

УДК 517.968:519.612:004.272.43

## О РЕГУЛЯРНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ КОМПЛЕКСЕ

Е. Н. Акимова<sup>1</sup>, В. В. Васин<sup>1</sup>, Г. Я. Пересторонина<sup>1</sup>, Л. Ю. Тимерханова<sup>1</sup>,  
П. С. Мартышко<sup>2</sup>, Д. Е. Кокшаров<sup>2</sup>

Для обратной задачи гравиметрии о восстановлении переменной плотности в горизонтальном и криволинейном слое по реальным гравитационным данным, измеренным на земной поверхности, предложены и численно реализованы на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС-1000 прямые и итерационные методы решения. Проведен анализ эффективности и ускорения параллельных алгоритмов для различного числа процессоров. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00116). Статья подготовлена по материалам доклада авторов на международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии” (ПаВТ-2007; <http://agora.guru.ru/pavt>).

**Ключевые слова:** обратная задача гравиметрии, интегральные уравнения Фредгольма, итерационные методы, параллельные алгоритмы, многопроцессорные вычислительные системы, масштабируемость.

**1. Введение.** С практической точки зрения весьма интересна задача выделения источников гравитационного поля (областей аномальной плотности), локализованных в горизонтальном слое между заданными глубинами, и определения переменной плотности в этом слое. При этом возникают две самостоятельные проблемы. Первая из них связана с выделением из измеренного гравитационного поля аномального эффекта от исследуемого слоя. Выделенное аномальное поле служит правой частью интегрального уравнения первого рода относительно искомой плотности, которая подлежит определению (вторая проблема).

В работе предложена оригинальная вычислительная технология решения упомянутых проблем и дана ее реализация для реальных гравитационных данных. Заметим, что при исследовании каждой из двух проблем приходится иметь дело с интегральными уравнениями Фредгольма первого рода, которые относятся к классу существенно некорректных задач. Поэтому при разработке методов их решения привлекаются идеи итеративной регуляризации. В предлагаемом подходе к решению обратных задач применяются как классические схемы (типа метода сопряженных градиентов (МСГ) и метода простой итерации (МПИ)) в регуляризованных вариантах, так и оригинальные алгоритмы (парный монотонный процесс), разработанные авторским коллективом. Программная реализация алгоритмов осуществляется на многопроцессорном вычислительном комплексе Института математики и механики УрО РАН с использованием параллельных технологий.

**2. Постановка обратной задачи гравиметрии и выделение аномального поля.** Рассматривалась задача о нахождении переменной плотности по гравитационным данным, измеренным на площади  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  земной поверхности, в горизонтальном и криволинейном слое  $\Pi = \{(x, y, z) : H_1 \leq z \leq H_2\}$ . Здесь  $H_1, H_2$  — либо константы (горизонтальный слой), либо функции от  $x, y$  (криволинейный слой). Используется априорная информация об отсутствии аномалий плотности вне слоя с криволинейными границами  $H_1 = H_1(x, y)$  и  $H_2 = H_2(x, y)$  такими, что  $H_1 < H_2 \quad \forall(x, y)$ , и выполняется  $H_i(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow \pm\infty]{y \rightarrow \pm\infty} h_i = \text{const}$ . При этом предполагается, что распределение плотности  $\sigma = \sigma(x, y)$

внутри слоя не зависит от  $z$ . Тогда в декартовой системе координат (ось  $z$  направлена вниз) выражение

<sup>1</sup> Институт математики и механики УрО РАН, ул. С. Ковалевской, д. 16, 620219, г. Екатеринбург; e-mail: aen@imm.uran.ru

<sup>2</sup> Институт геофизики УрО РАН, ул. Амундсена, д. 100, 620016, г. Екатеринбург; e-mail: pmart@igeoph.mplik.ru

для гравитационного эффекта слоя имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta g(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{H_1(x', y')}^{H_2(x', y')} \frac{\sigma(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x', y') \left( \int_{H_1(x', y')}^{H_2(x', y')} \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) dz' \right) dx' dy'. \end{aligned}$$

Задача нахождения неизвестной плотности  $\sigma(x, y)$ , таким образом, сводится к решению линейного двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\begin{aligned} A\sigma \equiv f \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_1^2(x', y')]^{1/2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_2^2(x', y')]^{1/2}} \right\} \sigma(x', y') dx' dy' = \Delta g(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f$  — гравитационная постоянная,  $\Delta g(x, y)$  — гравитационный эффект, порождаемый источниками в горизонтальном или криволинейном слое.

После дискретизации уравнения на сетке, где задана функция  $\Delta g(x, y)$ , задача (1) сводится к системе линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей (горизонтальный слой), либо с несимметричной матрицей (криволинейный слой).

Для нахождения аномального разностного поля  $\Delta g(x, y)$  была использована методика, разработанная в [1]. Кратко опишем эту методику в предположении, что выше исследуемого слоя нет источников, вытянутых в горизонтальном направлении.

Как известно, при пересчете поля вверх на уровень  $z = -H$  влияние приповерхностных источников (до глубины  $H$ ) значительно ослабевает. Поэтому измеренное на земной поверхности поле  $U(x, y, z)|_{z=0}$  сначала продолжается вверх на уровень  $z = -H$ . Пересчет на высоту  $H$  реализуется по формуле Пуассона

$$U(x, y, H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} U(x', y', 0) dx' dy'. \quad (2)$$

Искажения, связанные с этой процедурой, наиболее значительны вблизи границы области  $D$  вследствие интегрирования не по бесконечной, а по конечной области  $D$ . Поэтому с целью уменьшения искажений из измеренного поля  $U(x, y, 0)$  предварительно (т.е. до пересчета поля вверх) вычитаются значения функции  $u(x, y)$ , которая является решением плоской задачи Дирихле для уравнения Лапласа  $\Delta u(x, y) = 0$ ,  $u(x, y)|_{\partial D} = \varphi(x, y)$ .

