УДК 519.622

ТРЕХМЕРНОЕ СЕМЕЙСТВО 7-ШАГОВЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ–КУТТА ПОРЯДКА 6

Г. М. Хаммуд[1]

Найдено новое семейство 7-шаговых методов Рунге–Кутта порядка 6. Предложен аналитический способ вывода формул этого типа. Приведен численный пример. Показано, что коэффициенты метода, найденные аналитически, с высокой точностью совпадают со значениями, вычисленными приближенно с использованием метода Ньютона.

Ключевые слова: методы Рунге–Кутта, уравнения Батчера, численный анализ, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, метод Ньютона, порядок сходимости.

1. Введение. Методы Рунге–Кутта, используемые для численного решения задачи Коши $y(x_0) = y_0$ для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, характеризуются в простейшем варианте двумя основными параметрами (p, n), т.е. порядком метода и количеством шагов (стадий) соответственно. Классические методы имеют параметры $(4, 4)$. Методы порядка 5 (6 шагов) исследованы достаточно подробно [6, 7]. В книге [1] упоминается 4-мерное семейство методов порядка 6, найденное Батчером в [5].

Нахождение методов Рунге–Кутта сводится к решению весьма большой системы нелинейных (полиномиальных) уравнений для вычисления коэффициентов матрицы метода. В общем виде ее решение до сих пор найти не удалось. Поэтому представляют интерес попытки численного и численного-аналитического решения указанных уравнений.

При решении системы с несколькими десятками переменных и с еще большим количеством уравнений возникает много неожиданных проблем. Возможно, это связано с сильной вырожденностью системы уравнений (в нашем случае 37 уравнений с 21 переменным). Тем не менее, некоторые результаты в этом направлении удалось получить [2]. Среди них — пример 7-шагового метода порядка 6, обладающего тем свойством, что у него сразу три коэффициента равны нулю: $b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Такой метод не входит в семейство методов, полученное Батчером. Следовательно, обнаружено новое семейство подобных методов.

Была также предпринята попытка аналитически получить методы такого типа. В результате было получено трехмерное семейство методов, которое и рассматривается в настоящей статье. Значения коэффициентов нашего метода, полученные численно по методике, изложенной в [2], с хорошей точностью (10^{-12}) совпадают с их значениями, полученными аналитически (см. п. 13).

Как и в других аналогичных вычислениях [1, 6, 7], представить ответ в явном виде (аналитические выражения всех несвободных переменных через свободные) не удается ввиду громоздкости получающихся выражений. Вместо этого описывается многошаговый алгоритм вычисления несвободных переменных: на каждом шаге алгоритма используется часть уравнений и выражаются некоторые переменные через остальные.

Пусть матрица A представляет 7-шаговый метод Рунге–Кутта порядка 6:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 0 & 0 & 0 \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы должны удовлетворять уравнениям Батчера, соответствующим деревьям с весом, который не превосходит 5 [1].

---

[1] Ивановский государственный университет, математический факультет, ул. Ермака, 39, 153025, г. Иваново; e-mail: khash@interline.ru

2. Обозначения. Для записи уравнений Батчера введем вспомогательную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 0 & 0 \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем вектор $e = (1, \dots, 1)^T$. Для двух векторов $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ через $z = x * y$ обозначим вектор $z = (x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n)^T$. Сумму координат вектора x обозначим через $\{x\}$.

3. Упрощающие предположения. Воспользуемся основным упрощающим предположением [1]:

$$\begin{aligned}
&(1)\; b_7a_{71} + b_6a_{61} + b_5a_{51} + b_4a_{41} + b_3a_{31} + b_2a_{21} = b_1,\\
&(2)\; b_7a_{72} + b_6a_{62} + b_5a_{52} + b_4a_{42} + b_3a_{32} = (1-c_2)b_2,\\
&(3)\; b_7a_{73} + b_6a_{63} + b_5a_{53} + b_4a_{43} = (1-c_3)b_3,\\
&(4)\; b_7a_{74} + b_6a_{64} + b_5a_{54} = (1-c_4)b_4,\\
&(5)\; b_7a_{75} + b_6a_{65} = (1-c_5)b_5,\\
&(6)\; b_7a_{76} = (1-c_6)b_6,\\
&(7)\; 0 = (1-c_7)b_7,\\
&(8)\; 0 = 0,
\end{aligned}$$

где через c_i обозначена сумма чисел в i-й строке матрицы A.

