УДК 517.958

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И СВОЙСТВА СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМИ КОШИ

Н. Л. Гольдман[1]

Исследуется проблема единственности в пространствах Гельдера для нехарактеристических задач Коши, возникающих при нахождении неизвестной правой части в параболических уравнениях. Установлена связь этой проблемы со свойствами плотности решений соответствующих сопряженных задач.

Ключевые слова: параболические уравнения, задача Коши, сопряженные задачи, условия единственности, пространства Гельдера.

Введение. Исследования задач с данными Коши для параболических уравнений с неизвестной правой частью вызваны как теоретическим, так и практическим интересом, который представляют эти задачи. Их существенное отличие от обычных нехарактеристических задач Коши (см., например, [1]) состоит в необходимости найти кроме решения еще и правую часть уравнения, используя некоторую дополнительную информацию. К рассматриваемому классу относятся, в частности, обратные задачи с граничным переопределением для параболических уравнений. Практическим приложением таких обратных задач в теплофизике является нахождение распределения по времени мощности тепловых источников по заданным на границе области температуре и тепловом потоке.

Основное внимание в настоящей работе уделено вопросам постановок и единственности решения в классах Гельдера для задач с данными Коши для линейных и квазилинейных параболических уравнений общего вида. Для исследования проблемы единственности развивается предложенный в [2, 3] подход, в основе которого лежит изучение свойств соответствующих сопряженных задач. Эти сопряженные задачи рассматриваются как своеобразные задачи граничного управления для линейных параболических уравнений. Для их решений устанавливаются некоторые свойства плотности с помощью известных результатов [1] о единственности решения нехарактеристической задачи Коши для этих уравнений.

Полученные на основе такого подхода достаточные условия единственности в пространствах Гельдера уточняют результаты из [2, 3] и, кроме того, расширяют класс обратных задач с граничным переопределением, обладающих свойством единственности (см., например, [4 – 6]).

1. Постановки задачи с данными Коши для квазилинейного уравнения. Пусть нехарактеристическая задача Коши в обычной постановке состоит в нахождении функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, удовлетворяющей уравнению

$$c(x,t,u)u_t - Lu = p_0(x,t)f(t) + p_1(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

и данным Коши на границе $x = l$

$$u\big|_{x=l} = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$a(x,t,u)u_x + e_1(t,u)u\big|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

где $Lu \equiv \big(a(x,t,u)u_x\big)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)$ — равномерно эллиптический оператор, $a \geqslant a_{\min} > 0$, b, $c \geqslant c_{\min} > 0$, d, f, p_0, p_1, e_1, q_1, φ и g — известные функции своих аргументов, $a_{\min}$, $c_{\min} = \mathrm{const} > 0$.

Если функция $f(t)$ в правой части уравнения (1) неизвестна, но при $x = 0$ задано условие

$$a(x,t,u)u_x - e_0(t,u)u\big|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{5}$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.ru

то одна из возможных постановок задачи с данными Коши состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих условиям (1)–(4) и дополнительному соотношению (5), в которых входные данные $a > 0$, b, $c > 0$, d, p_i, e_i, q_i $(i = 0, 1)$, φ и g предполагаются заданными.

Мы остановимся на другой возможной постановке, рассматривая задачу с данными Коши как обратную задачу с граничным переопределением: найти функции $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие уравнению (1), начальному условию (2), граничным условиям третьего рода (4), (5) при $x = 0$ и $x = l$ и дополнительному условию (3).

Сформулируем требования к входным данным этой обратной задачи, используя стандартные обозначения классов функций из [7].

(i). При $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, функции a, a_x, a_u, b, c, d равномерно ограничены, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $e_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1)$.

(ii). При $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ $\big(M_0 \geqslant \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|\big)$ производные a_{xx}, a_{xu}, a_{uu} и a_t равномерно ограничены, a_x, a_u, b, c, c_x, c_u и d принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\,\overline{D}\,)$, $0 < \lambda < 1$, функции e_i имеют равномерно ограниченные производные e_{it}, e_{iu}, e_{iuu} $(i = 0, 1)$.

(iii). Функции $p_0(x,t)$ и $p_1(x,t)$ принадлежат $H^{1,\lambda/2}(\,\overline{Q}\,)$, функция $\varphi(x)$ принадлежит $H^{2+\lambda}[0,l]$, производные q_{it} $(i = 0, 1)$ равномерно ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T$. Выполнены условия согласования при $t = 0$:

$$a(x,0,\varphi)\varphi_x - e_0(0,\varphi)\varphi\big|_{x=0} = q_0(0),$$
$$a(x,0,\varphi)\varphi_x + e_1(0,\varphi)\varphi\big|_{x=l} = q_1(0).$$

(iv). Функция $g(t)$ принадлежит $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ и удовлетворяет условию согласования $g\big|_{t=0} = \varphi\big|_{x=l}$.

Требования (i)–(iii) обеспечивают существование и единственность решения квазилинейной краевой задачи третьего рода для уравнения (1) в классе Гельдера $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\,\overline{Q}\,)$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ в правой части этого уравнения [7].

В соответствии с этим дадим следующее

Определение 1. Решением в классах Гельдера обратной задачи с граничным переопределением для уравнения (1) назовем пару функций $\big\{u^0(x,t), f^0(t)\big\}$: $u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\,\overline{Q}\,)$, $f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$, $0 < \lambda < 1$, удовлетворяющих соотношениям (1)–(5) в обычном смысле.

2. Единственность решения задачи с данными Коши в смысле определения 1. Рассматриваемая задача относится к некорректно поставленным. Это проявляется в возможном отсутствии решения при несогласованных входных данных и в его неустойчивости относительно погрешностей в их задании в случае существования (пример неустойчивости см. в [3]). Однако если решение $\big\{u^0(x,t), f^0(t)\big\}$ в смысле определения 1 существует, будет ли оно обладать свойством единственности?

2.1. Установим достаточные условия, при выполнении которых рассматриваемая задача не может иметь двух различных решений.

Допустим, что $\big\{u_1^0, f_1^0\big\}$ и $\big\{u_2^0, f_2^0\big\}$ — два решения обратной задачи (1)–(5). Функции u_1^0 и u_2^0 можно рассматривать как решения третьей краевой задачи для уравнения (1), соответствующие функциям f_1^0 и f_2^0 в его правой части. Следовательно, для них справедливы оценки в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\,\overline{Q}\,)$ [7]: $\big|u_1^0, u_2^0\big|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant M$, $M = \mathrm{const} > 0$.