Здесь  $\varphi(x, y) = U(x, y, 0)$ , т.е. искомая функция принимает на границе области  $D$  те же значения, что и заданное гравитационное поле. Эта функция использовалась в работах [2, 3] при решении задачи о сглаживании измерений на площади. По нашему мнению, решение задачи Дирихле может использоваться в качестве поля боковых источников.

Приведем некоторую аргументацию в пользу такой трактовки. Гармоническая в области  $D$  функция  $u(x, y)$  минимизирует в ней функционал  $I(f) = \iint_D \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$ .

Требование минимума функционала соответствует геофизическим представлениям о плавном изменении регионального фона внутри области. Поскольку предполагается, что поле искомого объекта достаточно полно прослежено, остаточная аномалия на границе области  $D$  должна быть близка к нулю, что и достигается вычитанием из заданного поля решения задачи Дирихле. Кроме того, гармоническая в области  $D$  функция не имеет в ней экстремумов и, следовательно, не может стать причиной ложных аномалий.

Далее, чтобы окончательно избавиться от влияния источников в горизонтальном слое от дневной поверхности до глубины  $H$ , пересчитанное вверх поле  $\bar{U}(x, y, -H)$  затем продолжается вниз на глубину  $z = H$ . Для нахождения функции  $u(x, y)$ , описывающей это поле, необходимо решать интегральное уравнение

Фредгольма первого рода

$$Ku \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2H)^2]^{3/2}} u(x', y') dx' dy' = \bar{U}(x, y, -H). \quad (3)$$

Уравнение (3) относится к классу некорректно поставленных задач, поэтому при его решении привлекается регуляризация сдвигом  $(K + \alpha I)u = \bar{U}$  (схема Лаврентьева [4]).

Особенности найденной функции лежат глубже  $z = H$ . Выше этого уровня она является гармонической, поэтому ее можно трактовать как поле глубинных источников. Сумма этого поля, пересчитанного на земную поверхность, и решения задачи Дирихле используется как поле боковых и глубинных (т.е. сторонних) источников.

Разность исходных значений гравитационного поля  $U(x, y, 0)$  и упомянутой выше суммы принимается в качестве гравитационного эффекта от источников, лежащих в горизонтальном слое от земной поверхности до глубины  $z = H$ .

Теперь, чтобы выделить гравитационный эффект (т.е. функцию  $\Delta g$  в уравнении (1)) от источников в горизонтальном слое  $\Pi = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, H_1 \leq z \leq H_2\}$ , достаточно выполнить описанную выше процедуру для двух значений  $H = H_2, H = H_1, H_2 > H_1$  и взять разность двух полей. В случае криволинейного слоя полагается  $H_1 = \max H_1(x, y)$  и  $H_2 = \min H_2(x, y)$ .

Можно привести грубую оценку ослабления поля от источников, которое имеет место при пересчете поля вверх по формуле (2). Рассмотрим изменение максимума аномального поля от одиночного шара радиуса  $r$  с избыточной плотностью  $\Delta\sigma$ , центр которого залегает на глубине  $H/2$ . При пересчете поля на высоту  $\Delta H$  имеем  $k = f \frac{4\pi r^3 \Delta\sigma}{3(H/2)^2} / f \frac{4\pi r^3 \Delta\sigma}{3(H/2 + \Delta H)^2}$ , где  $f$  — гравитационная постоянная. Следовательно, при  $\Delta H = H$  ослабление составит  $k = 9$ , что довольно существенно.

**3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.** Так как уравнение (1) относится к классу некорректно поставленных задач, то система линейных алгебраических уравнений

$$Az = b, \quad (4)$$

возникающая в результате дискретизации интегрального уравнения, является плохо обусловленной. Поэтому для решения (4) привлекались как итеративно регуляризованные процессы, порождающие регулярные алгоритмы, так и прямые методы в регуляризованном варианте.

В разработанном нами комплексе программ для решения системы (4) с симметричной матрицей (случай горизонтального слоя) предусмотрены следующие алгоритмы.

1. Методы градиентного типа

$$z^{k+1} = z^k - \beta_k (A_\alpha z^k - b), \quad (5)$$

где  $A_\alpha = A + \alpha E$ ,  $\alpha$  — параметр регуляризации.

В симметричном случае  $\beta_k = \beta \leq \frac{1}{\lambda_{\max}(A_\alpha)}$  (метод простой итерации (МПИ)),  $\lambda_{\max}(A_\alpha)$  — максимальное собственное значение матрицы  $A_\alpha$ .

Константа  $\beta_k$  может выбираться по методу минимальных невязок (ММН)

$$\beta_k = \frac{\langle A_\alpha (A_\alpha z^k - b), A_\alpha z^k - b \rangle}{\|A_\alpha (A_\alpha z^k - b)\|^2}$$

либо по методу наискорейшего спуска (МНС)

$$\beta_k = \frac{\|A_\alpha z^k - b\|^2}{\langle A_\alpha (A_\alpha z^k - b), A_\alpha z^k - b \rangle},$$

либо по методу минимальных ошибок (ММО)

$$\beta_k = \frac{\|A_\alpha z^k - b\|^2}{\|A^T (A_\alpha z^k - b)\|^2} A^T,$$

когда вместо системы  $Az = b$  решается система  $A^T Az = A^T b$ .

