k(x, \gamma)| d\gamma. \tag{183}$$

Обозначим

$$L_k(x) = \int_0^1 p(\gamma) |K_k(x, \gamma)| d\gamma = \int_0^1 p(\gamma) \left| \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^k T_i^*(x) T_i^*(\gamma) \right| d\gamma. \tag{184}$$

Величина $L_k(x)$ называется *функцией Лебега порядка k* ортонормированной системы $\frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0^*(x)$,

$\sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n^*(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда неравенство (183) принимает вид

$$|Q_k(x) - S_k(x, f)| \leq E_k(f) L_k(x). \tag{185}$$

Из равенства (172) и неравенства (185) следует, что k -й остаток смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$ можно оценить сверху следующим образом:

$$|r_k(x, f)| \leq E_k(f)(1 + L_k(x)). \quad (186)$$

Неравенство (186) называется *неравенством Лебега*.

Преобразуем интеграл $L_k(x)$, применяя правило замены переменной. Положим

$$x = \cos^2 \frac{u}{2}, \quad \gamma = \cos^2 \frac{t}{2}.$$

Тогда, учитывая (18), (20),

$$T_i^*(x) = T_{2i}\left(\cos \frac{u}{2}\right) = \cos\left(2i \cdot \frac{u}{2}\right) = \cos iu, \quad T_i^*(\gamma) = \cos it.$$

Так как $p(\gamma) d\gamma = -dt$, то из (184) находим

$$L_k\left(\cos^2 \frac{u}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{i=0}^k \cos iu \cdot \cos it \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{i=0}^k (\cos i(t-u) + \cos i(t+u)) \right| dt. \quad (187)$$

Обозначим

$$D_k(v) = \sum_{i=0}^k \cos iv. \quad (188)$$

Вспомогательная функция $D_k(v)$ называется *ядром Дирихле*. Тогда

$$L_k\left(\cos^2 \frac{u}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |D_k(t-u) + D_k(t+u)| dt. \quad (189)$$

Найдем максимум функции Лебега. Из (189) имеем

$$L_k\left(\cos^2 \frac{u}{2}\right) \leq \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi |D_k(t-u)| dt + \int_0^\pi |D_k(t+u)| dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-u}^{\pi-u} |D_k(v)| dv + \int_u^{\pi+u} |D_k(v)| dv \right). \quad (190)$$

Поскольку $D_k(v)$ является четной и периодической с периодом 2π функцией, то интеграл от $|D_k(v)|$ по сегменту $[-u, 0]$ равен интегралу от этой функции по сегменту $[0, u]$, а интеграл по сегменту $[\pi, \pi+u]$ равен интегралу по сегменту $[\pi-u, \pi]$. Поэтому из (190) вытекает неравенство

$$L_k\left(\cos^2 \frac{u}{2}\right) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |D_k(v)| dv. \quad (191)$$

Положим в (189) $u = 0$; тогда

$$L_k(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |D_k(t)| dt.$$

Отсюда и из (191) следует соотношение для максимума функции Лебега

$$L_k = \max_{u \in [0, \pi]} L_k\left(\cos^2 \frac{u}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |D_k(v)| dv. \quad (192)$$

Максимум функции Лебега порядка k называется *постоянной Лебега порядка k* . Для интеграла (192) известна асимптотика (см., например, формулу (31) из §7 в [1])

$$L_k = \|L_k(x)\|_\infty = \frac{4}{\pi^2} \ln k + O(1), \quad k \rightarrow \infty. \quad (193)$$

Оценка (193) дает скорость возрастания постоянных Лебега для смещенных многочленов Чебышёва с ростом k .

Из неравенства Лебега (186) с учетом (193) имеем оценку

$$\|r_k(x, f)\|_\infty \leq c_1 \cdot \ln k \cdot E_k(f), \quad c_1 = \text{const.} \tag{194}$$

Обратимся теперь, в качестве примера использования оценки (194), к задаче Коши (I), (II) на сегменте $[x_0, x_0 + h]$. Правую часть уравнения (I), взятую на решении задачи и рассматриваемую как функция переменной α

$$F(x) = f(x, y(x), y'(x)) = F(x_0 + \alpha h) = \Phi(\alpha), \quad \alpha \in [0, 1], \tag{195}$$

аппроксимируем k -й частичной суммой смещенного ряда Чебышёва. Используя оценку наилучшего равномерного приближения (181), из (194) получаем неравенство для остаточного члена

$$r_k(\alpha, \Phi) = r_k(x_0 + \alpha h, F(x_0 + \alpha h)) = r_k(x, F)$$

ряда Чебышёва правой части уравнения (I)

$$\max_{\alpha \in [0, 1]} |r_k(\alpha, \Phi)| = \max_{x \in [x_0, x_0 + h]} |r_k(x, F)| \leq \frac{c_p M_{p+1} \ln k}{k^{p+1}} h^{p+1}, \quad k > p, \tag{196}$$

где c_p — постоянная, зависящая от p и не зависящая от k .