Для разностей $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$ и $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$ в силу (1)–(5) имеют место соотношения

$$c(x,t,u_1^0)\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u = p_0(x,t)\Delta f(t), \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$
$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x - \mathcal{E}_0 \Delta u\big|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{7}$$
$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x\big|_{x=l} = 0, \quad \Delta u\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{8}$$
$$\Delta u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{9}$$

в которых $\mathcal{L}\Delta u \equiv \big(a(x,t,u_1^0)\Delta u_x\big)_x - \mathcal{A}_1 \Delta u_x - \mathcal{A}_2 \Delta u$, $\quad \mathcal{A}_1 = b(x,t,u_1^0) - a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0$,

$$\mathcal{A}_2 = c_u(x,t,u_1^0)u_{2t}^0 + b_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0 + d_u(x,t,u_1^0) - \big\{a_u u_{2xx}^0 + a_{uu}(u_{2x}^0)^2 + a_{xu}u_{2x}^0\big\},$$
$$\mathcal{E}_0 = \big\{-a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0 + e_0(t,u_1^0) + e_{0u}(t,u_1^0)u_2^0\big\}\big|_{x=0}.$$

Требования (i)–(iii) и принадлежность $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ классу $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\,\overline{Q}\,)$ позволяют заключить, что все коэффициенты линейного оператора $\mathcal{L}$ и граничных условий (7), (8) непрерывны как функции от (x,t) и t соответственно.

2.2. Свойства краевой задачи, сопряженной с (6) – (9). Для доказательства утверждения, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, потребуется изучить краевую задачу

$$\big(c(x,t,u_1^0)\psi\big)_t + \mathcal{L}^*\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{10}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{11}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x + \mathcal{A}_1\psi\big|_{x=l} = \eta(t), \quad 0 \leqslant t < T, \tag{12}$$

$$\psi\big|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{13}$$

где $\mathcal{L}^*\psi \equiv \big(a(x,t,u_1^0)\psi_x\big)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$, $\eta(t)$ — произвольная функция, пробегающая пространство $H^{1/2}[0,T]$.

Лемма 1. *Пусть входные данные обратной задачи* (1) – (5) *удовлетворяют требованиям* (i) – (iv) *и, кроме того, функция* $c(x,t,u)$ *имеет непрерывную производную по* t *при* $(x,t,u) \in \overline{D}$. *Тогда при любой функции* $\eta(t) \in H^{1/2}[0,T]$ *соответствующее решение* $\psi(x,t;\eta)$ *сопряженной задачи* (10) – (13) *удовлетворяет соотношению*

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi(x,t;\eta)p_0(x,t)\Delta f(t)\,dx\,dt = 0 \quad \forall \eta(t) \in H^{1/2}[0,T]. \tag{14}$$

Доказательство леммы 1. Ограничимся его кратким изложением, подробнее см. в [3]. Прежде всего заметим, что все коэффициенты в уравнении (10) непрерывны в $\overline{Q}$ как функции (x,t) в силу гладкости входных данных и принадлежности $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ классу $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$. Аналогичные рассуждения с учетом свойств граничной функции e_0 позволяют установить, что все коэффициенты в граничных условиях (11), (12) непрерывны как функции t при $0 \leqslant t \leqslant T$. Следовательно, задача (10) – (13), являясь линейной краевой задачей относительно функции $\psi(x,t;\eta)$, разрешима в классе $\psi(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$. Ее производная $\psi_x(x,t)$ будет принадлежать классу $C(\overline{Q}) \cap H^{1,1/2}(Q)$. Более того, $\psi(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q})$, $\psi_x(x,t) \in H^{1,1/2}(\overline{Q})$ кроме точки $x = l$, $t = T$; если же $\eta\big|_{t=T} = 0$, то принадлежность $\psi(x,t)$ и $\psi_x(x,t)$ этим классам имеет место во всей замкнутой области $\overline{Q}$ [7].

Для доказательства (14) рассматривается выражение

$$I = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi\{c\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u\}\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Delta u\big\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\big\}\,dx\,dt,$$

для которого в силу (6) и (10) справедливо соотношение $I = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi(x,t)p_0(x,t)\Delta f(t)\,dx\,dt$. С другой стороны, интегрирование по частям с учетом (6) – (9) и (10) – (13) приводит к равенству

$$I = \int\limits_0^T \Delta u\big|_{x=l}\{a\psi_x + \mathcal{A}_1\psi\}\big|_{x=l}\,dt - \int\limits_0^T \Delta u\big|_{x=0}\big\{a\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi\big\}\big|_{x=0}\,dt = 0.$$

Отсюда и следует утверждение леммы 1.

Предполагая выполненными требования леммы 1, установим еще несколько свойств сопряженной задачи (10) – (13), рассматривая ее как своеобразную задачу граничного управления, в роли которого выступает функция $\eta(t)$.

Лемма 2. *Пусть при любой функции* $\eta(t) \in H^{1/2}[0,T]$ *соответствующее решение сопряженной задачи* (10) – (13) *удовлетворяет на границе* $x = l$ *области* $\overline{Q}$ *соотношению* $\int\limits_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=l}\theta(t)\,dt = 0$ *для некоторой непрерывной функции* $\theta(t)$. *Тогда* $\theta(t) = 0$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$, *т.е. множество следов* $\big\{\psi(l,t;\eta)\big\}$, *получаемое при пробегании функцией* $\eta(t)$ *пространства* $H^{1/2}[0,T]$, *является всюду плотным.*

Доказательство леммы 2. На границе $x = l$ из условия (13) и произвольности функции $\eta(t)$ очевидным образом следует плотность множества $\big\{(a\psi_x + \mathcal{A}_1\psi)\big|_{x=l}\big\}$, а также плотность множества $\big\{(a\psi_x)\big|_{x=l}\big\}$

в случае $\mathcal{A}_1(x,t)\big|_{x=l}=0$. Очевидно также, что при $\mathcal{A}_1(x,t)\big|_{x=l}=0$ множество $\{\psi(x,t;\eta)\}\big|_{x=l}$ тоже плотно. В случае $\Big|\mathcal{A}_1(x,t)\big|_{x=l}\Big|>0$ при $0\leqslant t\leqslant T$ покажем, что для функции $\theta(t)=\mathcal{A}_1(x,t)\big|_{x=l}w(t)$, где $w(t)$ — некоторая непрерывная функция, из соотношения

$$\int\limits_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=l}\,\mathcal{A}_1(x,t)\big|_{x=l}w(t)\,dt=0\quad\forall\eta(t)\in H^{1/2}[0,T]$$

вытекает, что $w(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$. Действительно, из этого соотношения и из (12) следует, что

$$\int\limits_0^T \eta(t)w(t)\,dt-\int\limits_0^T (a\psi_x)\big|_{x=l}w(t)\,dt=0.$$

Пользуясь произвольностью функции $\eta(t)$ и полагая $\eta(t)=w(t)$, приходим к равенству

$$\int\limits_0^T w^2(t)\,dt-\int\limits_0^T (a\psi_x)\big|_{x=l}w(t)\,dt=0, \tag{15}$$

выполнение которого и означает, что $w(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$.