## 2. Метод сопряженных градиентов (МСГ)

$$z^{k+1} = z^k - \gamma_k(A_\alpha z^k - b) + \beta_k(z^k - z^{k-1}), \quad (6)$$

где  $\gamma_k$  и  $\beta_k$  вычисляются по известным формулам [5].

3. Парный монотонный процесс [6]. Здесь строятся две итерационные последовательности

$$u^{k+1} = u^k - \beta_k[A(u^k) + \varepsilon_k u^k - b] + \delta_k(v^k - u^k), \quad v^{k+1} = v^k - \beta_k[A(v^k) + \varepsilon_k v^k - b] - \delta_k(v^k - u^k), \quad (7)$$

где  $\beta_k, \varepsilon_k, \delta_k$  — последовательности положительных параметров,  $u^0 \leq z \leq v^0$ .

Простой анализ показывает, что интегральный оператор  $A$  в задаче (1) обладает свойством монотонности в смысле естественного порядка, т.е.  $\sigma_1(x, y) \geq \sigma_2(x, y) \Rightarrow A\sigma_1(x, y) \geq A\sigma_2(x, y)$ .

Из результатов работы [6] вытекает, что при подходяще выбранных управляющих параметрах  $\beta_k, \varepsilon_k, \delta_k$  и начальных приближениях  $u^0 \leq z \leq v^0$  процесс (7) генерирует сходящиеся последовательности  $u^k$  и  $v^k$ , которые аппроксимируют снизу и сверху решение  $z$ . Таким образом,  $u^k$  и  $v^k$  образуют “вилку” для искомого решения, что позволяет судить о качестве получаемых приближенных решений.

Условием останова итерационных процессов является  $\frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} < \varepsilon$ .

4. Прямые методы решения системы (4) были представлены методом квадратного корня (МКК) в регуляризованном варианте [5].

Заметим, что в случае криволинейного слоя матрица системы (4) несимметрична, поэтому во всех методах, кроме (7), эта система предварительно преобразуется к виду  $A^T A z = A^T b$ .

В парном процессе (7) необходимости в таком переходе нет, что выгодно отличает этот метод от других алгоритмов.

Кроме того, при решении некоторых вариантов привлекался метод Зейделя для регуляризованной сдвигом системы (4), т.е. без перехода от матрицы  $A$  к  $A^T A$ .

**4. Численная реализация и полученные результаты.** Численная реализация и распараллеливание алгоритмов для решения задачи (4) были выполнены на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС-1000 — российском массивно-параллельном суперкомпьютере третьего поколения [7].

Технические характеристики многопроцессорных вычислительных систем МВС-1000/16 и МВС-1000/32 производства НИИ “Квант” следующие. Основная часть МВС-1000/16 состоит из 16 процессоров Intel Pentium III-800, 256 Мбайт памяти, 10 Гбайт диска, двух 100 Мбит сетевых плат (Digital DS21143 Tulip и Intel PRO/100). Учебный вычислительный кластер состоит из 8 Intel Pentium III-700, 128 Мбайт памяти, 14 Гбайт диска, 100 Мбит сетевой платы 3Com 3с905В Cyclone. МВС-1000/32 состоит из 16 двухпроцессорных модулей Хеон 2.4 ГГц, 4 Гбайт оперативной памяти в каждом модуле, 40 Гбайт жесткого диска, сетевых интерфейсов Fast Ethernet и Gigabit Ethernet.

Комплекс численных алгоритмов реализован с помощью библиотеки MPI на языке Фортран. Распараллеливание итерационных методов градиентного типа и МСГ основано на разбиении матрицы  $A$  горизонтальными полосами на  $m$  блоков, а вектора решения  $z$  и вектора правой части  $b$  системы на  $m$  частей так, что  $n = mL$ , где  $n$  — размерность системы уравнений,  $m$  — число процессоров,  $L$  — число строк матрицы в блоке (рис. 1).

На каждой итерации каждый из  $m$  процессоров вычисляет свою часть вектора решения. В случае умножения матрицы  $A$  на вектор  $z$  каждый из  $m$  процессоров умножает свою часть строк матрицы  $A$  на вектор  $z$ . В случае матричного умножения  $A^T A$  каждый из  $m$  процессоров умножает свою часть строк транспонированной матрицы  $A^T$  на всю матрицу  $A$ . Host-процессор отвечает за пересылки данных и вычисляет свою часть вектора решения.

