

УДК 004.93

ДИАГНОСТИКА ТРЕХМЕРНЫХ СРЕД МЕТОДАМИ СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРЫ

Г. М. Агаян¹, Н. С. Виноградов¹, А. В. Гончарский¹, С. Л. Овчинников¹, С. Ю. Романов¹

Статья посвящена разработке методов и алгоритмов решения обратной задачи волновой диагностики неоднородностей в однородных средах. Обратная задача рассмотрена в линеаризованной постановке для уравнения Гельмгольца с неизвестным коэффициентом. Предложен метод синтезированной апертуры и разработан эффективный алгоритм решения обратной задачи. Разработана схема проведения лабораторного эксперимента и диагностическая аппаратура по сбору экспериментальных данных. Приведен результат решения обратной задачи на реальных данных лабораторного эксперимента. Полученные результаты показали высокую эффективность метода на экспериментальных данных. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-08068).

Ключевые слова: компьютерное моделирование, волновые модели, обратные задачи волновой диагностики, параллельные вычисления, уравнение Гельмгольца.

1. Введение. Рассматривается обратная задача волнового зондирования неоднородных включений произвольной природы в однородной среде. Эта проблема является актуальной и привлекает внимание ведущих ученых как в нашей стране, так и за рубежом [1–5]. В использованном здесь приближении мы предполагали, что среда распространения колебаний описывается скалярным волновым уравнением, а компактные неоднородности связаны с изменениями фазовой скорости [6, 7]. В отличие от работ [8, 9], где зондирование неоднородностей проводилось источниками импульсного типа, в настоящем исследовании источники колебаний являются гармоническими осцилляторами. Это позволяет описать распространение колебаний уравнением Гельмгольца. Обратная задача заключается в вычислении неизвестного коэффициента рефракции по измеренному в заданной области полю при различных положениях источников и приемников.

Рассматриваемая задача является трехмерной и нелинейной. Это приводит к огромному объему вычислений. Единственный путь разрешения этой проблемы состоит в использовании компьютеров с параллельной архитектурой [10–12]. Однако в некоторых случаях, когда структура искомой неоднородности не слишком сложная, предлагаемый линеаризованный метод синтезированной апертуры позволяет получать неплохие результаты.

В настоящей статье не только предложены теоретическое обоснование метода и новые алгоритмы, но также проведено решение и изложены результаты для реальных данных лабораторного эксперимента.

2. Математическая постановка прямой и обратной задач. Мы будем предполагать, что среда распространения звука не имеет тензорных свойств (только скалярные). Предположим также, что источник звука является гармоническим осциллятором, колеблющимся с заданной частотой. Амплитуда колебаний источника зависит от времени как $e^{-i\omega t}$, что позволяет описать распространение звука уравнением Гельмгольца

$$\Delta u(r, q, \omega) + \kappa^2(r, \omega)u(r, q, \omega) = f(r, q, \omega), \quad (1)$$

где r — положение точки в трехмерном пространстве, ω — круговая частота звука, $u(r, q, \omega)$ — скалярное волновое поле.

Пусть все неоднородности среды расположены в области \mathbb{R} . Предположим, что источники звуковых волн (положения которых в пространстве характеризуются координатой q) расположены в области \mathbb{Q} , а точки измерения скалярной функции $u(r, q, \omega)$ при фиксированной круговой частоте ω расположены в области \mathbb{P} , не имеющей общих точек с \mathbb{R} , в то время как области \mathbb{P} и \mathbb{Q} могут пересекаться и даже совпадать.

Функция $f(r, q, \omega)$ описывает источники, расположенные в области \mathbb{Q} . Например, для гармонического осциллятора в точке $q \in \mathbb{Q}$ эта функция имеет вид $f(r, q, \omega) = -\delta(\|r - q\|)$. Неоднородности в области \mathbb{R}

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Ленинские горы, Москва; e-mail: agagal@rambler.ru, gonchar@srcc.msu.ru, romanov@srcc.msu.ru