Из (196) видно, что если функция $F(x)$ достаточно гладкая, то $r_k(x, F)$ стремится к нулю очень быстро при $k \rightarrow \infty$. Используя оценку наилучшего равномерного приближения (182), из (194) имеем

$$\max_{\alpha \in [0, 1]} |r_k(\alpha, \Phi)| = \max_{x \in [x_0, x_0 + h]} |r_k(x, F)| \leq \frac{c_1 M_{k+1} \ln k}{2^{2k+1} (k+1)!} h^{k+1}. \tag{197}$$

Оценки (196), (197) показывают также порядок остаточного члена ряда Чебышёва функции $\Phi(\alpha) = F(x_0 + \alpha h)$ относительно длины частичного сегмента $[x_0, x_0 + h]$ при $h \rightarrow 0$.

7.3. Суммарная погрешность, складывающаяся из остаточного члена ряда Чебышёва и ошибок в приближенных значениях его коэффициентов. Выразим коэффициенты Чебышёва, входящие в частичную сумму ряда (168), по квадратурной формуле Маркова (117) с остаточным членом (118) при $n = k$. С учетом обозначений, принятых в (128), (152), имеем

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k'} (a_i^* [J_k] + R_i) T_i^*(x) + r_k(x, f) = J_k(x) + \sum_{i=0}^{k'} R_i T_i^*(x) + r_k(x, f), \tag{198}$$

где

$$J_k(x) = \sum_{i=0}^{k'} a_i^* [J_k] \cdot T_i^*(x), \tag{199}$$

$$R_i = R(f \cdot T_i^*) = \frac{1}{2^{4k}} \frac{(f \cdot T_i^*)^{(2k+1)}(\eta)}{(2k+1)!} = \frac{1}{2^{4k} (2k+1)!} \sum_{l=0}^i C_{2k+1}^l f^{(2k+1-l)}(\eta) \cdot T_i^{*(l)}(\eta). \tag{200}$$

Отсюда

$$f(x) - J_k(x) = \sum_{i=0}^{k'} R_i T_i^*(x) + r_k(x, f). \tag{201}$$

Поскольку многочлен $J_k(x)$, определяемый формулой (128) или, что то же самое, формулами (199) и (152), является одновременно интерполяционным полиномом для функции $f(x)$ с узлами интерполирования (129), (130), совпадающими с корнями многочлена $\frac{1}{\alpha_k} x \Pi_k(x)$ (α_k задается формулой (64) при $n = k$), то для оценки разности $f(x) - J_k(x)$ можно воспользоваться хорошо известным выражением остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа (см. гл. 2, § 3, п. 1, формула (1) в [8] или гл. II, § 3, формула (1) в [9]). В нашем случае эта формула примет вид:

$$f(x) - J_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \frac{x \Pi_k(x)}{\alpha_k} = \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{2^{2k+1}} \frac{f^{(k+1)}(\xi) x \Pi_k(x)}{(k+1)!}, \quad \xi \in [0, \max\{x, x_1\}]. \tag{202}$$

Обратимся снова, в качестве примера использования соотношений (201) и (202), к задаче Коши (I), (II) на сегменте $[x_0, x_0 + h]$. Будем рассматривать правую часть уравнения (I), взятую на решении задачи, как функцию $\Phi(\alpha)$ переменной α . Разложим $\Phi(\alpha)$ в смещенный ряд Чебышёва. Тогда формула (198) для функции $\Phi(\alpha)$ примет вид:

$$\Phi(\alpha) = J_k(\alpha) + \sum_{i=0}^k R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi). \quad (203)$$

Заметим, что, как следует из (200), при $h \rightarrow 0$ $R_i = O(h^{2k+1-i})$; в частности, $R_k = O(h^{k+1})$. Поэтому второе слагаемое в (203) имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \rightarrow 0$, т.е.

$$\left\| \sum_{i=0}^k R_i T_i^*(\alpha) \right\|_{\infty} = O(h^{k+1}). \quad (204)$$

Из (203) имеем

$$\|\Phi(\alpha) - J_k(\alpha)\| \leq \left\| \sum_{i=0}^k R_i T_i^*(\alpha) \right\| + \|r_k(\alpha, \Phi)\|.$$

Отсюда, а также из (197) и (204) следует оценка погрешности аппроксимации функции $\Phi(\alpha)$ (195) частичной суммой смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова, а именно:

$$\|\Phi(\alpha) - J_k(\alpha)\|_{\infty} = O(h^{k+1}), \quad h \rightarrow 0. \quad (205)$$

Выражение остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа (202), выписанного для функции $\Phi(\alpha) = F(x_0 + \alpha h)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, принимает вид

$$\Phi(\alpha) - J_k(\alpha) = \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{2^{2k+1}} \frac{h^{k+1} F^{(k+1)}(x_0 + \xi h) \alpha \Pi_k(\alpha)}{(k+1)!}. \quad (206)$$

Видно, что правые части в (205) и (206) имеют один и тот же порядок относительно длины h частичного сегмента $[x_0, x_0 + h]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III. М.: Наука, 1970.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Начальный курс. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
5. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
7. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
8. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
9. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию
27.06.2001