УДК 519.626

ОБ УТОЧНЕНИИ ПОРОГОВОГО МОМЕНТА В ЗАДАЧАХ С ДВУСТОРОННИМИ УПРАВЛЕНИЯМИ И НАБЛЮДЕНИЯМИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М. М. Потапов[1]

Для волнового уравнения с переменными коэффициентами рассмотрены задачи с двусторонними граничными управлениями типа Дирихле и Неймана в классах сильных обобщенных решений, а также двойственные к ним задачи наблюдения в сопряженных классах слабых обобщенных решений. Полученные результаты имеют вид конструктивных оценок с явно указанными значениями входящих в них параметров и могут быть применены для построения устойчивых приближенных решений. Значение важнейшего из параметров, а именно порогового момента управляемости–наблюдаемости, приближено к известному оптимальному уровню и совпадает с ним на классе задач с постоянными коэффициентами. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07–01–00416) и программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект РНП 2.1.1.1714).

Ключевые слова: волновое уравнение, управляемость, наблюдаемость, двойственность, конечномерная аппроксимация.

1. Введение. В работе рассматриваются те же, что и в [1, 2], взаимодвойственные задачи с двусторонними управлениями и наблюдениями в краевых условиях первого и второго рода для волнового уравнения с переменными коэффициентами

$$\rho(x)y_{tt} = \big(k(x)y_x\big)_x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l. \tag{1}$$

Задачи управления ставятся в таких функциональных классах, которым соответствуют сильные обобщенные решения начально-краевых задач, принадлежащие пространству $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, введенному в работах В. А. Ильина [3, 4]. Если их записать в операторном виде $Au = f$ [5], где $A : H \to F$, то двойственным задачам наблюдения будут соответствовать сопряженные уравнения $A^*v = g$ с операторами $A^* : F^* \to H^*$, действующими в пространствах, сопряженных к исходным, а решения соответствующих начально-краевых задач окажутся слабыми обобщенными решениями, имеющими нерегулярные производные.

Помимо выбора способа конечномерной аппроксимации для применения к таким задачам устойчивого численного метода из [6] обычно требуется наличие свойства корректной разрешимости сопряженного уравнения

$$\big\|A^*v\big\|^2_{H^*} \geqslant \mu\|v\|^2_{F^*} \quad \forall v \in F^* \quad (\mu = \mathrm{const} > 0), \tag{2}$$

причем с *известным* значением постоянной $\mu > 0$, поскольку оно явно используется в вычислительной процедуре [6]. Для волнового уравнения (1) с граничными управлениями и наблюдениями типичной структурой множителя μ является

$$\mu = \mu_0(T - T_*), \quad \mu_0 = \mathrm{const} > 0\,, \tag{3}$$

где $T_* > 0$ — некоторый пороговый момент, начиная с которого, т.е. при $T > T_*$, оценка (2) становится содержательной, а у рассматриваемых динамических систем появляются свойства управляемости и наблюдаемости. Для уравнения (1) с переменными коэффициентами и двусторонними управлениями (наблюдениями) неулучшаемым значением порогового момента управляемости (наблюдаемости) является

$$T_{2*} = \int\limits_0^l \sqrt{\rho(x)/k(x)}\,dx\,. \tag{4}$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; e-mail: MPotapov@tochka.ru

Известные методы доказательства оптимальности момента (4) устанавливают сам факт наличия оценки (2), но из-за недостаточной конструктивности не позволяют определять в (3) соответствующие значения множителя μ_0, важные с вычислительной точки зрения [6]. При выводе конструктивных оценок вида (2) с *явными* выражениями для μ типа (3) обычно вместо оптимального T_{2*} приходится довольствоваться некоторыми его приближениями T_2. Желательно, чтобы эти приближения были негрубыми в смысле совпадения $T_2 = T_{2*} = l$ с оптимальными из (4) в случае постоянных коэффициентов $\rho(x) \equiv 1,\ k(x) \equiv 1$.