Действительно, если предположить, например, что (15) имеет место из-за равенства $(a\psi_x)\big|_{x=l}=w(t)$ при $0\leqslant t<T$, то из (12) при $\eta(t)=w(t)$ следует, что $\mathcal{A}_1\psi\big|_{x=l}=0$, $0\leqslant t\leqslant T$. Но решением сопряженной задачи для уравнения (10) с таким граничным условием при $x=l$ является $\psi(x,t;w)\equiv 0$, $(x,t)\in\overline{Q}$. Следовательно, и $\psi_x\big|_{x=l}=0$, $0\leqslant t\leqslant T$, т.е. $w(t)=0$.

Предположение, что $\int\limits_0^T (a\psi_x)\big|_{x=l}w(t)\,dt=0$, сразу приводит, в силу (15), к выводу, что $w(t)=0$.

Очевидное противоречие с (15) возникает, если предположить, что $\int\limits_0^T (a\psi_x)\big|_{x=l}w(t)\,dt<0$.

Если же предположить, что

$$\int\limits_0^T (a\psi_x)\big|_{x=l}w(t)\,dt>0,\qquad \int\limits_0^T w^2(t)\,dt>0,$$

то, рассматривая различные случаи знакоопределенности функций $w(t)$ и $w(t)-(a\psi_x)\big|_{x=l}$ на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$, приходим к противоречию с равенством (15).

Осталось рассмотреть соотношение $\int\limits_0^T w^2(t)\,dt=\int\limits_0^T (a\psi_x)\big|_{x=l}w(t)\,dt>0$ в предположении, что на некотором отрезке $[t^*,t^{**}]\subset[0,T]$ $(a\psi_x)\big|_{x=l}=w(t)$, а вне этого отрезка $w(t)=0$. Тогда из (12) при $\eta(t)=w(t)$ следует, что

$$\mathcal{A}_1\psi\big|_{x=l}=0,\quad t^*\leqslant t\leqslant t^{**},\quad a\psi_x+\mathcal{A}_1\psi\big|_{x=l}=0,\quad 0\leqslant t<t^*,\quad t^{**}<t<T.$$

Сопряженная задача для уравнения (10) с такими граничными условиями при $x=l$ имеет решение $\psi(x,t;w)\equiv 0$, $(x,t)\in\overline{Q}$. Это означает, в частности, что $\psi_x\big|_{x=l}=0$, $0\leqslant t\leqslant T$, т.е. функция $w(t)=0$ не только вне отрезка $[t^*,t^{**}]$, но и при $t^*\leqslant t\leqslant t^{**}$.

Аналогичные рассуждения справедливы и в том случае, когда такие предположения относительно функций $(a\psi_x)\big|_{x=l}$ и $w(t)$ выполнены на конечном числе отрезков $[t_k^*,t_k^{**}]\subset[0,T]$, $k=\overline{1,K}$. Это завершает доказательство леммы 2 для случая $\big|\mathcal{A}_1(x,t)\big|_{x=l}\big|>0$.

Лемма 3. *Пусть при любой функции* $\eta(t)\in H^{1/2}[0,T]$ *соответствующее решение сопряженной задачи* (10)–(13) *удовлетворяет на границе* $x=0$ *области* $\overline{Q}$ *соотношению*

$$\int\limits_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=0}\,w(t)\,dt=0\quad\forall\eta(t)\in H^{1/2}[0,T], \tag{16}$$

для некоторой непрерывной функции $w(t)$. Тогда $w(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, т.е. множество следов $\{\psi(0,t;\eta)\}$, получаемое при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $H^{1/2}[0,T]$, обладает свойством плотности.

При выводе леммы 3 (подробнее см. в [3]) используется сопряженная с (10)–(13) линейная краевая задача, (ср. с (6)–(9)):

$$c(x,t,u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{17}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x - \mathcal{E}_0 z\big|_{x=0} = w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{18}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{19}$$

$$z\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{20}$$

где $\mathcal{L}z \equiv \big(a(x,t,u_1^0)z_x\big)_x - \mathcal{A}_1 z_x - \mathcal{A}_2 z$, коэффициенты $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{E}_0$ имеют тот же вид, что и в задаче (6)–(9), и обладают теми же свойствами гладкости как функции от (x,t) и t.

Для решения этой задачи $z(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ устанавливается дополнительное условие $z\big|_{x=l} = 0$. Для его доказательства рассматривается выражение

$$II = \int_0^T \int_0^l z\big\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\big\}\,dx\,dt + \int_0^T \int_0^l \psi\{cz_t - \mathcal{L}z\}\,dx\,dt,$$

которое равно 0 в силу однородности уравнений (10) и (17). С другой стороны, интегрирование по частям с учетом соотношений (10)–(13) и (17)–(20) дает

$$II = \int_0^T z\big|_{x=l}\,\eta(t)\,dt + \int_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=0}\,w(t)\,dt.$$

Отсюда в силу произвольности функции $\eta(t)$ и предположения (16) и вытекает, что $z\big|_{x=l} = 0$.

Полученное условие $z\big|_{x=l} = 0$ и граничное условие (19) представляют собой данные Коши для линейного параболического уравнения (17), коэффициенты которого как функции от (x,t) удовлетворяют требованиям гладкости, налагаемым в [1] для единственности решения нехарактеристической задачи Коши. Как и в [3], можно обосновать применимость соответствующих результатов из [1] и заключить, что $z(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Следовательно, в силу (18) $w(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, что завершает вывод леммы 3.