описываются функцией $\kappa(r, \omega)$. В простейшем случае, когда неоднородности вызваны только изменениями фазовой скорости $c(r)$, имеет место соотношение $\kappa(r, \omega) = \frac{\omega}{c(r)}$. Будем предполагать для простоты, что вне области \mathbb{R} выполнено $\kappa(r, \omega) = \frac{\omega}{c_0}$, где $c_0 = \text{const}$. Пусть $\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$. Тогда (1) можно переписать в виде

$$\Delta u(r, q, \omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} u(r, q, \omega) = f(r, q, \omega) + \omega^2 \xi(r) u(r, q, \omega). \quad (2)$$

Вводим в рассмотрение функцию Грина

$$G(x, y, \omega) = -\frac{1}{4\pi\|x - y\|} \exp\left(i \frac{\omega}{c_0} \|x - y\|\right), \quad (3)$$

которая удовлетворяет уравнению $\Delta G(x, y, \omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} G(x, y, \omega) = -\delta(\|x - y\|)$. Теперь уравнение (2) можно переписать в виде объемного интегрального уравнения

$$u(r, q, \omega) = u_0(r, q, \omega) + \omega^2 \int_{\mathbb{R}} G(r', r, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', \quad (4)$$

где $u_0(r, q, \omega) = \int_{\mathbb{Q}} G(r', r, \omega) f(r', q, \omega) dr'$. Раздельно записывая уравнение (4) для областей \mathbb{R} и \mathbb{P} , получаем нелинейную систему уравнений (см. [7])

$$\begin{cases} u(r, q, \omega) = u_0(r, q, \omega) + \omega^2 \int_{\mathbb{R}} G(r', r, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', & r \in \mathbb{R}, \\ U(p, q, \omega) = \omega^2 \int_{\mathbb{R}} G(r', p, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', & p \in \mathbb{P}. \end{cases} \quad (5)$$

Прямая задача соответствует первому интегральному уравнению, в котором по заданному источнику и свойствам среды необходимо вычислить звуковое давление. В обратной задаче неизвестными считаются свойства среды и звуковое давление для различных частот. Известными считаются уравнения связи (5), в которых функция $U(p, q, \omega)$ получается как результат измерений в области расположения приемников.

3. Метод синтезированной апертуры. Рассмотрим линейризованную (борновское приближение) модель задачи (5), в которой полагаем функцию $u(r', q, \omega)$ под интегралом равной $u_0(r', q, \omega)$. В случае точечных источников (т.е. $f(r, q, \omega) = -\delta(\|r - q\|)$) имеем $u_0(r', q, \omega) = G(r', q, \omega)$. Таким образом, получим

$$U(p, q, \omega) = u(p, q, \omega) - G(p, q, \omega) = \omega^2 \int_{\mathbb{R}} G(r, p, \omega) G(r, q, \omega) \xi(r) dr, \quad (6)$$

где $G(r, p, \omega)$ определяется выражением (3); точка $p \in \mathbb{P}$ определяет положение приемника; точка $q \in \mathbb{Q}$ определяет положение источника; $u(p, q, \omega)$ — функция, описывающая поле, которая может быть измерена в области измерений \mathbb{P} ; $\xi(r)$ — искомая функция, описывающая неоднородность; r — точка, вообще говоря, трехмерной области \mathbb{R} . Полученное уравнение (6) является интегральным уравнением первого рода, описывающим постановку обратной задачи.

Рассмотрим практически важный случай, когда области \mathbb{P} и \mathbb{Q} расположены на поверхности Земли и совпадают с плоскостью $z = 0$, где введена декартова система координат $OXYZ$ с осью Z , направленной вниз, а плоскость OXY совпадает с поверхностью Земли. В этом случае функция Грина (3) может быть записана при $r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}$ и $p = (p_1, p_2, 0) \in \mathbb{P}$ в виде

$$G(r, p, \omega) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_2 - r_2)^2 + r_3^2}} \exp\left(i \frac{\omega}{c_0} \sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_2 - r_2)^2 + r_3^2}\right). \quad (7)$$

Заметим, что здесь функция Грина зависит от разности аргументов: $G(r, p, \omega) = H(p_1 - r_1, p_2 - r_2, r_3, \omega)$. Для упрощения дальнейших выкладок аргументы с индексом 2 и ω писать не будем. Кроме того, будем предполагать, что неоднородность располагается на некоторой неизвестной глубине r_3 , и снимем интегрирование по r_3 в (6). Это предположение ограничивает класс неоднородностей $\xi(r)$, которые могут