В классах Лионса [7], когда обобщенные решения задачи управления являются слабыми, а обобщенные решения двойственных задач наблюдения являются сильными, оценки типа (2) с явными выражениями для μ вида $\mu = \mu_0\,(T - T_2)$ и негрубыми пороговыми моментами T_2 были получены в [8] для задач Дирихле, а в [9] — для задач с краевыми условиями второго и третьего рода. В классах сопряженной гладкости В. А. Ильина [3, 4], в которых сильными являются обобщенные решения задач управления, а слабыми — обобщенные решения двойственных задач наблюдения, при выводе конструктивных оценок снизу вида (2) возникают дополнительные трудности, вызванные недостаточной гладкостью решений. В случае двусторонних Дирихле-управлений в [1] и двусторонних Нейман-управлений в [2] эти трудности не были до конца преодолены, в частности, найденные в [1, 2] пороговые моменты в случае постоянных коэффициентов $\rho(x) \equiv 1$, $k(x) \equiv 1$ в $\sqrt{2}$ раз превосходили известный оптимальный уровень $T_{2*} = l$.

В настоящей работе показано, как с помощью более совершенной техники без потери конструктивности оценок (2), (3) можно вывести содержащиеся в них значения пороговых моментов T_2 управляемости–наблюдаемости для краевых задач Дирихле и Неймана в классах В. А. Ильина на негрубый уровень T_2, совпадающий в случае постоянных коэффициентов $\rho(x) \equiv 1$, $k(x) \equiv 1$ с оптимальным из (4): $T_2 = T_{2*} = l$.

2. Задачи с двусторонними Дирихле-управлениями и Нейман-наблюдениями. В задаче граничного Дирихле-управления динамика процесса описывается начально-краевой задачей

$$\begin{aligned} &\rho(x)y_{tt} = \big(k(x)y_x\big)_x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \\ &y\big|_{x=0} = u_0(t), \quad y\big|_{x=l} = u_1(t), \quad 0 < t < T, \quad y\big|_{t=0} = 0, \quad y_t\big|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l. \end{aligned} \tag{5}$$

Задача ставится в тех же функциональных классах, что и в [1], т.е. требуется найти пару управлений $u = \big(u_0(t), u_1(t)\big) \in H^1(\overset{\circ}{0}, T) \times H^1(\overset{\circ}{0}, T) = H$, переводящих траекторию $y = y(t,x)$ системы (5) из нулевого начального состояния в заданное конечное состояние $f = \big(f^0(x), f^1(x)\big) \in H^1(0,l) \times L^2_\rho(0,l) = F$ в заданный момент времени $t = T$:

$$y\big|_{t=T} = f^0(x), \quad y_t\big|_{t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l. \tag{6}$$

Следуя [5], запишем задачу управления (5), (6) в форме уравнения $Au = f$, где

$$Au = \big(y(T,x), y_t(T,x)\big), \quad 0 < x < l. \tag{7}$$

Двойственной по отношению к (5), (6) задачей наблюдения является задача восстановления конечного (при $t = T$) состояния $v = \big(v^0(x), v^1(x)\big) \in F^* = L^2_\rho(0,l) \times \big(H^1(0,l)\big)^*$ системы

$$\begin{aligned} &\rho(x)p_{tt} = \big(k(x)p_x\big)_x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \\ &p\big|_{x=0} = 0, \quad p\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \quad p\big|_{t=T} = v^0(x), \quad p_t\big|_{t=T} = -v^1(x), \quad 0 < x < l, \end{aligned} \tag{8}$$

по известным граничным Нейман-наблюдениям $g = \big(g_0(t), g_1(t)\big) \in \big(H^1(\overset{\circ}{0}, T)\big)^* \times \big(H^1(\overset{\circ}{0}, T)\big)^*$:

$$kp_x\big|_{x=0} = g_0(t), \quad -kp_x\big|_{x=l} = g_1(t), \quad 0 < t < T. \tag{9}$$