Следствие. *Если для $x = 0$ выполнено неравенство $\left|(\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\big|_{x=0}\right| > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, то свойством плотности обладает также и множество следов $\big\{\psi_x(x,t;\eta)\big|_{x=0}\big\}$ при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $H^{1/2}[0,T]$.*

Действительно, пусть выполнено соотношение $\displaystyle\int_0^T a\psi_x(x,t;\eta)\big|_{x=0}\,w(t)\,dt = 0$ для некоторой непрерывной функции $w(t)$ при любой функции $\eta(t) \in H^{1/2}[0,T]$. Тогда из (11) и этого соотношения следует, что $\displaystyle\int_0^T (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\big|_{x=0}\,\psi(x,t;\eta)\big|_{x=0}\,w(t)\,dt = 0$. В силу плотности множества $\big\{\psi(0,t;\eta)\big\}$ это означает, что $(\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\big|_{x=0}\,w(t) = 0$, т.е. $w(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Установим теперь свойства усредненных на интервале $(0,l_0)$ функций $\Psi(t;\eta) = l_0^{-1}\displaystyle\int_0^{l_0} \psi(x,t;\eta)\,dx$, где l_0 — произвольная точка, $0 < l_0 < l$.

Лемма 4. *Когда функция $\eta(t)$ в граничном условии (12) пробегает пространство $H^{1/2}[0,T]$, соответствующие усредненные функции $\Psi(t;\eta)$ образуют множество, всюду плотное в $L_2[0,T]$.*

Доказательство леммы 4. Заметим прежде всего, что в любой достаточно малой окрестности границ $x = 0$ и $x = l$ свойством плотности обладают множества следов $\big\{\psi(x,t;\eta)\big|_{x=\varepsilon}\big\}$ и $\big\{\psi(x,t;\eta)\big|_{x=l-\varepsilon}\big\}$. Это следует из плотности множеств $\big\{\psi(x,t;\eta)\big|_{x=0}\big\}$, $\big\{\psi(x,t;\eta)\big|_{x=l}\big\}$ (леммы 2, 3) и из непрерывности решений сопряженной задачи (10)–(13) при любой функции $\eta(t) \in H^{1/2}[0,T]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое малое, но конечное число. В области $\overline{Q}_s = \{s \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где $\varepsilon \leqslant s \leqslant l-\varepsilon$, рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения (17):

$$c(x,t,u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x,t) \in Q_s, \tag{21}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x + \big(a(x,t,u_1^0)z\big)_x - \mathcal{A}_1 z\big|_{x=s} = w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{22}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{23}$$

$$z\big|_{t=0} = 0, \quad s \leqslant x \leqslant l, \tag{24}$$

в которой $w(t)$ — некоторая непрерывная функция.

Как и при доказательстве леммы 3, требования гладкости входных данных и принадлежность $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ классу $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ позволяют заключить, что эта линейная краевая задача имеет решение $z(x,t;s) \in C(\overline{Q}_s) \cap C^{2,1}(Q_s)$. Более того, если $w(t) \in H^{1/2}[0,T]$, то $z(x,t;s) \in C^{2,1}(\overline{Q}_s)$ кроме точки $x = s$, $t = 0$, и $z(x,t;s) \in C^{2,1}(\overline{Q}_s)$, если $w\big|_{t=0} = 0$. Очевидно, что в силу своей гладкости и устойчивости относительно входных данных решение $z(x,t;s)$ непрерывным образом зависит от параметра s [7].

Пусть l_0 — произвольная точка, $\varepsilon < l_0 \leqslant l-\varepsilon$. Предположим, что при любой функции $\eta(t) \in H^{1/2}[0,T]$ выполнены соотношения

$$\int_0^T \int_\varepsilon^{l_0} \psi(x,t;\eta)\, w(t)\, dx\, dt = 0, \tag{25}$$

$$\int_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=\varepsilon} w_1(t)\, dt = 0, \quad \int_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=l_0} w_2(t)\, dt = 0, \tag{26}$$

в которых $w_1(t) = a(x,t,u_1^0)\big|_{x=\varepsilon} z(x,t;\varepsilon)\big|_{x=\varepsilon}$, $w_2(t) = a(x,t,u_1^0)\big|_{x=l_0} z(x,t;l_0)\big|_{x=l_0}$.

Покажем, что тогда $w(t) = 0$, $w_1(t) = 0$ и $w_2(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим выражение

$$III = \int_0^T \int_s^l z\big\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\big\}\, dx\, dt + \int_0^T \int_s^l \psi\{cz_t - \mathcal{L}z\}\, dx\, dt, \tag{27}$$

которое представляет собой некоторую функцию параметра s. Обозначим ее $F(s)$.

Очевидно, что при всех s, $\varepsilon \leqslant s \leqslant l_0$, $F(s) = 0$ в силу однородности уравнений (10) и (21). С другой стороны, интегрируя (27) по частям с учетом соотношений (10)–(13) и (21)–(24), устанавливаем, что при всех s, $\varepsilon \leqslant s \leqslant l_0$, выполнено

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^T z(x,t;s)\big|_{x=l} \eta(t)\, dt + \int_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=s} \big\{az_x(x,t;s) - \mathcal{A}_1 z(x,t;s)\big\}\big|_{x=s} dt - \\ - \int_0^T \psi_x(x,t;\eta)\big|_{x=s} \big\{az(x,t;s)\big\}\big|_{x=s} dt. \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, можно заключить, что $\int_\varepsilon^{l_0} F(s)\, ds = 0$, а это вместе с (28) и (22) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\varepsilon^{l_0} z(x,t;s)\big|_{x=l} \eta(t)\, ds\, dt + \int_0^T \int_\varepsilon^{l_0} \psi(s,t;\eta) w(t)\, ds\, dt - \\ - \int_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=l_0} \big\{az(x,t;l_0)\big\}\big|_{x=l_0} dt + \int_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=\varepsilon} \big\{az(x,t;\varepsilon)\big\}\big|_{x=\varepsilon} dt = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Из этого соотношения и из (25), (26) вытекает, что $\int\limits_0^T \int\limits_\varepsilon^{l_0} z(x,t;s)\big|_{x=l}\, ds\, \eta(t)\, dt = 0$, где $z(x,t;s)\big|_{x=l}$ — след на границе $x=l$ решения задачи (21)–(24) в области $\overline{Q}_s$. Отсюда, пользуясь произвольностью функции $\eta(t)$, можно установить, что

$$\int\limits_\varepsilon^{l_0} z(x,t;s)\big|_{x=l}\, ds = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

при любом l_0, $\varepsilon < l_0 \leqslant l-\varepsilon$. Рассматривая этот интеграл как функцию t и верхнего предела, приходим к равенству $z(x,t;l_0)\big|_{x=l} = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Полученное условие $z(x,t;l_0)\big|_{x=l} = 0$ вместе с условием (23) означает, что на границе $x=l$ области $\overline{Q}_{l_0} = \{l_0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ заданы нулевые данные Коши. Используя, как и при выводе леммы 3, результаты [1] о единственности решения такой нехарактеристической задачи Коши, приходим к тождеству $z(x,t;l_0) \equiv 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}_{l_0}$. Тогда на границе $x=l_0$ этой области при $0 \leqslant t \leqslant T$ имеют место равенства $w(t)=0$ (в силу условия (22)) и $w_2(t) = a(x,t,u_1^0)\big|_{x=l_0} z(x,t;l_0)\big|_{x=l_0} = 0$.