быть найдены рассматриваемым методом. Как будет видно далее, это приводит к плохому разрешению по глубине, однако если неоднородность имеет не слишком сложную структуру (например, состоит из нескольких не перекрывающихся по горизонтальным координатам объектов на разных глубинах), то предлагаемый подход применим и позволяет получать хорошее разрешение по горизонтали. Таким образом, уравнение (6) запишется в виде

$$U(p_1, q_1) = \int H(p_1 - r_1, r_3)H(q_1 - r_1, r_3)\xi(r_1, r_3) dr_1, \quad (8)$$

где за пределами области \mathbb{R} положили $\xi(r) = 0$ и интегрирование продолжено на все пространство \mathfrak{R}^1 . Рассмотрим преобразование Фурье по переменным (p_1, q_1) , тогда

$$\tilde{U}(v_1, w_1) = \tilde{H}(v_1, r_3)\tilde{H}(w_1, r_3) \int \exp\{-i(v_1 + w_1)r_1\}\xi(r_1, r_3) dr_1,$$

где \tilde{U} , \tilde{H} — преобразование Фурье от U , H . Далее можно записать

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1} \left[\frac{\tilde{U}(v_1, w_1)}{\tilde{H}(v_1, r_3)\tilde{H}(w_1, r_3)} \right] &= \frac{1}{2\pi} \int \exp\{i(xv_1 + yw_1)\} \left\{ \int \exp\{-i(v_1 + w_1)r_1\}\xi(r_1, r_3) dr_1 \right\} dv_1 dw_1 = \\ &= \int \delta(x - r_1)\delta(y - r_1)\xi(r_1, r_3) dr_1 = \delta(x - y)\xi(x, r_3), \end{aligned} \quad (9)$$

где \mathfrak{F}^{-1} — обратное преобразование Фурье по переменным (v_1, w_1) .

Формула (9) позволяет на основе процедуры быстрого дискретного преобразования Фурье эффективно вычислять неоднородность $\xi(r)$ на глубине r_3 по измеренной на поверхности функции U и известной функции Грина H .

Замечание 1. Как было отмечено выше, для упрощения мы выводили формулу (9) только для одной горизонтальной координаты. Для двух горизонтальных координат формула (9) принципиально не отличается (необходимо перейти от преобразования Фурье по двум переменным к преобразованию по четырем переменным).

Замечание 2. Рассмотрим важный в практическом плане случай, когда искомая неоднородность зондируется источником, который располагается только в одном месте. В этом случае область \mathbb{Q} расположения источников состоит из одной точки с координатами $(\hat{q}_1, \hat{q}_2, 0)$. В практическом плане подобный подход позволяет значительно снизить расходы, связанные с проведением эксперимента. Нетрудно показать, что формула (9) в этом случае для двух горизонтальных координат (r_1, r_2) при фиксированной глубине r_3 примет вид

$$\mathfrak{F}^{-1} \left[\frac{\tilde{U}(v_1, w_1)}{\tilde{H}(v_1, v_2, r_3)} \right] = \bar{\xi}(r_1, r_2, r_3), \quad (10)$$

где $\bar{\xi}(r_1, r_2, r_3) = H(\hat{q}_1 - r_1, \hat{q}_2 - r_2, r_3)\xi(r_1, r_2, r_3)$. Как можно видеть, $\bar{\xi}(r_1, r_2, r_3)$ отличается от $\xi(r_1, r_2, r_3)$ только на известный комплексный множитель.

Замечание 3. Отметим связь рассматриваемой задачи, описываемой интегральным уравнением (6), с задачами оптики. Действительно, разложим корень, входящий в функцию Грина (7), в ряд Тейлора с двумя членами разложения: $\sqrt{(r_1 - p_1)^2 + (r_2 - p_2)^2 + r_3^2} \approx r_3 + \frac{1}{2r_3} [(r_1 - p_1)^2 + (r_2 - p_2)^2]$. Тогда для выбранной глубины r_3 интегральное преобразование (6) с точностью до коэффициента является преобразованием Френеля.