Распараллеливание метода квадратного корня предложено в работе [8]. Матрица  $A$  разбивается вертикальными линиями на  $m$  блоков (рис. 2). Диагональные элементы треугольной матрицы  $S$  ( $A = S^T S$ ) вычисляются на одном процессоре и рассылаются каждому процессору. Затем каждый из  $m$  процессоров

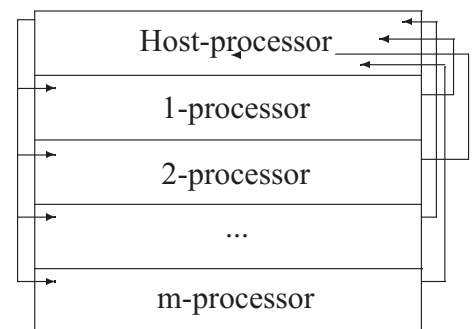


Рис. 1. Схема распределения данных по процессорам для итерационных методов

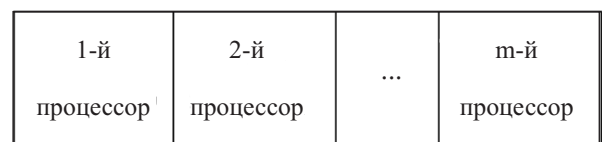


Рис. 2. Схема распределения данных по процессорам для МКК

вычисляет свою часть недиагональных элементов матрицы  $S$ . Обратный ход метода квадратного корня (нахождение решения линейной системы) по рекуррентным формулам также выполняется на одном процессоре.

В случае горизонтального слоя исследуемые области  $D_1$  и  $D_2$ , на которых были измерены реальные значения гравитационного поля  $\Delta g(x, y)$ , были такими:

$$D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 15\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : 587 \leq x \leq 598.5; 471 \leq y \leq 482.5\}.$$

Эти области имели размеры соответственно  $15 \times 15$  (км<sup>2</sup>) (шаг сетки  $\Delta x = \Delta y = 0.15$  (км)) и  $11.5 \times 11.5$  (км<sup>2</sup>) (шаг сетки  $\Delta x \approx \Delta y \approx 0.23$  (км)) при  $H_1 = 0.5$  (км),  $H_2 = 1.5$  (км). В случае криволинейного слоя исследуемая область  $D_3 = \{(x, y) : 13 \leq x \leq 40; 50 \leq y \leq 77\}$ , на которой были измерены реальные значения гравитационного поля  $\Delta g(x, y)$ , имела размеры  $27 \times 27$  (км<sup>2</sup>) (шаг сетки  $\Delta x \approx \Delta y \approx 0.55$  (км)) при  $2.5$  (км)  $\leq H_1(x, y) \leq 3.0$  (км) и  $3.0$  (км)  $\leq H_2(x, y) \leq 3.5$  (км).

После дискретизации исходного уравнения на сетке, где задана функция  $\Delta g(x, y)$ , и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам задача (1) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (4) либо с симметричной матрицей порядка  $10^4 \times 10^4$  в случае области  $D_1$ , либо с матрицей  $2500 \times 2500$  в случае области  $D_2$ , либо с несимметричной матрицей  $2500 \times 2500$  в случае области  $D_3$ .

Для всех трех вариантов было вычислено число обусловленности  $\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ , где  $\lambda_{\max}$  и  $\lambda_{\min}$  — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы  $A$  соответственно.

Для вычисления  $\lambda_{\max}$  и  $\lambda_{\min}$  были реализованы

1) степенной метод:  $Y_k = AX_{k-1}$ ,  $X_k = \frac{Y_k}{\|Y_k\|}$ ,  $\lambda_{\max} \approx \|AX_k\|$  и

2) метод обратной итерации [9]:  $AY_k = X_{k-1}$ ,  $X_k = \frac{Y_k}{\|Y_k\|}$ ,  $\lambda_{\min} \approx \|A^{-1}X_k\|^{-1}$ .

Это позволяет использовать параллельные алгоритмы, описанные выше для решения систем линейных алгебраических уравнений.

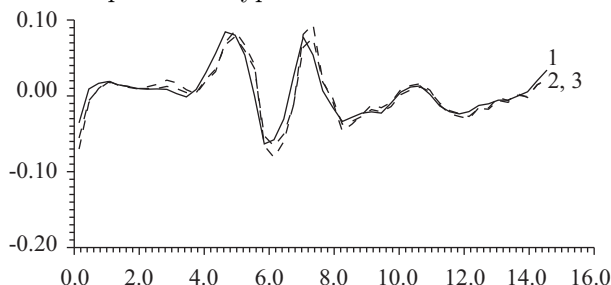


Рис. 3. Профили плотности для области  $D_1$  ( $y = 3.45$  км): 1 — метод Зейделя, 2 — МСГ, 3 — МПИ

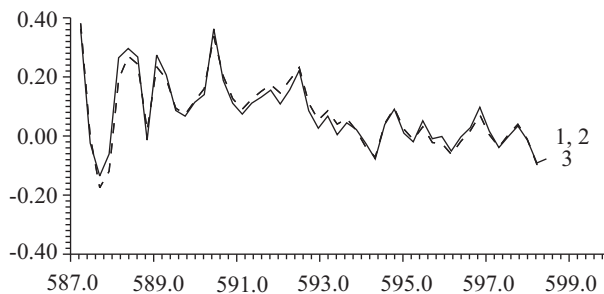


Рис. 4. Профили плотности для области  $D_2$  ( $y = 476.8$  км): 1 — МСГ, 2 — МПИ, 3 — монотонный процесс

Для области  $D_1$  число обусловленности составило  $\text{cond}_1 \approx 5554$ , для области  $D_2$  число  $\text{cond}_2 \approx 249$ , для области  $D_3$  число  $\text{cond}_3 \approx 5172$ .

При восстановлении плотности  $\sigma(x, y)$  были использованы следующие данные: гравитационная постоянная  $f = 6.67 \cdot 10^{-8}$  (см<sup>3</sup>/г · с<sup>2</sup>), параметр регуляризации  $\alpha_k = 0.05$  для области  $D_1$ ,  $\alpha_k = 0.5$  для области  $D_2$ ,  $\alpha_k = 0.01$  для области  $D_3$ .