Заметим также, что при $w(t)=0$ краевая задача (21)–(24) в области $\overline{Q}_s$ при $s=\varepsilon$ имеет решение $z(x,t;\varepsilon) \equiv 0$. Следствием этого тождества и граничного условия (22) при $x=\varepsilon$ является утверждение, что $w_1(t)=0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и l_0, $\varepsilon < l_0 \leqslant l-\varepsilon$, заключаем, что усредненные на интервале $0<x<l_0$ функции $\Psi(t;\eta)$ обладают свойством плотности, в том числе и на всем интервале $0<x<l$. Лемма 4 доказана.

Введем теперь функции

$$\Psi(t;\eta;p_0) = l_0^{-1} \int\limits_0^{l_0} p_0(x,t)\, \psi(x,t;\eta)\, dx, \quad 0 < l_0 < l, \tag{30}$$

которые можно рассматривать как усреднения с весом $p_0(x,t)$ решений сопряженной задачи (10)–(13) на интервале $0<x<l_0$. Обобщением леммы 4 является

Лемма 5. *Пусть коэффициент $p_0(x,t)$ удовлетворяет в области $\overline{Q}$ неравенству $\big|p_0(x,t)\big| > 0$. Тогда при пробегании функцией $\eta(t)$ в граничном условии (12) пространства $H^{1/2}[0,T]$ соответствующие усреднения $\Psi(t;\eta;p_0)$ образуют множество, всюду плотное в $L_2[0,T]$.*

Доказательство леммы 5 повторяет с соответствующими изменениями доказательство предыдущей леммы. Граничное условие при $x=s$ принимает вид (ср. с (22)):

$$a(x,t,u_1^0) z_x + \big(a(x,t,u_1^0) z\big)_x - \mathcal{A}_1 z\big|_{x=s} = p_0(x,t)\big|_{x=s}\, w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{31}$$

что приводит к интегральному соотношению (ср. с (29))

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T \int\limits_\varepsilon^{l_0} z(x,t;s)\big|_{x=l}\, \eta(t)\, ds\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_\varepsilon^{l_0} \psi(s,t;\eta) p_0(s,t)\, w(t)\, ds\, dt - \\ - \int\limits_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=l_0} \big\{a z(x,t;l_0)\big\}\big|_{x=l_0} dt + \int\limits_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=\varepsilon} \big\{a z(x,t;\varepsilon)\big\}\big|_{x=\varepsilon} dt = 0 \end{gathered} \tag{32}$$

для произвольной точки l_0, $\varepsilon < l_0 \leqslant l-\varepsilon$. Краевая задача для уравнения (21) с граничным условием (31) имеет решение $z(x,t;s) \in C(\overline{Q}_s) \cap C^{2,1}(Q_s)$, которое, в силу своей гладкости и устойчивости относительно входных данных и в силу непрерывности коэффициента $p_0(s,t)$, является непрерывной функцией параметра s [7]. По аналогии с леммой 4, для $z(x,t;l_0)$ устанавливается дополнительное условие $z(x,t;l_0)\big|_{x=l} = 0$ при любом l_0, $\varepsilon < l_0 \leqslant l-\varepsilon$. Вместе с условием (23) это означает в силу [1], что $z(x,t;l_0) \equiv 0$ в области $\overline{Q}_{l_0}$. Но тогда на границе $x=l_0$ этой области из условия (31) вытекает, что $p_0(x,t)\big|_{x=l_0} w(t) = 0$, т.е. $w(t)=0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ вследствие неравенства $\big|p_0(x,t)\big| > 0$ в $\overline{Q}$.

Установим еще некоторые свойства усредненных функций $\Psi(t;\eta;p_0)$.

Лемма 6. *Предположим, что неравенство* $\left|p_0(x,t)\right| > 0$ *будет иметь место в некоторой области* $Q' = \{x_0 < x < x_1, 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset \overline{Q}$, *вне которой* $p_0(x,t) = 0$. *Тогда при пробегании функцией* $\eta(t)$ *пространства* $H^{1/2}[0,T]$ *соответствующее множество усреднений*

$$\Psi(t;\eta;p_0) = (l_0 - x_0)^{-1} \int\limits_{x_0}^{l_0} p_0(x,t)\, \psi(x,t;\eta)\, dx, \quad x_0 < l_0 < x_1, \tag{33}$$

обладает свойством плотности в $L_2[0,T]$.

Доказательство леммы 6. Используем ту же схему доказательства, что и для леммы 5. В областях $\overline{Q}_s = \{s \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где $0 < s < l$, рассматривается краевая задача (21) – (24), в которой граничное условие (22) заменяется граничным условием (31).

Очевидно, что решением такой задачи в $\overline{Q}_s$ при значениях s, $0 < s \leqslant x_0$ и $x_1 \leqslant s < l$, является $z(x,t;s) \equiv 0$ в силу предположений леммы 6 относительно коэффициента $p_0(x,t)$: $p_0(x,t) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $x_1 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Но тогда интегральное соотношение, аналогичное (32), принимает следующий вид для произвольной точки l_0, $x_0 < l_0 < x_1$:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{x_0}^{l_0} z(x,t;s)\big|_{x=l}\, \eta(t)\, ds\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{x_0}^{l_0} \psi(s,t;\eta)\, p_0(s,t)\, w(t)\, ds\, dt -$$

$$- \int\limits_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=l_0} \left\{az(x,t;l_0)\right\}\big|_{x=l_0} dt + \int\limits_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=x_0} \left\{az(x,t;x_0)\right\}\big|_{x=x_0} dt = 0.$$

Повторяя рассуждения при выводе лемм 4 и 5, можно установить, что решение $z(x,t;l_0)$ удовлетворяет на границе $x = l$ области $\overline{Q}_{l_0} = \{l_0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ дополнительному условию $z(x,t;l_0)\big|_{x=l} = 0$ при любом l_0, $x_0 < l_0 < x_1$. Это условие вместе с граничным условием (23) позволяет заключить [1], что $z(x,t;l_0) \equiv 0$ в $\overline{Q}_{l_0}$. Но тогда, учитывая условие (31) на границе $x = l_0$ и неравенство $|p_0(x,t)| > 0$ при $(x,t) \in Q'$, приходим к выводу, что $w(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Лемма 6 для усреднений вида (33) доказана.