4. Подготовка эксперимента. Численные методы открывают широкие возможности по расчету как прямых, так и обратных задач для различных схем эксперимента. Однако даже современные математические подходы и высокопроизводительные вычислительные системы не могут дать ответа на ряд принципиальных вопросов. Основной из них — это адекватность используемой модели. Поэтому принципиальное значение имеет проведение физических экспериментов по моделированию в лабораторных условиях всех этапов сбора данных реального эксперимента. Цель лабораторного эксперимента состоит в решении следующих проблем:

- проверка адекватности используемой математической модели (скалярной волновой модели),
- разработка методов получения высокоточных данных эксперимента,
- оценка реальных уровней шумов в идеальных условиях лабораторного эксперимента,
- проверка состоятельности схемы эксперимента.

Как известно, при акустическом зондировании в замкнутых помещениях возникает отражение от стен, которое накладывается на полезный сигнал и существенно искажает данные. В связи с этим лабораторный эксперимент был проведен в акустической комнате (физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова), характеризующейся очень низким коэффициентом отражения от стен. Это позволяет моделировать бесконечную среду в условиях комнаты с объемом порядка $6 \times 7 \times 9$ (м).

Размеры комнаты накладывают ограничения на частотный диапазон излучения. Целесообразно проведение эксперимента в диапазоне частот порядка нескольких десятков килогерц. Для создания неоднородностей в однородной среде были использованы предметы, подвешенные в воздухе. Размеры объектов от 1 до 40 см. Расстояние от источников и приемников до объектов от 5 см до 100 см. Для точного измерения фазы принимаемой волны осуществлялось позиционирование сетки приемников и источников с точностью не менее $\frac{1}{20}$ длины волны на сетке с шагом не менее $\frac{1}{2}$ длины волны.

Для уверенного разделения исходного сигнала и эха длительность сигнала ограничивалась 5 – 10 периодами. Требования к приемнику сигнала определялись, во-первых, длиной волны (приемник должен быть достаточно мал для регистрации эхо-сигнала данной частоты) и, во-вторых, динамическим диапазоном для регистрации сигналов как от близких, так и от удаленных объектов.

Система регистрации обеспечивала разрешение не менее 8 бит на отсчет и не менее 20 – 25 отсчетов на период сигнала. Для этого была разработана и изготовлена специальная аппаратура регистрации, удовлетворяющая указанным требованиям. Лабораторный эксперимент не дает возможность полностью исследовать реальное распространение излучения в приповерхностных слоях Земли, но является необходимым шагом навстречу реальной задаче.

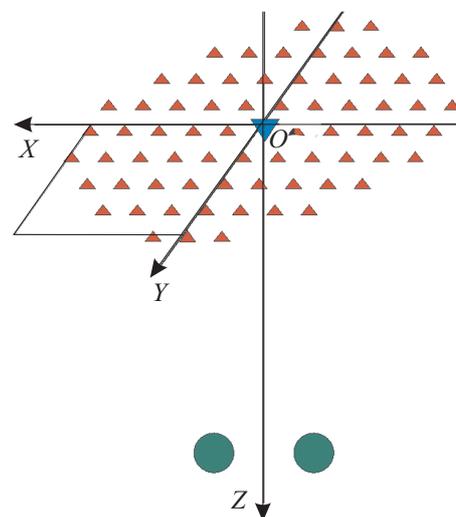


Рис. 1. Схема эксперимента

5. Схема лабораторного эксперимента. Схема лабораторного эксперимента приведена на рис. 1.

В акустической комнате (с низким коэффициентом отражения от стен) на одной высоте были подвешены два пластмассовых шара диаметром 6 см на расстоянии 15 см. Шары были заполнены водой, что позволило увеличить коэффициент отражения акустической волны. На расстоянии 50 см над шарами располагался акустический источник. Пусть начало декартовой системы координат совпадает с положением источника, ось Z направлена вниз, а ось X — вдоль шаров. Тогда центры шаров будут иметь координаты (7.5; 0.0; 50.0) и (-7.5; 0.0; 50.0). Измерения отраженной от шаров акустической волны проводилось в плоскости $Z = 0$. Размер приемника был выбран достаточно малый (около 0.3 см), шаг измерений составлял 0.3 см по оси X. С целью ослабления прямого сигнала между источником и приемником, источник был помещен в вертикальную трубу. Шаг по оси Y составлял 1 см. Область, где проводились измерения, представляла собой примерно сектор одного квадранта радиусом 24 см. Всего были проведены измерения отраженных волн примерно в 1300 точках.