Двойственной задаче (8), (9) соответствует сопряженное операторное уравнение $A^*v = g$, где

$$A^*v = \big(k(0)p_x(t,0), -k(l)p_x(t,l)\big), \quad 0 < t < T. \tag{10}$$

Главной целью является получение для слабого обобщенного решения $p = p(t,x)$ краевой задачи (8) оценки снизу вида (2), (3):

$$\big\|k(0)p_x(\cdot,0)\big\|^2_{(H^1(\overset{\circ}{0},T))^*} + \big\|k(l)p_x(\cdot,l)\big\|^2_{(H^1(\overset{\circ}{0},T))^*} \geqslant \mu_0(T - T_2)\Big(\big\|v^0\big\|^2_{L^2_\rho(0,l)} + \big\|v^1\big\|^2_{(H^1(0,l))^*}\Big) \tag{11}$$

с более точным по сравнению с [1] значением порогового момента T_2. При выводе оценки (11), как и в [1], пространство $H^1(0,l)$ раскладывается в сумму двух гильбертовых пространств

$$H^1(0,l) = H^1(\overset{\circ}{0}, l) + H^1(0, \overset{\circ}{l}\,), \tag{12}$$

где $H^1(\overset{\circ}{0},l) = \{f(x) \in H^1(0,l) \,|\, f(0) = 0\}$ и $H^1(0,\overset{\circ}{l}\,) = \{f(x) \in H^1(0,l) \,|\, f(l) = 0\}$, с одинаковыми скалярными произведениями

$$\langle f,g\rangle_{H^1(\overset{\circ}{0},l)} = \langle f,g\rangle_{H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)} = \int\limits_0^l k(x)f'(x)g'(x)\,dx\,. \tag{13}$$

Тогда справедливо отношение двойственности [10]: $\big(H^1(\overset{\circ}{0},l) + H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)\big)^* = \big(H^1(\overset{\circ}{0},l)\big)^* \cap \big(H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)\big)^*$, в котором подразумевается как поэлементное совпадение, так и равенство соответствующих скалярных произведений и норм, в частности (см. в [1]),

$$\left\|v^1\right\|^2_{(H^1(0,l))^*} = \left\|v^1\right\|^2_{(H^1(\overset{\circ}{0},l))^*\cap(H^1(0,\overset{\circ}{l}\,))^*} = \frac{1}{2}\left\|v^1\right\|^2_{(H^1(\overset{\circ}{0},l))^*} + \frac{1}{2}\left\|v^1\right\|^2_{(H^1(0,\overset{\circ}{l}\,))^*}. \tag{14}$$

Произведем сглаживание решения $p(t,x)$ сопряженной задачи (8) двумя способами, соответствующими разложению (12):

$$q(t,x) = -\int\limits_t^T p(s,x)\,ds + z(x)\,, \quad r(t,x) = -\int\limits_t^T p(s,x)\,ds + w(x)\,.$$

Здесь $z(x) \in H^1(\overset{\circ}{0},l)$ и $w(x) \in H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)$ — образы Рисса одного и того же нерегулярного элемента $v^1 \in \big(H^1(0,l)\big)^*$, которые при выборе в $H^1(\overset{\circ}{0},l)$ и $H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)$ скалярного произведения (13) будут связаны с v^1 следующими краевыми задачами Рисса:

$$\begin{aligned}
&-\big(k(x)z'(x)\big)' = \rho(x)v^1(x), \quad 0<x<l; \quad z(0)=0, \quad z'(l)=0,\\
&-\big(k(x)w'(x)\big)' = \rho(x)v^1(x), \quad 0<x<l; \quad w'(0)=0, \quad w(l)=0\,.
\end{aligned}$$