Рассмотрим второе упрощающее предположение $(Ae * Ae - 2A^2e) * Bd = 0$, которое означает, что $*$-произведение векторов $\big(Ae * Ae - 2A^2e\big)$ и Bd равно 0. Учитывая, что операция $*$ является просто покоординатным перемножением, каждая координата либо у одного, либо у другого вектора должна равняться 0. В развернутом виде эти уравнения выглядят так:

$$\begin{aligned}
&(1)\; 0 = 0,\\
&(2)\; b_2c_2^2/2 = 0,\\
&(3)\; b_3\big(c_3^2/2 - a_{32}c_2\big) = 0,\\
&(4)\; b_4\big(c_4^2/2 - (a_{42}c_2 + a_{43}c_3)\big) = 0,\\
&(5)\; b_5\big(c_5^2/2 - (a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4)\big) = 0,\\
&(6)\; b_6\big(c_6^2/2 - (a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5)\big) = 0,\\
&(7)\; b_7\big(c_7^2/2 - (a_{72}c_2 + a_{73}c_3 + a_{74}c_4 + a_{75}c_5 + a_{76}c_6)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Первая координата у первого вектора и последняя у второго всегда равны 0. Как было сказано, в этой работе мы ограничиваемся случаем $b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Сравнительно несложные вычисления показывают, что остальные координаты вектора (b_i) не могут обращаться в 0 (см. п. 5). Поэтому нулю должны быть равны соответствующие координаты $\big(Ae * Ae - 2A^2e\big)$. В результате получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&(5)\; c_5^2/2 = a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4,\\
&(6)\; c_6^2/2 = a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5,\\
&(7)\; c_7^2/2 = a_{72}c_2 + a_{73}c_3 + a_{74}c_4 + a_{75}c_5 + a_{76}c_6.
\end{aligned}$$

4. Система уравнений. Как известно [1], нижнетреугольная матрица $\tilde{A}$ и вектор b задают метод Рунге-Кутта порядка p. Следовательно, для каждого дерева t с весом не выше p выполнено равенство

$$\big\{b * \Phi_t(\tilde{A})\big\} = 1/\gamma(t).$$

В нашем случае мы получаем систему из 37 уравнений. С учетом упрощающих предположений, мы должны рассматривать не все уравнения, а лишь “неодноногие”. В результате получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{array}{ll}
4)\ \{b*\tilde{A}e*\tilde{A}e\} & =1/3,\\
6)\ \{b*\tilde{A}^2e*\tilde{A}e\} & =1/8,\\
7)\ \{b*\tilde{A}e*\tilde{A}e*\tilde{A}e\} & =1/4,\\
13)\ \{b*\tilde{A}^3e*\tilde{A}e\} & =1/30,\\
14)\ \big\{b*\tilde{A}(\tilde{A}e*\tilde{A}e)*\tilde{A}e\big\} & =1/15,\\
15)\ \{b*\tilde{A}^2e*\tilde{A}^2e\} & =1/20,\\
16)\ \{b*\tilde{A}^2e*\tilde{A}e*\tilde{A}e\} & =1/10,\\
17)\ \{b*\tilde{A}e*\tilde{A}e*\tilde{A}e*\tilde{A}e\} & =1/5,\\
27)\ \{b*\tilde{A}^4e*\tilde{A}e\} & =1/144,\\
28)\ \big\{b*\tilde{A}(\tilde{A}^2e*\tilde{A}e)*\tilde{A}e\big\} & =1/48,\\
29)\ \big\{b*\tilde{A}(\tilde{A}e*\tilde{A}e*\tilde{A}e)*\tilde{A}e\big\} & =1/24,\\
30)\ \big\{b*\tilde{A}^2(\tilde{A}e*\tilde{A}e)*\tilde{A}e\big\} & =1/72,\\
31)\ \{b*\tilde{A}^3e*\tilde{A}^2e\} & =1/72,\\
32)\ \big\{b*\tilde{A}(\tilde{A}e*\tilde{A}e)*\tilde{A}^2e\big\} & =1/36,\\
33)\ \{b*\tilde{A}^3e*\tilde{A}e*\tilde{A}e\} & =1/36,\\
34)\ \{b*\tilde{A}^2e*\tilde{A}^2e*\tilde{A}e\} & =1/18,\\
35)\ \big\{b*\tilde{A}(\tilde{A}e*\tilde{A}e)*\tilde{A}e\big\} & =1/24,\\
36)\ \{b*\tilde{A}^2e*\tilde{A}e*\tilde{A}e*\tilde{A}e\} & =1/12,\\
37)\ \{b*\tilde{A}e*\tilde{A}e*\tilde{A}e*\tilde{A}e*\tilde{A}e\} & =1/6.
\end{array}
$$