2.3. Достаточные условия единственности для обратной задачи (1) – (5). Установленные свойства решений сопряженной задачи (10) – (13) позволяют сформулировать теоремы единственности решения $\left\{u^0(x,t), f^0(t)\right\}$ в смысле определения 1.

Теорема 1. *Пусть входные данные обратной задачи* (1) – (5) *удовлетворяют требованиям* (i) – (iv) *и, кроме того, функция* $c(x,t,u)$ *имеет непрерывную производную по* t *при* $(x,t,u) \in \overline{D}$. *Предположим также, что при* $(x,t) \in \overline{Q}$ *выполнено неравенство* $|p_0(x,t)| > 0$. *Тогда в случае существования решения обратной задачи* (1) – (5) $\left\{u^0(x,t), f^0(t)\right\}$ *в классах Гельдера* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$ *оно определяется однозначно.*

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1. *Коэффициент* $p_0(x,t)$ *удовлетворяет неравенству* $\left|p_0(x,t)\right| > 0$ *в некоторой подобласти* $Q' = \{x_0 < x < x_1, 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset \overline{Q}$, *вне которой* $p_0(x,t) = 0$. *Тогда решение* $\left\{u^0(x,t), f^0(t)\right\}$ *обратной задачи* (1) – (5) *в смысле определения 1 также обладает свойством единственности в классах Гельдера* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$.

Для доказательства этих утверждений достаточно воспользоваться свойством плотности усреднений $\Psi(t;\eta;p_0)$ (лемма 5 для теоремы 1 и, соответственно, лемма 6 для теоремы 2), чтобы заключить из интегрального соотношения (14) леммы 1, что $\Delta f(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда из соотношений (6) – (9), которые представляют собой линейную краевую задачу с гладкими коэффициентами относительно Δu, вытекает в силу единственности решения такой задачи [7], что $\Delta u \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Эти рассуждения завершают доказательство теорем 1 и 2.

Замечание 1. Полученные результаты подтверждают справедливость соответствующих теорем единственности, сформулированных ранее в [2, 3]. Уточнение, которое необходимо сделать в [2, 3], касается только применения к интегральному соотношению леммы 1 свойств плотности усреднений $\Psi(t;\eta;p_0)$.

2.4. Остановимся кратко на достаточных условиях единственности, которые вытекают из проведенного исследования в том случае, когда обратная задача состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих линейному параболическому уравнению

$$c(x,t)u_t - Lu = p_0(x,t)f(t) + p_1(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{34}$$

где $Lu \equiv \big(a(x,t)u_x\big)_x - b(x,t)u_x - d(x,t)u$, и граничным условиям

$$a(x,t)u_x - e_0(t)u\big|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{35}$$

$$a(x,t)u_x + e_1(t)u\big|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{36}$$

начальному условию (2) и граничному наблюдению (3).

Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ в классах Гельдера принимает следующий вид.

Теорема 3. *Предположим, что входные данные линейной краевой задачи* (34) – (36), (2) *удовлетворяют требованиям гладкости и согласования, обеспечивающим существование и единственность* $u(x,t)$ *в* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ *при любой функции* $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ *в правой части уравнения* (34)*:*

$$\begin{aligned}
&a, a_x, b, c, c_x, d \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad p_i \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad 0 < \lambda < 1,\\
&e_i, q_i \in H^{(1+\lambda)/2}[0,T], \quad e_i \geqslant 0, \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0,l], \quad i = 0,1,\\
&a(x,0)\varphi_x - e_0(0)\varphi\big|_{x=0} = q_0(0), \quad a(x,0)\varphi_x + e_1(0)\varphi\big|_{x=l} = q_1(0).
\end{aligned}$$

Пусть, кроме того, производные a_t, b_x *и* c_t *непрерывны в* $\overline{Q}$, *функция* $g(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T]$, $\big|p_0(x,t)\big| > 0$ *либо во всей области* $\overline{Q}$, *либо в ее подобласти* $Q' = \{x_0 < x < x_1, 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset \overline{Q}$, *вне которой* $p_0(x,t) = 0$. *Тогда решение* $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ *такой обратной задачи в случае его существования единственно в классе функций* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$.

Доказательство повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теорем 1, 2, опираясь на соотношение (14) для решения $\psi(x,t;\eta)$ сопряженной задачи, имеющей в данном случае вид

$$\begin{aligned}
&\big(c(x,t)\psi\big)_t + \big(a(x,t)\psi_x\big)_x + \big(b(x,t)\psi\big)_x - d(x,t)\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T,\\
&a(x,t)\psi_x - \big(e_0(t) - b(x,t)\big)\psi\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < T,\\
&a(x,t)\psi_x + b(x,t)\psi\big|_{x=l} = \eta(t), \quad 0 \leqslant t < T, \quad \psi\big|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,
\end{aligned}$$

и на плотность множества усреднений $\Psi(t;\eta;p_0)$ при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $H^{1/2}[0,T]$.

2.5. Класс допустимых решений для обратных задач с граничным переопределением. Выбор пространств Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$ для решения рассматриваемых обратных задач о нахождении неизвестной правой части в параболических уравнениях типа (1) и (34) является естественным, так как он обусловлен точными дифференциальными зависимостями в классах Гельдера между входными данными и решением соответствующих краевых задач (т.е. прямых постановок задач Неймана).

Однако если функция f в правой части уравнения (1) или (34) ищется в виде $f(x,t)$, а не $f(t)$, то такая обратная задача не обладает, вообще говоря, свойством единственности (см. примеры в [3]). Таким образом, класс, состоящий из пар функций $\{u(x,t), f(t)\} \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$, является естественным классом допустимых решений рассматриваемых обратных задач с граничным переопределением для линейных и квазилинейных уравнений.

3. Достаточные условия единственности для обратной задачи со смешанными краевыми условиями. Предположим теперь, что вместо (5) дополнительным условием к задаче с данными Коши для параболического уравнения (1) с неизвестной правой частью $f(t)$ является условие

$$u\big|_{x=0} = v(t), \quad 0 < t \leqslant T. \tag{37}$$

3.1. Рассмотрим такую задачу как обратную задачу с граничным переопределением: найти функции $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие уравнению (1), начальному условию (2), смешанным краевым условиям (37) и (4) при $x = 0$ и $x = l$, а также граничному наблюдению (3), в которых входные данные $a > 0$, b, $c > 0$, d, p_0, p_1, v, e_1, q_1 , φ и g предполагаются заданными.