Вариацию риссовских образов удобнее производить не по самим пространствам $H^1(\overset{\circ}{0},l)$ и $H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)$, а по всюду плотным в них подмножествам

$$\begin{aligned}
Z &= \big\{z(x) \in H^2(0,l) \,\big|\, z(0)=0,\ z'(0)=0,\ z'(l)=0\big\} \subset H^1(\overset{\circ}{0},l)\,,\\
W &= \big\{w(x) \in H^2(0,l) \,\big|\, w'(0)=0,\ w(l)=0,\ w'(l)=0\,\big\} \subset H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)\,.
\end{aligned}$$

При выборе $z(x) \in Z$, $w(x) \in W$ функции $q(t,x)$ и $r(t,x)$ окажутся сильными обобщенными решениями следующих краевых задач, подобных (8), но с более гладкими данными:

$$\begin{aligned}
&\rho(x)q_{tt} = \big(k(x)q_x\big)_x, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l,\\
&q\big|_{x=0} = 0, \quad q\big|_{x=l} = z(l), \quad 0<t<T, \quad q\big|_{t=T} = z(x), \quad q_t\big|_{t=T} = v^0(x), \quad 0<x<l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rho(x)r_{tt} = \big(k(x)\,r_x\big)_x, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l,\\
&r\big|_{x=0} = w(0), \quad r\big|_{x=l} = 0, \quad 0<t<T, \quad r\big|_{t=T} = w(x), \quad r_t\big|_{t=T} = v^0(x), \quad 0<x<l.
\end{aligned}$$

Разложение пространства $H^1(0,l)$ в сумму (12) с последующим применением двух сглаживающих функций $q(t,x)$ и $r(t,x)$ производилось и в [1]. Главным отличием от [1] является то, что здесь вместо двух разных мультипликаторов для функций q и r будет использоваться один общий мультипликатор $m(x) = m(x,\xi)$, обладающий свойствами

$$\begin{aligned}
&m'(x) = 1 + a(x)m(x), \quad 0<x<l, \quad m(\xi)=0, \quad \text{где} \quad 0<\xi<l,\\
&a(x) = \min\left\{-\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}, \frac{k'(x)}{k(x)}\right\} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \quad a(x) = \max\left\{-\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}, \frac{k'(x)}{k(x)}\right\} \quad \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant l.
\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что базовые элементы конструкций мультипликаторов в [1] и (15) взяты из [11]. Пороговый момент управляемости определяется по правилу

$$T_2 = 2\min_{0\leqslant\xi\leqslant l}\max_{0\leqslant x\leqslant l}\Big(\big|m(x;\xi)\big|\sqrt{\rho(x)/k(x)}\,\Big). \tag{16}$$

В итоговых оценках используем мультипликатор $m_*(x) = m(x;\xi_*)$, соответствующий тому значению параметра $\xi = \xi_*$, которое доставляет минимум в (16). Оценка, полученная с помощью $m_*(x)$ для сглаживающей функции $q(t,x)$, имеет вид

$$\frac{|m_*(0)|}{k(0)} \int\limits_0^T \big(k(0) q_x(t,0)\big)^2\,dt + \frac{|m_*(l)|}{k(l)} \int\limits_0^T \big(k(l) q_x(t,l)\big)^2\,dt \geqslant$$
$$\geqslant (T - T_2)\bigg(\int\limits_0^l \Big(\rho(x)\big|v^0(x)\big|^2 + k(x)\big|z'(x)\big|^2\Big)\,dx \bigg). \tag{17}$$

При использовании того же мультипликатора и сглаживающей функции $r(t,x)$ получаем аналогичную (17) оценку

$$\frac{|m_*(0)|}{k(0)} \int\limits_0^T \big(k(0) r_x(t,0)\big)^2\,dt + \frac{|m_*(l)|}{k(l)} \int\limits_0^T \big(k(l) r_x(t,l)\big)^2\,dt \geqslant$$
$$\geqslant (T - T_2)\bigg(\int\limits_0^l \Big(\rho(x)\big|v^0(x)\big|^2 + k(x)\big|w'(x)\big|^2\Big)\,dx \bigg). \tag{18}$$