Как уже говорилось, решение будет получено с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого некоторые из переменных будут выражаться через остальные.

5. Вычисление b_i, c_5, c_6. Коэффициент b_7 не может равняться нулю, так как в противном случае мы не смогли бы получить 7-шаговый метод Рунге–Кутта. Поэтому из уравнения (7) основного упрощающего предположения следует, что $c_7 = 1$. В дальнейших выкладках коэффициент c_7 всюду заменен на 1.

Среди уравнений Батчера возьмем следующие:

$$
\begin{array}{c}
b_2c_2+b_3c_3+b_4c_4+b_5c_5+b_6c_6+b_7=1/2,\\
b_2c_2^2+b_3c_3^2+b_4c_4^2+b_5c_5^2+b_6c_6^2+b_7=1/3,\\
b_2c_2^3+b_3c_3^3+b_4c_4^3+b_5c_5^3+b_6c_6^3+b_7=1/4,\\
b_2c_2^4+b_3c_3^4+b_4c_4^4+b_5c_5^4+b_6c_6^4+b_7=1/5,\\
b_2c_2^5+b_3c_3^5+b_4c_4^5+b_5c_5^5+b_6c_6^5+b_7=1/6.
\end{array}
$$

Учитывая, что $b_2 = b_3 = b_4 = 0$, получаем систему пяти уравнений с пятью неизвестными:

$$
\begin{array}{c}
b_5c_5+b_6c_6+b_7=1/2,\\
b_5c_5^2+b_6c_6^2+b_7=1/3,\\
b_5c_5^3+b_6c_6^3+b_7=1/4,\\
b_5c_5^4+b_6c_6^4+b_7=1/5,\\
b_5c_5^5+b_6c_6^5+b_7=1/6.
\end{array}
$$

Эта система имеет два решения:

$$b_5=b_6=5/12, \qquad b_7=1/12, \qquad c_5=1/2+\sqrt{5}/10, \qquad c_6=1/2-\sqrt{5}/10;$$

$$b_5=b_6=5/12, \qquad b_7=1/12, \qquad c_5=1/2-\sqrt{5}/10, \qquad c_6=1/2+\sqrt{5}/10.$$

В дальнейших рассуждениях для определенности возьмем первое из этих двух решений. В случае второго решения все рассуждения аналогичны.

Таким образом, последняя строка матрицы A полностью найдена:

$$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\} = \{1/12, 0, 0, 0, 5/12, 5/12, 1/12\}.$$

Среди коэффициентов (c_i) уже определены $c_5 = 1/2 \pm \sqrt{5}/10$, $c_6 = 1/2 \mp \sqrt{5}/10$ и $c_7 = 1$.

6. Выбор свободных переменных. Свободные переменные, которым мы разрешим принимать произвольные значения, могут выбираться по-разному. В нашем случае в качестве свободных возьмем переменные c_2, c_3 и a_{65}. Выбор c_2 и c_3 вполне понятен. В качестве третьей свободной переменной естественно было бы выбрать c_4. Но в дальнейшем (п. 11) будет показано, что переменные c_4 и a_{65} связаны простым соотношением, в которое не входят остальные переменные. Из этого соотношения c_4 по заданному a_{65} находится однозначно, а при фиксированном c_4 переменная a_{65} может принимать, вообще говоря, два различных значения. Поэтому в качестве свободной и была выбрана переменная a_{65}.

Для наглядности параллельно с общими рассуждениями проведем вычисления и для конкретных значений свободных переменных:

$$c_2 = 4/7, \quad c_3 = 5/7, \quad a_{65} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Значение a_{65} подобрано так, чтобы $c_4 = 6/7$.