На рис. 3–5 изображены типичные профили плотности для областей  $D_1, D_2, D_3$ . На рис. 3 график 1 получен в результате решения задачи регуляризованным методом типа Зейделя, графики 2 и 3 получены в результате решения задачи параллельными методами МСГ и МПИ в регуляризованном варианте. На рис. 4 графики 1 и 2 получены параллельными методами

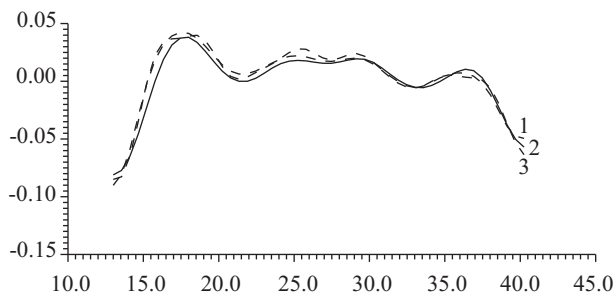


Рис. 5. Профили плотности для области  $D_3$  ( $y = 62.8$  км): 1 — метод Зейделя, 2 — МСГ, 3 — МПИ

МСГ и МПИ, график 3 получен с помощью монотонного процесса. На рис. 5 график 1 получен в результате решения задачи регуляризованным методом типа Зейделя, график 2 получен параллельным методом МСГ (число итераций 200), график 3 получен параллельным методом МПИ (число итераций равно 500).

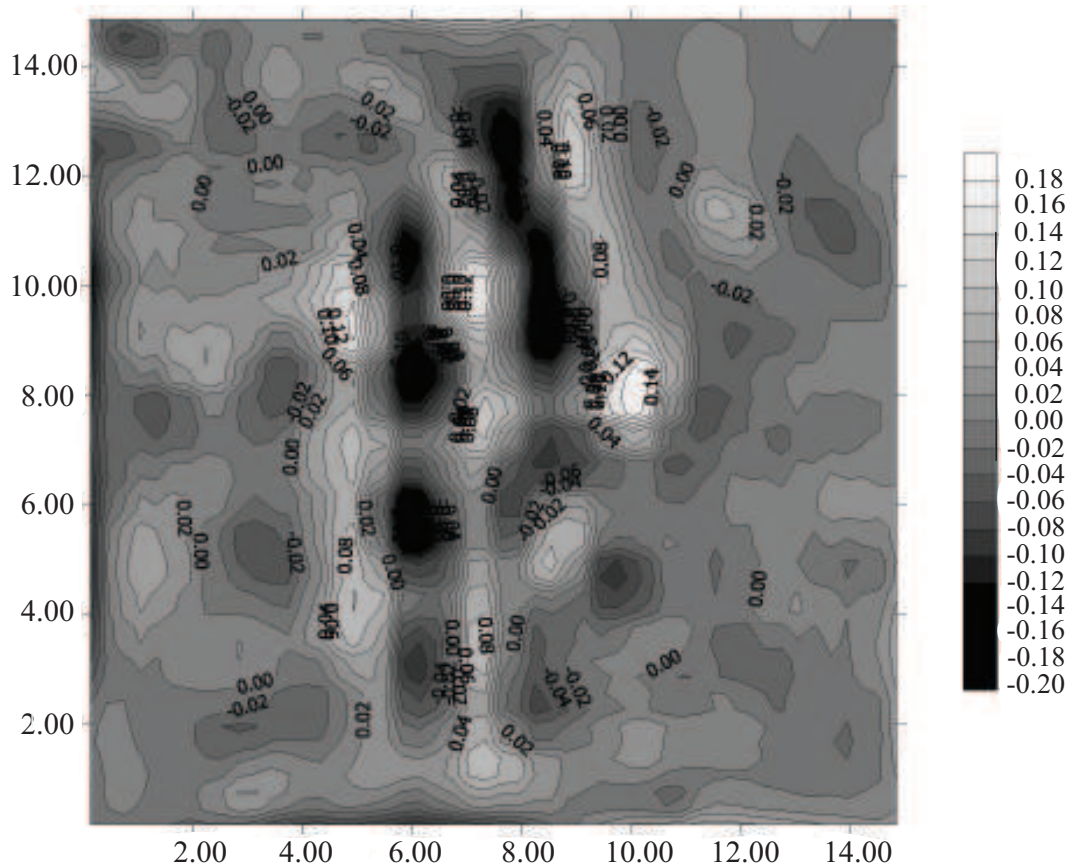


Рис. 6. Линии уровня плотности для области  $D_1$  (горизонтальный слой)

На рис. 6–8 для областей  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  изображены линии уровня плотности, восстановленной по разностному полю. Более темные участки (пониженной плотности) соответствуют зонам разуплотнения, представляющим интерес для геофизической интерпретации.