При выборе в пространстве $H^1(\overset{\circ}{0},T)$ скалярного произведения $\langle f,g\rangle_{H^1(\overset{\circ}{0},T)} = \int\limits_0^T f'(t)g'(t)\,dt$ изоморфизм Рисса между элементами $g(t) \in \big(H^1(\overset{\circ}{0},T)\big)^*$ и $f(t) \in H^1(\overset{\circ}{0},T)$ сопряженных пространств осуществляется по правилу

$$-f''(t) = g(t), \quad 0 < t < T, \quad f(0) = 0, \quad f'(T) = 0. \tag{19}$$

Условия связи (19), определение сопряженного оператора (10) и равенство нулю граничных значений производных $z'(0) = z'(l) = w'(0) = w'(l) = 0$ функций $z(x) \in Z$ и $w(x) \in W$ позволяют оценить сверху левые части неравенств (17), (18) одной и той же величиной

$$\frac{|m_*(0)|}{k(0)} \big\|k(0)p_x(\cdot,0)\big\|^2_{(H^1(\overset{\circ}{0},T))^*} + \frac{|m_*(l)|}{k(l)} \big\|k(l)p_x(\cdot,l)\big\|^2_{(H^1(\overset{\circ}{0},T))^*} \leqslant M\big\|A^*v\big\|^2_{H^*}, \tag{20}$$

где $M = \max\left\{\dfrac{|m_*(0)|}{k(0)}, \dfrac{|m_*(l)|}{k(l)}\right\}$. В результате оценки (17), (18) примут вид

$$M\big\|A^*v\big\|^2_{H^*} \geqslant (T - T_2)\Big(\big\|v^0\big\|^2_{L^2_\rho(0,l)} + \|z\|^2_{H^1(\overset{\circ}{0},l)}\Big), \tag{21}$$

$$M\big\|A^*v\big\|^2_{H^*} \geqslant (T - T_2)\Big(\big\|v^0\big\|^2_{L^2_\rho(0,l)} + \|w\|^2_{H^1(0,\overset{\circ}{l})}\Big). \tag{22}$$

Оценки (21), (22) продолжаются по непрерывности со всюду плотных подмножеств Z и W на содержащие их пространства $H^1(\overset{\circ}{0},l)$ и $H^1(0,\overset{\circ}{l})$ соответственно. Сложим эти продолжения и учтем, что в силу риссовских изоморфизмов $\big(H^1(\overset{\circ}{0},l)\big)^* \simeq H^1(\overset{\circ}{0},l)$, $\big(H^1(0,\overset{\circ}{l})\big)^* \simeq H^1(0,\overset{\circ}{l})$ и равенства норм (14) имеет место равенство $\|z\|^2_{H^1(\overset{\circ}{0},l)} + \|w\|^2_{H^1(0,\overset{\circ}{l})} = 2\,\big\|v^1\big\|^2_{(H^1(0,l))^*}$. Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $\rho(x)$, $k(x)$ положительны и непрерывно дифференцируемы на $[0,l]$, а значения порогового момента T_2 и постоянной M определены в* (16), (20). *Тогда для решения p сопряженной задачи* (8) *и связанного с ним оператора A^* из* (10) *при $T > T_2$ справедлива оценка*

$$\big\|A^*v\big\|^2_{H^*} \geqslant \frac{T - T_2}{M}\Big(\big\|v^0\big\|^2_{L^2_\rho(0,l)} + \big\|v^1\big\|^2_{(H^1(0,l))^*}\Big) \quad \forall v \in F^*. \tag{23}$$

Оценка (23) означает, что за время $T > T_2$ с помощью подходящего выбора граничных управлений $u = \big(u_0(t), u_1(t)\big) \in H^1(\overset{\circ}{0},T) \times H^1(\overset{\circ}{0},T)$ систему (5) можно перевести в любую наперед заданную цель $f^0(x) \in H^1(0,l)$, $f^1(x) \in L^2_\rho(0,l)$.