Соотношение между переменными c_4 и a_{65} получается лишь в самом конце цепочки рассуждений (см. ниже). В численном же примере мы им воспользуемся с самого начала и по заданному a_{65} сразу определим значение c_4.

7. Использование основного упрощающего предположения. С помощью основного упрощающего предположения последовательно найдем

$$a_{76} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \quad a_{75} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 5a_{65}.$$

В численном примере

$$a_{76} = \frac{5-\sqrt{5}}{2},\ a_{75} = \frac{5-3\sqrt{5}}{4}.$$

Из следующих трех равенств основного упрощающего предположения можно записать

$$a_{74} = -(b_6a_{64} + b_5a_{54})/b_7 = -5(a_{64} + a_{54}),$$

$$a_{73} = -(b_6a_{63} + b_5a_{53})/b_7 = -5(a_{63} + a_{53}),$$

$$a_{72} = -(b_6a_{62} + b_5a_{52})/b_7 = -5(a_{62} + a_{52}).$$

Здесь три переменные представлены в виде линейной комбинации остальных. Отметим, что в численном примере эти равенства выглядят точно так же.

Последнее же равенство при этих соотношениях оказывается выполнено автоматически и мы можем его далее не рассматривать.

8. Использование второго упрощающего предположения. Рассмотрим уравнения (5)–(7), приведенные в конце п. 3. Из уравнения (5) можно выразить a_{52}:

$$a_{52} = \frac{3-\sqrt{5}}{20c_2} - \frac{c_3}{c_2}a_{53} - \frac{c_4}{c_2}a_{54}.$$

Из уравнения (6) выразим a_{62}:

$$a_{62} = \frac{3+\sqrt{5}+2a_{65}(\sqrt{5}-5)}{20c_2} - \frac{c_3}{c_2}a_{63} - \frac{c_4}{c_2}a_{64}.$$

В рассматриваемом численном примере мы получим

$$a_{52} = \frac{7}{80}(3-\sqrt{5}) - \frac{5}{4}a_{53} - \frac{3}{2}a_{54},$$

$$a_{62} = \frac{7}{80}(3-\sqrt{5}) - \frac{5}{4}a_{63} - \frac{3}{2}a_{64}.$$

Соотношение (7) оказывается при этом тождественно выполнено, и его в дальнейшем рассматривать не будем.

В результате у нас остаются не выраженными через свободные следующие восемь переменных: a_{32}, c_4, a_{42}, a_{43}, a_{53}, a_{54}, a_{63}, a_{64}. При этом из исходной системы уравнений не обращаются тождественно в нуль лишь 10 уравнений (13, 14, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34).

9. Переменные a_{53}, a_{54}, a_{63}, a_{64}. Обратим внимание, что система из уравнений (14, 29, 31, 34) может рассматриваться как линейная относительно переменных a_{53}, a_{54}, a_{63}, a_{64}. Выпишем уравнения системы.

Уравнение 14:

$$(5+\sqrt{5})(c_3-c_2)c_3a_{53}-(5+\sqrt{5})(c_4-c_2)c_4a_{54}-(-5+\sqrt{5})(c_3-c_2)c_3a_{63}+(-5+\sqrt{5})(c_4-c_2)c_4a_{64}=$$
$$=(3-\sqrt{5})(20a_{65}c_2-15c_2-5\sqrt{5}c_2+2a_{65}\sqrt{5}-10a_{65}+2\sqrt{5}+6)/20.$$

Уравнение 29:

$$-(5+\sqrt{5})(c_3-c_2)(c_3+c_2)c_3a_{53}-(5+\sqrt{5})(c_4-c_2)(c_4+c_2)c_4a_{54}-(-5+\sqrt{5})(c_3-c_2)(c_3+c_2)c_3a_{63}+$$
$$+(-5+\sqrt{5})(c_4-c_2)(c_4+c_2)c_4a_{64}=(3-\sqrt{5})(20c_2^2a_{65}-15c_2^2-5c_2^2\sqrt{5}-6a_{65}+2a_{65}\sqrt{5}+\sqrt{5}+3)/20.$$

Уравнение 31:

$$-(7+\sqrt{5})a_{32}c_2a_{53}-(7+\sqrt{5})(a_{42}c_2+a_{43}c_3)a_{63}+(-7+\sqrt{5})a_{32}c_2a_{54}+$$
$$+(-7+\sqrt{5})(a_{42}c_2+a_{43}c_3)a_{64}=(-13+5\sqrt{5})(-66a_{65}+65+25\sqrt{5})/660.$$