Таблица 1

Метод сопряженных градиентов,  
число итераций равно 200

$m$	$T_m, \text{min}$	$S_m$	$E_m$
1	20.23	—	—
2	10.05	2.00	1.00
4	5.12	3.95	0.99
5	4.32	4.68	0.95
8	3.13	6.46	0.81
10	2.68	7.55	0.75

Таблица 2

Метод простой итерации,  
число итераций равно 1000

$m$	$T_m, \text{min}$	$S_m$	$E_m$
1	31.83	—	—
2	16.64	1.91	0.96
4	8.36	3.81	0.95
8	4.93	6.46	0.81
10	4.43	7.19	0.72
16	4.01	7.94	0.50
20	3.72	8.56	0.43



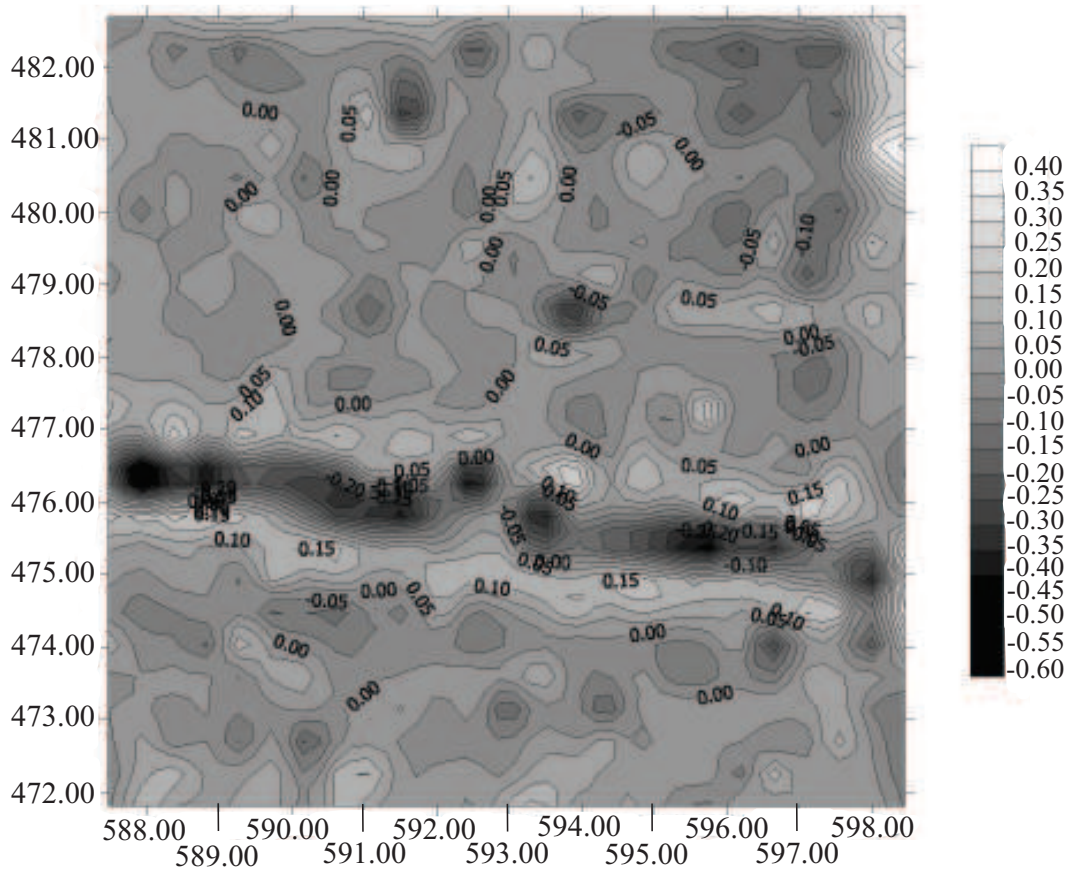


Рис. 7. Линии уровня плотности для области  $D_2$  (горизонтальный слой)

**5. Об эффективности и ускорении алгоритмов.** Для методов МСГ и МПИ проведено сравнение коэффициентов ускорения и эффективности последовательных и параллельных алгоритмов. Рассмотрим коэффициенты ускорения и эффективности  $S_m = T_1/T_m$ ,  $E_m = S_m/m$ , где  $T_m$  — время выполнения параллельного алгоритма на МВС-1000 с числом процессоров  $m$  ( $m > 1$ ),  $T_1$  — время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре. Время  $T_m$  представляет собой совокупность чистого времени счета и накладных расходов на межпроцессорные обмены:  $T_m = T_c + T_o$ . Число процессоров  $m$  соответствует упомянутому разбиению векторов на  $m$  частей.

В общем случае эффективность распараллеливания меняется в пределах  $0 < E_m < 1$ . В идеальном случае при равномерной и сбалансированной загрузке процессоров и минимальном времени обменов между ними эффективность  $E_m$  близка к единице, но при решении практических задач она уменьшается за счет накладных расходов.

В табл. 1 приведены время счета и коэффициенты ускорения и эффективности решения задачи гравиметрии на МВС-1000/16 в горизонтальном слое для области  $D_1$  с использованием параллельного и последовательного МСГ для  $1000 \times 1000$  точек сетки (матрица  $10^3 \times 10^3$ ).

В табл. 2 приведены время счета и коэффициенты ускорения и эффективности решения задачи гравиметрии на МВС-1000/16 с использованием параллельного и последовательного МПИ для  $1000 \times 1000$  точек сетки.

Оба метода (МСГ и МПИ) имеют высокую эффективность распараллеливания  $E_m$ , причем для МСГ эффективность распараллеливания выше. Для обоих методов при числе процессоров  $m \leq 5$  коэффициент эффективности  $E_m \geq 0.95$ , а в случае МСГ для числа процессоров  $m \leq 4$  коэффициент эффективности близок к единице. Это свидетельствует о равномерной и сбалансированной загрузке процессоров, а также об относительно небольшом времени обменов между ними.