Кроме того, в задаче (8) по граничным наблюдениям $g = \big(g_0(t), g_1(t)\big) \in \big(H^1(\overset{\circ}{0},T)\big)^* \times \big(H^1(\overset{\circ}{0},T)\big)^*$ из (9) однозначно восстанавливается финальное состояние $v^0(x) \in L^2_\rho(0,l)$, $v^1(x) \in \big(H^1(0,l)\big)^*$.

Заметим, что присутствующее в (23) пороговое значение T_2 из (16) в отличие от полученного в [1] является негрубым в смысле совпадения с оптимальным T_{2*} из (4) в случае постоянных коэффициентов $\rho(x) \equiv k(x) \equiv 1$, когда $T_2 = T_{2*} = l$, в то время как в [1] соответствующий пороговый уровень был равен $\sqrt{2}\,l$. Вычислительная процедура, реализующая вариационный метод [6] построения устойчивых приближенных решений двойственных задач управления (5), (6) и наблюдения (8), (9), подробно изложена в [1], а теорема 1 дает возможность использования этой процедуры на временны́х промежутках меньшей протяженности.

3. Задачи с двусторонними Нейман-управлениями и Дирихле-наблюдениями. В тех же функциональных классах, что и в [2], ставится задача граничного Нейман-управления

$$\begin{aligned} &\rho(x)y_{tt} = \big(k(x)y_x\big)_x, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l,\\ &-ky_x\big|_{x=0}= u_0(t), \quad ky_x\big|_{x=l}= u_1(t), \quad 0<t<T, \quad y\big|_{t=0}= 0, \quad y_t\big|_{t=0}= 0, \quad 0<x<l. \end{aligned} \tag{24}$$

Ищется пара управлений $u = \big(u_0(t), u_1(t)\big) \in L^2(0,T)\times L^2(0,T) = H$, переводящих систему (24) из нулевого начального состояния в заданное целевое состояние

$$y\big|_{t=T}= f^0(x), \quad y_t\big|_{t=T}= f^1(x), \quad 0<x<l, \tag{25}$$

из класса $f = \big(f^0(x), f^1(x)\big) \in H^1(0,l) \times L^2_\rho(0,l) = F$. В записи задачи Нейман-управления (24), (25) в форме уравнения $Au = f$ сохранится внешний облик (7) оператора A и область его значений F, но в связи с изменением типа граничных условий расширится его область определения H и изменится внутренний механизм преобразования управлений $u \in H$ в конечные состояния $Au = \big(y(T,x), y_t(T,x)\big) \in F$.

В двойственной к (24), (25) задаче наблюдения

$$\begin{aligned} &\rho(x)p_{tt} = \big(k(x)p_x\big)_x, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l,\\ &-kp_x\big|_{x=0}= 0, \quad kp_x\big|_{x=l}= 0, \quad 0<t<T, \quad p\big|_{t=T}= v^0(x), \quad p_t\big|_{t=0}= -v^1(x), \quad 0<x<l, \end{aligned} \tag{26}$$

по паре $g = \big(g_0(t),\, g_1(t)\big) \in L^2(0,T) \times L^2(0,T) = H^* \simeq H$ граничных Дирихле-наблюдений

$$p\big|_{x=0}= g_0(t), \quad p\big|_{x=l}= g_1(t), \quad 0<t<T, \tag{27}$$

требуется восстановить конечное состояние $v = \big(v^0(x),\, v^1(x)\big) \in L^2_\rho(0,l) \times \big(H^1(0,l)\big)^* = F^*$ процесса (26). Этой задаче соответствует сопряженное уравнение $A^*v = g$, где

$$A^*v = \big(p(t,0), p(t,l)\big), \quad 0<t<T. \tag{28}$$

В данном случае целевая установка аналогична (11) — это оценка снизу вида

$$\big\|A^*v\big\|^2_{H^*} = \big\|p(\cdot,0)\big\|^2_{L^2(0,T)} + \big\|p(\cdot,l)\big\|^2_{L^2(0,T)} \geqslant \mu_0(T-T_2)\Big(\big\|v^0\big\|^2_{L^2_\rho(0,l)} + \big\|v^1\big\|^2_{(H^1(0,l))^*}\Big)$$

с более точным по сравнению с [2] значением порогового момента T_2.