Уравнение 34:

$$-(7+\sqrt{5})(c_3-c_2)c_3a_{53}-(7+\sqrt{5})(c_4-c_2)c_4a_{54}+(-7+\sqrt{5})(c_3-c_2)c_3a_{63}+(-7+\sqrt{5})(c_4-c_2)c_4a_{64}=$$
$$=(10-3\sqrt{5})(-330a_{65}c_2+240c_2+72\sqrt{5}c_2-33a_{65}\sqrt{5}+165a_{65}-30\sqrt{5}-100)/825.$$

Из этой системы уравнений мы можем выразить переменные a_{53}, a_{54}, a_{63}, a_{64} в виде рациональных выражений от переменных a_{32}, a_{42}, a_{43}. Если подставить эти выражения в исходные уравнения, то оказывается, что уравнения 32 и 33 тоже обратятся в нуль. Таким образом, остаются лишь четыре уравнения (13, 27, 28, 30), из которых надо найти четыре переменные a_{32}, a_{42}, a_{43}, a_{65}.

10. Переменные a_{32}, a_{42}, a_{43}. После подстановок, сделанных в предыдущем пункте, система из уравнений (13, 28, 30) может рассматриваться как линейная относительно переменных a_{32}, a_{42}, a_{43}. Следует обратить внимание на то, что эти переменные нельзя просто добавить к списку переменных из предыдущего пункта, поскольку уравнения получились бы нелинейными. Линейными они станут только после подстановки найденных выражений для a_{53}, a_{54}, a_{63}, a_{64}. Выпишем эти уравнения. Для компактности введем обозначения

$$t_1=-3+6a_{65}-5c_4c_2\sqrt{5}-10c_2a_{65}-2a_{65}\sqrt{5}-15c_4c_2+6c_4+6c_2-10a_{65}c_4-$$
$$-\sqrt{5}+2\sqrt{5}c_4+2c_2\sqrt{5}+20a_{65}c_4c_2+2a_{65}\sqrt{5}c_4+2c_2a_{65}\sqrt{5};$$

$$t_2=-3+2c_3\sqrt{5}+2c_3a_{65}\sqrt{5}+6a_{65}-10c_3a_{65}-10c_2a_{65}-2a_{65}\sqrt{5}-15c_2c_3+6c_3+6c_2-$$
$$-\sqrt{5}+2c_2\sqrt{5}-5c_2c_3\sqrt{5}+2c_2a_{65}\sqrt{5}+20a_{65}c_2c_3.$$

Тогда уравнения будут выглядеть следующим образом.

Уравнение 13:

$$t_1c_2c_4(c_4-c_2)a_{32}-t_2c_2c_3(c_3-c_2)a_{42}-t_2c_3^2(c_3-c_2)a_{43}=$$
$$-(-5+\sqrt{5})(4a_{65}-7-2\sqrt{5})(c_4-c_3)(c_4-c_2)(c_3-c_2)c_3/5.$$

Уравнение 28:

$$t_1c_2(c_4-c_2)a_{32}-t_2c_2(c_3-c_2)a_{42}-t_2c_3(c_3-c_2)a_{43}=$$
$$=-(3-\sqrt{5})(4a_{65}-7-3\sqrt{5})(c_4-c_3)(c_4-c_2)(c_3-c_2)/4.$$

Уравнение 30:

$$t_1c_2^2c_4(c_4-c_2)a_{32}-t_2c_2^2c_3(c_3-c_2)a_{42}-t_2c_3^3(c_3-c_2)a_{43}=$$
$$=(3-\sqrt{5})(4a_{65}-7-3\sqrt{5})(c_4-c_2)(c_4-c_3)(c_3-c_2)c_3c_4/6.$$

В рассматриваемом численном примере уравнения уже не будут содержать параметров.