Результаты вычислений показывают, что итерационные методы градиентного типа имеют достаточно высокую эффективность распараллеливания. Заметим, что метод квадратного корня по сравнению с итерационными методами характеризуется существенным выигрышем по времени счета при высокой эффективности распараллеливания.

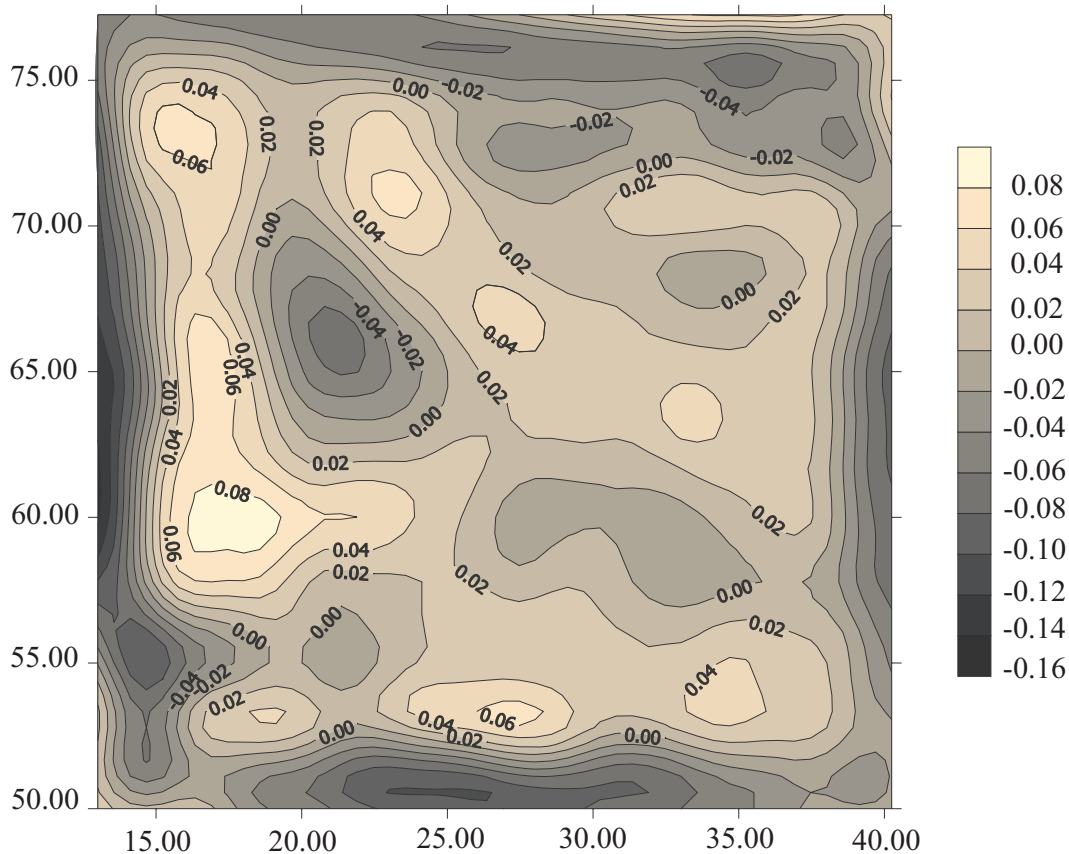


Рис. 8. Линии уровня плотности для области  $D_3$  (криволинейный слой)

**6. Нелинейные обратные задачи геофизики.** Прямые и итерационные методы решения линейной обратной задачи гравиметрии, разработанные в отделе некорректных задач Института математики и механики УрО РАН, использовались при решении нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000.

**6.1. Структурная обратная задача гравиметрии.** Трехмерная структурная обратная задача гравиметрии формулируется как задача нахождения поверхности раздела сред (геологической границы) по известному скачку плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности. В предположении, что нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной плотности, функция  $z = z(x, y)$ , описывающая искомую поверхность раздела, удовлетворяет нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$A[z] \equiv f \Delta \sigma \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x', y')]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}} \right\} dx' dy' = F(x, y), \quad (8)$$

где  $f$  — гравитационная постоянная,  $\Delta \sigma$  — скачок плотности на границе раздела сред,  $F(x, y)$  — аномальное гравитационное поле,  $z = H$  — асимптотическая плоскость для данной геологической границы.

**6.2. Структурная обратная задача магнитометрии.** Трехмерная структурная обратная задача магнитометрии формулируется как задача по восстановлению разделяющей поверхности сред на основе данных о магнитном поле, измеренном на некоторой площади земной поверхности, и о скачке вектора



намагниченности. Задача нахождения поверхности раздела сводится к решению нелинейного уравнения

$$B[z] \equiv \Delta J \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{z(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2(x', y')]^{3/2}} - \frac{H}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + H^2]^{3/2}} \right\} dx' dy' = G(x, y), \tag{9}$$

где  $\Delta J$  — скачок вертикальной компоненты вектора намагниченности,  $G(x, y)$  — аномальное магнитное поле, обусловленное отклонением искомой поверхности от асимптотической плоскости  $z = -H$ .

После дискретизации исходных уравнений на сетке, где заданы правые части, и аппроксимации интегральных операторов по квадратурным формулам задачи (8), (9) сводятся к решению систем нелинейных уравнений.