Пусть выполнены требования (i) – (iii) к соответствующим входным данным и пусть, кроме того, граничная функция $v(t)$ удовлетворяет условию

(v). $v(t)$ принадлежит $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, $v\big|_{t=0} = \varphi\big|_{x=0}$.

Тогда квазилинейная краевая задача (1), (2), (37), (4) имеет единственное решение $u(x,t)$ в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ в правой части уравнения (1), удовлетворяющей условиям согласования [7]:

$$c(x,0,\varphi)v_t - L\varphi\big|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)f(0) + p_1(x,0)\big|_{x=0}. \tag{38}$$

Исходя из этого, дадим следующее

Определение 2. Решением обратной задачи со смешанными краевыми условиями назовем пару функций $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$:

$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\,\overline{Q}\,), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0,T], \quad 0<\lambda<1,$$

удовлетворяющих соотношениям (1), (2), (4), (37), (38) и граничному наблюдению (3) в обычном смысле.

3.2. Ограничимся изложением основных моментов доказательства единственности решения в смысле определения 2, так как оно повторяет с соответствующими модификациями доказательство теорем 1, 2.

Предположим, что $\{u_1^0, f_1^0\}$ и $\{u_2^0, f_2^0\}$ — два решения рассматриваемой обратной задачи. Тогда $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ являются решениями смешанной краевой задачи (1), (2), (37), (4) в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\,\overline{Q}\,)$, соответствующими функциям $f_1^0(t)$ и $f_2^0(t)$ правой части уравнения (1).

Пусть $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$, $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$. В силу (38) $\Delta f\big|_{t=0}=0$, кроме того, из (1)–(4) и (37) следует, что Δu и Δf удовлетворяют соотношениям (6), (8), (9) и условию

$$\Delta u\big|_{x=0}=0, \quad 0<t\leqslant T.$$

Утверждение, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0\leqslant t\leqslant T$, основано на свойствах соответствующей сопряженной задачи

$$\big(c(x,t,u_1^0)\psi\big)_t + \mathcal{L}^*\psi = 0, \quad 0<x<l, \quad 0\leqslant t<T, \tag{39}$$

$$\psi\big|_{x=0}=0, \quad 0\leqslant t<T, \tag{40}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x + \mathcal{A}_1\psi\big|_{x=l}=\eta(t), \quad 0\leqslant t<T, \tag{41}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{42}$$

в которой $\mathcal{L}^*\psi \equiv \big(a(x,t,u_1^0)\psi_x\big)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$, $\eta(t)$ — произвольная функция, пробегающая пространство $H^{1/2}[0,T]$.

Имеет место аналогичная лемме 1

Лемма 7. *Пусть входные данные рассматриваемой обратной задачи удовлетворяют требованиям* (i)–(v) *и функция* $c(x,t,u)$ *имеет непрерывную производную по* t *при* $(x,t,u)\in\overline{D}$. *Тогда при любой граничной функции* $\eta(t)\in H^{1/2}[0,T]$ *решение* $\psi(x,t;\eta)$ *сопряженной задачи* (39)–(42) *удовлетворяет соотношению*

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l \psi(x,t;\eta)p_0(x,t)\Delta f(t)\,dx\,dt = 0 \quad \forall\eta(t)\in[0,T].$$

Для $\psi(x,t;\eta)$ на границе $x=l$ справедливо утверждение леммы 2. На другой границе $x=0$ имеет место

Лемма 8. *Пусть входные данные удовлетворяют условиям леммы* 7. *Если при любой функции* $\eta(t)\in H^{1/2}[0,T]$ *выполнено соотношение*

$$\int\limits_0^T \psi_x(x,t;\eta)\big|_{x=0}\,\theta(t)\,dt = 0 \tag{43}$$

для некоторой непрерывной функции $\theta(t)$, $\theta(t)\big|_{t=0}=0$, *то* $\theta(t)=0$ *при* $0\leqslant t\leqslant T$, *т.е. множество следов* $\{\psi_x(x,t;\eta)\big|_{x=0}\}$, *получаемое при пробегании функцией* $\eta(t)$ *пространства* $H^{1/2}[0,T]$, *является всюду плотным.*

Доказательство леммы 8. Рассмотрим в области $\overline{Q}$ краевую задачу, сопряженную с (39)–(42):

$$c(x,t,u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x,t)\in Q, \tag{44}$$

$$z\big|_{x=0}=w(t), \quad 0<t\leqslant T, \tag{45}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x\big|_{x=l}=0, \quad 0<t\leqslant T, \tag{46}$$

$$z\big|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{47}$$

где оператор $\mathcal{L}z$ имеет тот же вид, что и в (17), $w(t) = \big(a(x,t,u_1^0)\big|_{x=0}\big)^{-1}\theta(t)$ — непрерывная функция в силу гладкости входных данных и непрерывности $\theta(t)$, $w(t)\big|_{t=0}= 0$. Соотношения (44) – (47) представляют собой линейную краевую задачу со смешанными граничными условиями, которая вследствие гладкости коэффициентов уравнения (44) имеет решение $z(x,t) \in C(\,\overline{Q}\,)\cap C^{2,1}(Q)$. Покажем, что при $x = l$ в дополнение к (46) имеет место условие $z\big|_{x=l}= 0$.

Рассматривая, как и в лемме 3, вспомогательное выражение II, нетрудно установить из (39) – (42) и (44) – (47), что

$$II = \int\limits_0^T z\big|_{x=l}\{a\psi_x + \mathcal{A}_1\psi\}\,\big|_{x=l}\,dt - \int\limits_0^T \psi_x\big|_{x=0}\{az\}\,\big|_{x=0}\,dt = 0,$$

т.е. в силу (41), (45) и вида функции $w(t)$ имеем $\int\limits_0^T z\big|_{x=l}\,\eta(t)\,dt - \int\limits_0^T \psi_x\big|_{x=0}\,\theta(t)\,dt = 0$. Отсюда вследствие предположения (43) и произвольности функции $\eta(t)$ и вытекает, что $z\big|_{x=l}= 0$.