Уравнение 13:

$$-128a_{32}+60a_{42}+75a_{43}=-30.$$

Уравнение 28:

$$-64a_{32} + 36a_{42} + 45a_{43} = -14.$$

Уравнение 30:

$$-1536a_{32} + 720a_{42} + 1125a_{43} = -280.$$

Из этой системы уравнений мы можем выразить переменные a_{32}, a_{42}, a_{43} в виде рациональных выражений от переменных c_2, c_3, c_4, a_{65}. К сожалению, громоздкость этих выражений не позволяет привести здесь их явный вид. В численном же примере решение имеет простой вид:

$$a_{32} = \frac{5}{6}, \quad a_{42} = -\frac{5}{18}, \quad a_{43} = \frac{16}{45}.$$

11. Переменные c_4, a_{65}. Наиболее удивительным в этой цепочке рассуждений является последнее оставшееся уравнение (27). После подстановки в него всех ранее найденных выражений одних переменных через другие получим некоторую рациональную функцию $\dfrac{P}{Q}$ от свободных переменных c_2, c_3, c_4 и последней оставшейся не найденной переменной a_{65}, обладающую тем замечательным свойством, что ее числитель зависит только от c_4 и a_{65}:

$$c_4(-10a_{65}^2 + a_{65}(10 + 4\sqrt{5}) - 9 - 4\sqrt{5}) - a_{65}^2(5 + \sqrt{5}) - a_{65}(3\sqrt{5} + 8) + 9 + 4\sqrt{5}.$$

Таким образом, переменные c_4 и a_{65} оказываются связанными очень простым соотношением, причем для выбранного значения c_4 переменная a_{65} может принимать два значения (в общем случае), а при выбранном значении a_{65} переменная c_4 находится однозначно:

$$c_4 = \frac{(\sqrt{5} - 5)(-5a_{65} + 5 + 2\sqrt{5})(-4a_{65} + 7 + 3\sqrt{5})}{20(-10a_{65}^2 + a_{65}(10 + 4\sqrt{5}) - 4\sqrt{5} - 9)}.$$

12. Численный пример. Выпишем окончательный ответ в рассматриваемом численном примере:

$$\begin{aligned}
&a_{21} = \frac{4}{7}, && a_{31} = \frac{115}{112},\\
&a_{32} = -\frac{5}{16}, && a_{41} = \frac{589}{630},\\
&a_{42} = \frac{5}{18}, && a_{43} = -\frac{16}{45},\\
&a_{51} = \frac{229}{1200} - \frac{29}{6000}\sqrt{5}, && a_{52} = \frac{119}{240} - \frac{187}{1200}\sqrt{5},\\
&a_{53} = -\frac{14}{75} + \frac{34}{375}\sqrt{5}, && a_{54} = -\frac{3}{100}\sqrt{5},\\
&a_{61} = \frac{71}{2400} - \frac{587}{12000}\sqrt{5}, && a_{62} = \frac{187}{480} - \frac{391}{2400}\sqrt{5},\\
&a_{63} = -\frac{38}{75} + \frac{26}{375}\sqrt{5}, && a_{64} = \frac{27}{80} - \frac{3}{400}\sqrt{5},\\
&a_{65} = \frac{1}{5}, && a_{71} = -\frac{49}{480} + \frac{43}{160}\sqrt{5},\\
&a_{72} = -\frac{425}{96} + \frac{51}{32}\sqrt{5}, && a_{73} = \frac{52}{15} - \frac{4}{5}\sqrt{5},\\
&a_{74} = -\frac{27}{16} + \frac{3}{16}\sqrt{5}, && a_{75} = \frac{5}{4} - \frac{4}{3}\sqrt{5},\\
&a_{76} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, && b_1 = \frac{1}{12},\\
&b_2 = b_3 = b_4 = 0, && b_5 = \frac{5}{12},\\
&b_6 = \frac{5}{12}, && b_7 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Величины c_i принимают при этом следующие значения:

$$(0, \quad 4/7, \quad 5/7, \quad 6/7, \quad (5 - \sqrt{5})/5, \quad (5 + \sqrt{5})/5, \quad 1).$$

Приведем, для справки, значения тех же коэффициентов в виде десятичных дробей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .57143 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0268 & -.3125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .93492 & .27778 & -.35556 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .18003 & .14738 & .01607 & -.06708 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.079798 & .02529 & -.3516 & .32073 & .80902 & 0 & 0 & 0 \\ .49886 & -.8633 & 1.6778 & -1.2682 & -.4270 & 1.3820 & 0 & 0 \\ .083333 & 0 & 0 & 0 & .41667 & .41667 & .0833333 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значения c_i равны

$$(0,\ .5714285714,\ .7142857143,\ .8571428571,\ .2763932022,\ .7236067978,\ 1.).$$

13. Сравнение точного и приближенного решения. Как уже говорилось ранее, первоначально методы со свойством $b_2 = b_3 = b_4 = 0$ были найдены приближенно с использованием метода Ньютона. После вычисления точных решений естественно было бы сравнить полученные результаты. В точном решении придадим свободным переменным c_2, c_3, a_{65} значения из приближенного, а затем вычислим все остальные по алгоритму, описанному в работе.