Для решения нелинейных уравнений реализованы:

- парный монотонный процесс (7);
- метод Левенберга–Марквардта

$$z^{k+1} = z^k - [A'_n(z^k)^T A'_n(z^k) + \alpha_k I]^{-1} [(A'_n(z^k))^T (A_n(z^k) - F_n)]; \tag{10}$$

— итеративно регуляризованный метод Ньютона

$$z^{k+1} = z^k - [A'_n(z^k) + \alpha_k I]^{-1} (A_n(z^k) + \alpha_k z^k - F_n). \tag{11}$$

Здесь  $A_n(F_n)$  — конечномерная аппроксимация интегральных операторов (правой части) в уравнениях (8) и (9),  $A'_n$  — матрица производных. Для нахождения очередного приближения  $z^{k+1}$  в процессах (10), (11), т.е. решения системы  $D_k z^{k+1} = d_k$ , привлекаются прямые и итерационные методы, описанные выше (см. подробности в [10, 11]).

**7. Организация удаленного взаимодействия с МВС-1000.** Комплекс параллельных алгоритмов для решения линейной обратной задачи гравиметрии размещен на специализированном Web-сервере, установленном в Институте математики и механики УрО РАН.

Данный Web-сервер [12] разработан в отделе некорректных задач совместно с кафедрой вычислительных методов и уравнений математической физики УГТУ–УПИ и предназначен для запуска параллельных программ на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС-1000/32 через Web-интерфейс. Сервер дает возможность пользователю через Web-интерфейс выбирать определенный тип задачи и метод ее решения, загружать входные данные, указывать число процессоров, на которых будет решаться задача, получать выходные данные после ее решения. Для каждой задачи считается время счета, что позволяет пользователю определять эффективность и ускорение.

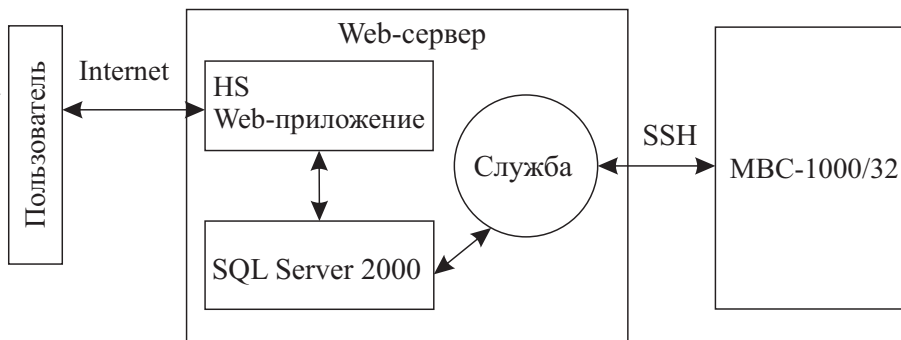


Рис. 9. Архитектура Web-сервера

Web-сервер (рис. 9) состоит из трех основных частей: Web-сервер IIS (Internet Information Services — информационные службы Интернета), на котором установлено Web-приложение, база данных SQL Server 2000, в которой хранятся все задачи пользователей с входными и выходными данными, и служба, выполняющая загрузку данных, запуск задач на МВС-1000/32, просмотр состояния задачи и запись результатов завершившихся задач на Web-сервер. Для создания изображений решений задач используется графический пакет Surfer. После копирования выходных данных на Web-сервер запускается скрипт, в котором указывается путь к данным, и происходит автоматическое построение решения.

**8. Заключение.** Для решения некорректной обратной задачи гравиметрии о восстановлении переменной плотности по гравитационному полю предложены и численно реализованы на многопроцессорном

вычислительном комплексе МВС-1000 регулярные прямые и итерационные параллельные алгоритмы с высокой эффективностью распараллеливания.

Все методы при подходящем выборе параметров регуляризации дают близкие результаты решения, что говорит о хорошем качестве решения.

Описана методика решения нелинейных структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартышко П.С., Пруткин И.Л.* Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. **25**, № 3. 159–168.
2. *Страхов В.Н., Иванов С.Н.* Метод аналитического продолжения трехмерных потенциальных полей // Теория и практика геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Т. 2. Алма-Ата, 1984. 68–70.
3. *Пруткин И.Л.* О предварительной обработке измерений, заданных на площади // Методы интерпретации и моделирования геофизических полей. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. 11–15.
4. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
5. *Фаддеев В.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1963.
6. *Васин В.В.* Итерационная регуляризация монотонных операторных уравнений первого рода в полуупорядоченных В-пространствах // ДАН. 1995. **341**, № 2. 151–154.
7. *Baranov A. V., Latsis A. O., Sazhin C. V., Khramtsov M. Yu.* The MVS-1000 System User's Guide. <http://parallel.ru/mvs/user.html>
8. *Акимова Е.Н., Белоусов Д.В.* Решение обратной задачи гравиметрии с помощью параллельного алгоритма квадратного корня // Вестник УГТУ-УПИ. № 17(69). Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 230–239.
9. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир, 1983.
10. *Akitova E. N., Vasin V. V.* Stable parallel algorithms for solving the inverse gravimetry and magnetometry problems // International Journal Engineering Modelling. University of Split, Croatia, 2004. **17**, N 1–2. 13–19.
11. *Васин В.В., Пересторонина Г.Я., Пруткин И.Л., Тиммерханова Л.Ю.* Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды // Матем. моделирование. 2003. **15**, № 2. 69–76.
12. *Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В., Клименков А.В.* Организация удаленного взаимодействия между МВС-1000 и пользователем при решении обратной задачи гравиметрии // Вестник УГТУ-УПИ. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006 (в печати).

Поступила в редакцию  
21.03.2007

---