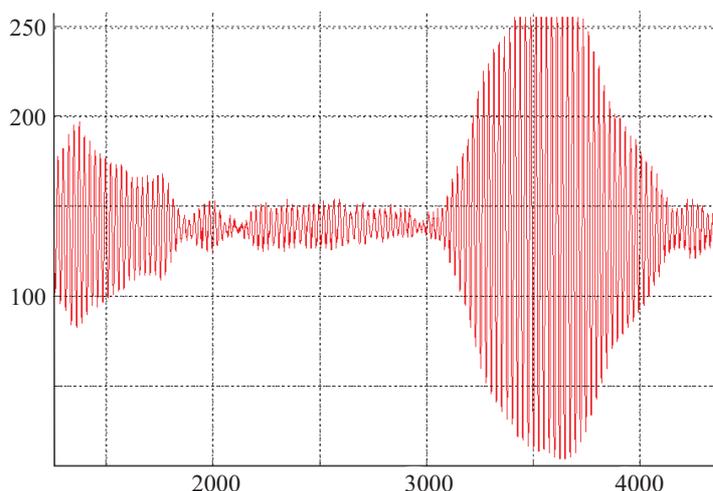


Рис. 2. Характерный вид результата оцифровки регистрирующей системой отраженного сигнала

6. Численные результаты расчетов обратной задачи на реальных данных. Характерный вид отраженного сигнала, записанного регистрирующей системой, приведен на рис. 2. Частота оцифровки позволяла получать около 24 отсчетов на период волны. По горизонтальной оси отложен номер отсчета, по вертикальной — амплитуда волны. В левой части графика виден ослабленный прямой сигнал

от источника, в правой — отраженный сигнал от двух шаров.

Каждый отраженный сигнал прошел этап предварительной обработки, в ходе которой были получены амплитуда и фаза сигнала. Полученные комплексные данные были использованы в качестве исходных измерений задачи. На рис. 3 приведена реальная часть исходных данных в плоскости OXY на сетке с шагом 0.3 см по оси X и 1 см по оси Y .

Таким образом, реализована схема лабораторного эксперимента с неоднородностью в виде двух шаров, располагающихся в однородной среде (воздух), с одним положением источника, зондирующего неоднородность на одной частоте, и около 5000 положений приемника на круге с радиусом 24 см в плоскости OXY .

Решение обратной задачи для данной схемы эксперимента основывалось на формуле (10). Значение параметра глубины r_3 менялось перебором по сетке в выбранном диапазоне значений.

На рис. 4 приведены результаты решения обратной задачи по исходным данным. Поскольку предлагаемый метод имеет гораздо лучшее разрешение по горизонтальным координатам, чем по вертикальной, то приведено сечение в горизонтальной плоскости амплитуды полученного изображения. Как можно видеть, полученное решение показывает наличие двух непересекающихся в плоскости XU областей, соответствующих двум шарам-неоднородностям в эксперименте.

Из рис. 4 видно, что предлагаемый метод синтезированной апертуры позволяет с высоким разрешением надежно восстанавливать структуру неоднородности по горизонтальным координатам. По вертикальной координате z разрешение восстановленного изображения выглядит хуже.

7. Заключение. Рассмотренная задача, в целом, является трехмерной и нелинейной, что приводит к большой размерности и требует огромного объема вычислений и оперативной памяти. Для решения этой проблемы, вообще говоря, необходимо использование суперкомпьютеров.

Однако если неоднородность имеет не слишком сложную структуру (например, состоит из нескольких не перекрывающихся по горизонтальным координатам объектов на разных глубинах), то предлагаемые сравнительно простые в вычислительном плане линейные методы синтезированной апертуры позволяют получать достаточно содержательные результаты. Метод демонстрирует очень хорошее разрешение по горизонтали, но низкое разрешение по глубине. Дальнейшее улучшение качества реконструкции изображения требует усложнения схемы эксперимента и методов обработки данных.

Как видно из результатов обработки, для получения надежных результатов нужна регистрация большого объема данных с высокой точностью. Необходимым требованием проводимых измерений экспериментальных данных является измерение как действительной, так и мнимой части волны.

Полученные результаты обработки реальных лабораторных данных позволяют с оптимизмом смотреть на перспективы дальнейших исследований задачи диагностики трехмерных сред.