Здесь, как и в случае Дирихле-управлений, используется разложение пространства $H^1(0,l)$ в сумму (12) и процедура сглаживания с участием риссовских образов $z(x) \in H^1(\overset{\circ}{0},l)$, $w(x) \in H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)$ нерегулярного элемента $v^1(x) \in \big(H^1(0,l)\big)^* = \big(H^1(\overset{\circ}{0},l)\big)^* \cap \big(H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)\big)^*$. При выборе $z(x) \in Z$, $w(x) \in W$ обе сглаживающие функции $q(t,x)$ и $r(t,x)$ будут сильными обобщенными решениями однородных краевых задач Неймана, подобных (26), но с регулярными финальными состояниями:

$$\begin{aligned} &\rho(x)q_{tt} = \big(k(x)q_x\big)_x, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l,\\ &-kq_x\big|_{x=0}= 0, \quad kq_x\big|_{x=l}= 0, \quad 0<t<T, \quad q\big|_{t=T}= z(x), \quad q_t\big|_{t=0}= v^0(x), \quad 0<x<l, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\rho(x)r_{tt} = \big(k(x)r_x\big)_x, \quad 0<t<T, \quad 0<x<l,\\ &-kr_x\big|_{x=0}= 0, \quad kr_x\big|_{x=l}= 0, \quad 0<t<T, \quad r\big|_{t=T}= w(x), \quad r_t\big|_{t=0}= v^0(x), \quad 0<x<l. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь, как и в случае граничных условий Дирихле, будем использовать в отличие от [2] для обеих функций $q(t,x)$ и $r(t,x)$ вместо двух один и тот же мультипликатор $m_*(x) = m(x;\xi_*)$ из (15) с оптимальным в смысле (16) значением параметра ξ_*. Оценки для решений $q(t,x)$ и $r(t,x)$ задач (29), (30) с данными $z(x) \in Z$, $w(x) \in W$, $v^0(x) \in L^2_\rho(0,l)$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\bigl|m_*(0)\bigr|\rho(0)\int\limits_0^T q_t^2(t,0)\,dt + \bigl|m_*(l)\bigr|\rho(l)\int\limits_0^T q_t^2(t,l)\,dt \geqslant \\
&\qquad\qquad \geqslant (T-T_2)\biggl(\int\limits_0^l \rho(x)\bigl|v^0(x)\bigr|^2\,dx + \int\limits_0^l k(x)\bigl|z'(x)\bigr|^2\,dx\biggr),
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bigl|m_*(0)\bigr|\rho(0)\int\limits_0^T r_t^2(t,0)\,dt + \bigl|m_*(l)\bigr|\rho(l)\int\limits_0^T r_t^2(t,l)\,dt \geqslant \\
&\qquad\qquad \geqslant (T-T_2)\biggl(\int\limits_0^l \rho(x)\bigl|v^0(x)\bigr|^2\,dx + \int\limits_0^l k(x)\bigl|w'(x)\bigr|^2\,dx\biggr).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Значение порогового момента T_2 в (31) и (32) определяется по правилу (16). Заключительные действия вполне аналогичны рассмотренному выше случаю граничных условий Дирихле: учитываем равенства

$$
q_t(t,0) = r_t(t,0) = p(t,0), \quad q_t(t,l) = r_t(t,l) = p(t,l), \quad 0 < t < T,
$$