Точное	Приближенное	
0.0397738810636626820	0.039773881063662682	$a(2,1)$
−2.0232213068287026442	−2.023221306827968510	$a(3,1)$
2.4676666083882350242	2.467666608387500890	$a(3,2)$
1.5592163502993216408	1.559216350376527380	$a(4,1)$
−1.5836402510918297656	−1.583640251172941840	$a(4,2)$
0.7738073247325784584	0.773807324731646836	$a(4,3)$
0.2984961191036369227	0.298496119145833870	$a(5,1)$
−0.1599241405554434570	−0.159924140602171563	$a(5,2)$
0.1925752515959041894	0.192575251602742031	$a(5,3)$
−0.0547540278940766248	−0.054754027895784555	$a(5,4)$
−0.4034341508024866341	−0.403434150854270612	$a(6,1)$
0.4032361290994029897	0.403236129159694976	$a(6,2)$
−0.4580854271226429143	−0.458085427137972018	$a(6,3)$
0.2593977914292753504	0.259397791436325151	$a(6,4)$
0.9224924551464301780	0.922492455146430178	$a(6,5)$
1.5246901584942485567	1.524690158627587100	$a(7,1)$
−1.2165599427197976634	−1.216559942875305950	$a(7,2)$
1.3275508776336936246	1.327550877687950150	$a(7,3)$
−1.0232188176759936277	−1.023218817703943160	$a(7,4)$
−0.9944282869822560419	−0.994428286985249764	$a(7,5)$
1.3819660112501051518	1.381966011248961630	$a(7,6)$
0.0833333333333333333	0.083333333337165851	$b(1)$
0	0.000000000000000000	$b(2)$
0	0.000000000000000000	$b(3)$
0	0.000000000000000000	$b(4)$
0.4166666666666666667	0.416666666666321897	$b(5)$
0.4166666666666666667	0.416666666666321892	$b(6)$
0.0833333333333333333	0.083333333333264378	$b(7)$

Мы видим, что расхождение между точным и приближенным решением оказывается лишь в 11–12 знаке после запятой.

Следует учитывать, что при том объеме вычислений, который характерен при нахождении методов Рунге–Кутта, несмотря на сколь угодно тщательные проверки все равно сохраняется вероятность ошибки. Это относится как к аналитическим расчетам, так и к численным. Поэтому совпадение результатов, полученных двумя совершенно различными методами, служит хорошей дополнительной проверкой обоих подходов.

Отметим также, что локальная размерность многообразия решений в окрестности найденных численных решений этого типа ($b_2 = b_3 = b_4 = 0$) равна трем, что совпадает с размерностью аналитически найденного многообразия решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
2. *Хашин С.И.* Численное решение уравнений Бутчера // Вестник ИвГУ. 2000. Вып. 3. 155–164 (электронная версия статьи доступна по адресу `www.interline.ru/~khash1/article/num_iv2.zip`).
3. *Butcher J.C.* Coefficients for the study of Runge-Kutta iteration processes // J. of the Australian Math. Soc. 1963. **3**. 185–201.
4. *Butcher J.C.* Implicit Runge–Kutta processes // Math. Comp. 1964. **18**. 50–64.
5. *Butcher J.C.* On Runge–Kutta processes of high order. Part 2 // J. of the Australian Math. Soc. 1964. **4**. 179–194.
6. *Luther H.A.* An explicit sixth-order Runge–Kutta formula // Math. Comp. 1968. **22**. 434–436.
7. *Cassity C.R.* Solutions of the fifth-order Runge–Kutta equations // SIAM J. Numer. Anal. 1966. N 3. 598–606.

Поступила в редакцию
02.07.2001