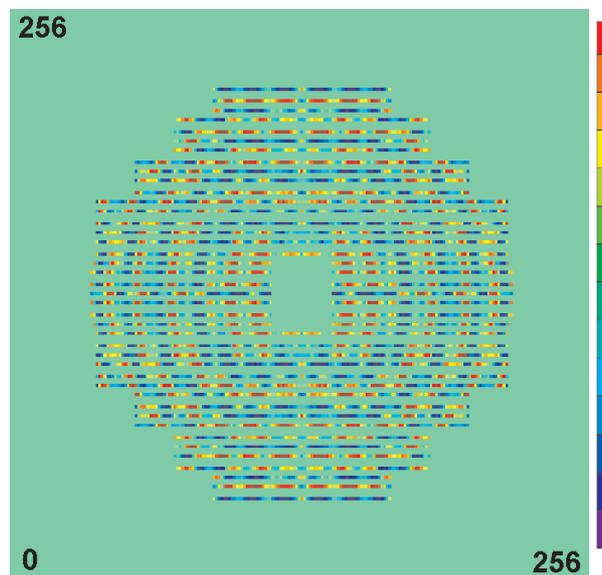


Рис. 3. Результаты детектирования реальных экспериментальных данных в прямой задаче на плоскости OXY (сечение в плоскости OXY ; действительная часть волны)

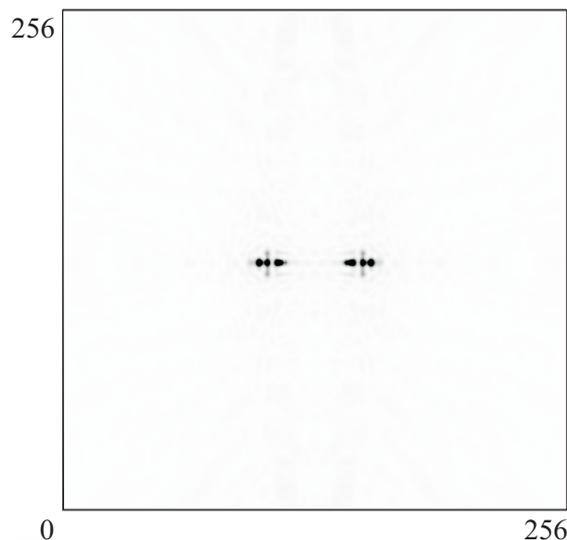


Рис. 4. Результаты реконструкции реальных экспериментальных данных (сечение в плоскости OXY)

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность чл.-корр. РАН Вл. В. Воеводину за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Claerbout J.* Imaging the Earth's interior. Palo Alto: Blackwell Scientific Publishers, 1986.
2. *Robinson E., Durrani T.S., Peardon L.G.* Geophysical signal processing. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1986.
3. *Gazdag J., Squazzero P.* Migration of seismic data // Proc. of the IEEE. 1984. **72**, N 10. 1302–1315.
4. *Yilmaz O.* Seismic data processing. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 1987.
5. *Baysal E., Kosloff D.D., Sherwood J.W.C.* Reverse time migration // Geophysics. 1983. **48**. 1514–1524.
6. *Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V.* Ill-posed problems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994.
7. *Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V., Romanov S.Yu., Seatzu S.* On the identification of velocity in seismic and in acoustic sounding. Firenze, 1994.
8. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Об одной трехмерной задаче диагностики в волновом приближении // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 9. 1364–1367.
9. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Об одной задаче компьютерной томографии в волновом приближении // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**, № 1. 40–44.
10. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Харченко С.А.* Обратные задачи диагностики с синтезированной апертурой // Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2007). Труды Международной научной конференции. (Челябинск, 29 января–2 февраля 2007 г.). Том 1. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. 109–114.
11. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Харченко С.А.* Обратная задача акустической диагностики трехмерных сред // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**, № 1. 117–125.
12. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Разработка методов компьютерной томографии в нелинейном волновом приближении с использованием суперкомпьютеров // Научный сервис в сети ИНТЕРНЕТ: технологии параллельного программирования. Труды Всероссийской научной конференции (Новороссийск, 18–23 сентября 2006 г.). М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. 172–175.

Поступила в редакцию
09.04.2007