Дальнейшие рассуждения, как и в лемме 3, основаны на возможности применить результаты, полученные в [1], для нехарактеристической задачи Коши с нулевыми данными на границе $x = l$ и заключить, что $z(x,t) \equiv 0$ в области $\overline{Q}$. Тогда из (45) вытекает, что $w(t) = 0$, т.е., исходя из вида функции $\theta(t)$, заключаем, что и $\theta(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, что и требовалось доказать. Лемма 8 установлена.

Усреднения решений $\psi(x,t;\eta)$ при $0 \leqslant x \leqslant l_0$, $0 < l_0 < l$, т.е. функции $\Psi(t;\eta)$ и $\Psi(t;\eta;p_0)$, обладают свойством плотности при пробегании функцией $\eta(t)$ в граничном условии (41) пространства $H^{1/2}[0,T]$. Для них справедливы соответствующие утверждения лемм 4 – 6, при доказательстве которых рассматривается краевая задача (21) – (24) в областях $\overline{Q}_s = \{s \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ при $0 \leqslant s \leqslant l_0$. Аналогами соотношений (29) и (32) являются следующие соотношения (см. (40)):

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^{l_0} z(x,t;s)\big|_{x=l}\,\eta(t)\,ds\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^{l_0} \psi(s,t;\eta)\,w(t)\,ds\,dt - \int\limits_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=l_0}\big\{az(x,t;l_0)\big\}\big|_{x=l_0}\,dt = 0,$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^{l_0} z(x,t;s)\big|_{x=l}\,\eta(t)\,ds\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^{l_0} \psi(s,t;\eta)\,p_0(s,t)\,w(t)\,ds\,dt - \int\limits_0^T \psi(x,t;\eta)\big|_{x=l_0}\big\{az(x,t;l_0)\big\}\big|_{x=l_0}\,dt = 0.$$

Лемма 7 и свойства плотности усреднений $\Psi(t;\eta;p_0)$ позволяют показать, что $\Delta u \equiv 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, с помощью рассуждений, подобных проведенным при доказательстве теорем 1, 2. В частности, аналогом теоремы 1 является следующая

Теорема 4. *Пусть входные данные обратной задачи со смешанными краевыми условиями удовлетворяют соответствующим требованиям* (i) – (v) *и, кроме того, функция $c(x,t,u)$ имеет непрерывную производную по t при $(x,t,u) \in \overline{D}$. Предположим также, что $\big|p_0(x,t)\big| > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$ и что функция $g(t)$ удовлетворяет условию согласования*

$$c(x,0,\varphi)g_t - L\varphi\big|_{x=l,t=0}= p_0(x,0)g^* + p_1(x,0)\big|_{x=l}, \tag{48}$$

где $g^* = \big\{c(x,0,\varphi)v_t - L\varphi - p_1(x,t)\big\}\big|_{x=0,t=0}\,p_0^{-1}(x,0)\big|_{x=0}$. Тогда в случае существования решения такой обратной задачи $\big\{u^0(x,t), f^0(t)\big\}$ в смысле определения 2 *это решение определяется однозначно.*

3.3. Рассмотрим теперь обратную задачу со смешанными краевыми условиями для линейного параболического уравнения (34), включающую в себя условия (36) и (37) при $x = 0$ и $x = l$, начальное условие (2) и граничное наблюдение (3). Сформулируем достаточные условия единственности для такой задачи.

Теорема 5. *Предположим, что входные данные удовлетворяют требованиям гладкости и согласования*

$$a, a_x, b, c, c_x, d \in H^{\lambda,\lambda/2}(\,\overline{Q}\,), \quad p_0, p_1 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\,\overline{Q}\,), \quad 0 < \lambda < 1,$$
$$v(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T], \quad e_1, q_1 \in H^{(1+\lambda)/2}[0,T], \quad e_1 \geqslant 0, \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0,l],$$
$$v\big|_{t=0}= \varphi\big|_{x=0}, \quad a(x,0)\varphi_x + e_1(0)\varphi\big|_{x=l}= q_1(0),$$

обеспечивающим существование и единственность $u(x,t)$ *в* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ *при любой функции* $f(t)$ *в правой части уравнения* (34), *такой, что*

$$f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T], \quad c(x,0)v_t - L\varphi\big|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)f(0) + p_1(x,0)\big|_{x=0}. \tag{49}$$

Пусть, кроме того, производные a_t, b_x *и* c_t *непрерывны в* $\overline{Q}$, $\big|p_0(x,t)\big| > 0$ *при* $(x,t) \in \overline{Q}$, *функция* $g(t)$ *принадлежит* $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ *и удовлетворяет линейному аналогу условия* (48). *Тогда в случае существования решения* $\big\{u^0(x,t), f^0(t)\big\}$ *рассматриваемой обратной задачи, удовлетворяющего соотношению* (49), *оно определяется однозначно в классе функций* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$.

Единственность решения обратной задачи со смешанными граничными условиями в этих классах Гельдера имеет место и в том случае, когда неравенство $\big|p_0(x,t)\big| > 0$ выполняется в некоторой подобласти $Q' = \{x_0 < x < x_1, 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset \overline{Q}$, вне которой $p_0(x,t) = 0$.

Вывод этих утверждений основан на линейных аналогах соответствующих лемм о плотности множества усреднений $\big\{\Psi(t;\eta;p_0)\big\}$ при пробегании граничной функцией $\eta(t)$ пространства $H^{1/2}[0,T]$.

3.4. Для рассматриваемых в настоящей статье обратных задач со смешанными краевыми условиями естественный класс допустимых решений состоит из пар функций $\big\{u(x,t), f(t)\big\}$, которые принадлежат пространствам $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$. Расширение этого класса путем включения в него пар функций $\big\{u(x,t), f(x,t)\big\}$ приводит к нарушению единственности решения (см. соответствующий пример в [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландис Е.М.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1959. **14**, № 1. 21–85.
2. *Гольдман Н.Л.* Единственность определения правой части в квазилинейных параболических уравнениях с финальным и граничным наблюдением // Докл. РАН. 2004. **395**, № 2. 151–156.
3. *Гольдман Н.Л.* Об одном классе обратных задач с данными Коши для квазилинейного параболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 1. 74–86.
4. *Клибанов М.В.* Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Докл. РАН. 1985. **280**, № 3. 533–536.
5. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York–Basel: Marcel Dekker, 1999.
6. *Engl H.W., Scherzer O., Yamamoto M.* Uniqueness and stable determination of forcing terms in linear partial differential equations with overspecified boundary data // Inverse Problems. 1994. **10**, N 6. 1253–1276.
7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
26.04.2007