загрубляем левые части (31) и (32), вводя постоянную

$$
M = \max\Bigl\{\bigl|m_*(0)\bigr|\rho(0), \bigl|m_*(l)\bigr|\rho(l)\Bigr\},
\tag{33}
$$

затем распространяем по непрерывности действие загрубленных оценок с плотных подмножеств Z, W на содержащие их пространства $H^1(\overset{\circ}{0},l)$, $H^1(0,\overset{\circ}{l}\,)$ и, наконец, складываем полученные результаты.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты $\rho(x)$, $k(x)$ положительны и непрерывно дифференцируемы на $[0,l]$, а значения порогового момента T_2 и постоянной M определены в* (16), (33). *Тогда для решения p сопряженной задачи* (26) *и связанного с ним оператора A^* из* (28) *при $T > T_2$ справедлива оценка*

$$
\bigl\|A^*v\bigr\|^2_{H^*} \geqslant \frac{T-T_2}{M}\Bigl(\bigl\|v^0\bigr\|^2_{L^2_\rho(0,l)} + \bigl\|v^1\bigr\|^2_{(H^1(0,l))^*}\Bigr) \quad \forall v \in F^*.
\tag{34}
$$

Оценка (34) означает, что за время $T > T_2$ с помощью подходящего выбора пары граничных управлений $u = \bigl(u_0(t), u_1(t)\bigr) \in L^2(0,T) \times L^2(0,T)$ систему (24) можно перевести в любую наперед заданную цель $f^0(x) \in H^1(0,l)$, $f^1(x) \in L^2_\rho(0,l)$, а в двойственной задаче (26), используя граничные наблюдения $g = \bigl(g_0(t), g_1(t)\bigr) \in L^2(0,T) \times L^2(0,T)$ из (27), можно однозначно восстановить финальное состояние $v^0(x) \in L^2_\rho(0,l)$, $v^1(x) \in \bigl(H^1(0,l)\bigr)^*$.

Заметим, что присутствующее в (34) пороговое значение T_2 из (16) в отличие от полученного в [2] является негрубым в смысле совпадения в случае постоянных коэффициентов $\rho(x) \equiv k(x) \equiv 1$ с оптимальным $T_{2*} = l$ из (4), в то время как в [2] найденный пороговый уровень был равен $\sqrt{2}\,l$. Тем самым теорема 2 дает возможность применения вариационного метода [6] к двойственным задачам Нейман-управления (24), (25) и Дирихле-наблюдения (26), (27) на временны́х промежутках меньшей протяженности.

Автор глубоко благодарен Ф. П. Васильеву за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапов М.М.* Приближенное решение задач Дирихле-управления для волнового уравнения в классах Соболева и двойственных к ним задач наблюдения // ЖВМ и МФ. 2006. **46**, № 12. 2191–2208.
2. *Потапов М.М.* Наблюдаемость нерегулярных решений задачи Неймана для волнового уравнения с переменными коэффициентами // Докл. РАН. 2007. **412**, № 6. 747–752.
3. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. ур-ния. 2000. **36**, № 11. 1523–1528.

4. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. ур-ния. 2000. **36**, № 12. 1670–1686.
5. *Васильев Ф.П.* О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. ур-ния. 1995. **31**, № 11. 1893–1900.
6. *Потапов М.М.* Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Докл. РАН. 1999. **365**, № 5. 596–598.
7. *Lions J.-L.* Exact controllability, stabilizability, and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. **30**, N 1. 1–68.
8. *Потапов М.М.* О сильной сходимости разностных аппроксимаций задач граничного управления и наблюдения для волнового уравнения // ЖВМ и МФ. 1998. **38**, № 3. 387–397.
9. *Потапов М.М.* Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для гиперболического уравнения с краевыми условиями второго и третьего рода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1996. № 2. 35–41.
10. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
11. *Ho L.F.* Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control // SIAM J. Control and Optimizat. 1990. **28**, N 3. 733–748.

Поступила в редакцию
26.03.2007