

УДК 523.11

МАЛОМОДОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ЗВЕЗДНОГО ДИНАМО

Д. Д. Соколов¹, С. Н. Нефедов²

Изучается картина динамо в полностью конвективных звездах и звездах с тонкой конвективной оболочкой. В рамках простой аналитической модели получены качественно верные картины генерации магнитного поля, а также построены соответствующие баттерфляй-диаграммы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-02-00127).

Ключевые слова: динамо, альфа-эффект, дифференциальное вращение, баттерфляй-диаграмма.

1. Введение. Считается, что хорошо известный 11-летний цикл солнечной активности связан с тем, что в конвективной оболочке Солнца работает механизм динамо, основанный на совместном действии спиральной турбулентности (α -эффект) и дифференциального вращения. Представляется весьма вероятным, что те же генераторы магнитного поля действуют и в полностью конвективных звездах, так что в них тоже возникает цикл активности, связанный с работой динамо. Для уверенной оценки этой гипотезы необходимо изучить специфику работы механизма динамо в полностью конвективных звездах. Эта задача до настоящего времени изучалась методами прямого численного моделирования. Проблема, однако, состоит в том, что физические параметры полностью конвективных звезд (например, их дифференциальное вращение) известны несравненно хуже, чем соответствующие параметры Солнца. Поэтому в дополнение к методам прямого численного моделирования хотелось бы получить пусть грубый, но робастный метод исследования динамо. Этот метод должен использовать лишь небольшое число интегральных параметров, характеризующих роль в процессе генерации магнитного поля нескольких базисных функций, и выявлять отличия динамо в полностью конвективной звезде от динамо в сферической оболочке (конвективной зоне Солнца). В настоящей статье мы предлагаем подобный метод.

Общая физическая картина магнитного динамо в звездах описана еще Паркером в [1], о подходах к численному моделированию задачи см. [2], о современных моделях динамо, полученных в рамках прямого численного моделирования, см. [3], о наблюдениях магнитной активности полностью конвективных звезд см., например, [4].

Работа построена следующим образом. После математической постановки задачи (п. 2) в п. 3 на основе метода Галеркина строится метод для динамо в полностью конвективных звездах. В п. 4 этот же метод применен для исследования модели Паркера для звезд с тонкой конвективной оболочкой. В п. 5 обсуждаются полученные численные результаты.

2. Динамо-волна в полностью конвективных звездах.

2.1. Постановка задачи. Генерация крупномасштабного магнитного поля в звездах связана с процессом динамо, основанном на действии дифференциального вращения и на так называемом α -эффекте, который обусловлен действием силы Кориолиса в стратифицированной среде. Этот процесс можно описать уравнением (см. [5])

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \alpha \mathbf{B} + \text{rot } [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \beta \Delta \mathbf{B}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{B} — крупномасштабное магнитное поле, β — коэффициент турбулентной диффузии, α — альфа-эффект и \mathbf{V} — линейная скорость дифференциального вращения с угловой скоростью Ω . Магнитное поле в пространстве, окружающем звезду (при $r > R$, где R — радиус звезды), обычно рассматривают в вакуумном приближении $\Delta \mathbf{B} = 0$. На границе звезды используются условия шивки, которые удобно выразить с помощью разбиения магнитного поля на тороидальную (\mathbf{B}_T) и полоидальную (\mathbf{B}_P) составляющие. Первая не проникает в область $r > R$, а вторая — непрерывна при $r = R$.

Удобно ввести безразмерные переменные, измеряя время в единицах диффузионного времени, а расстояние в единицах R ; альфа-эффект α и сдвиг дифференциального вращения Ω удобно нормировать на

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; e-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; e-mail: nefedov@gcnet.ru

их максимальные значения α_0 и Ω_0 . Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = R_\alpha \operatorname{rot} \alpha \mathbf{B} + R_\omega \operatorname{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \Delta \mathbf{B}. \quad (2)$$

Здесь $R_\alpha = \alpha_0 R / \beta$ и $R_\omega = \Omega_0 R / \beta$ — безразмерные числа, аналогичные известному в гидродинамике числу Рейнольдса; они характеризуют интенсивность источников генерации — α -эффекта и дифференциального вращения соответственно.

В задаче динамо интерес представляют решения, убывающие на пространственной бесконечности. Здесь мы рассматриваем кинематическую постановку, в которой свойства течения (\mathbf{V} , α и β) считаются заданными. Тогда интересующая нас задача становится задачей на собственные векторы и собственные значения, так что решение ищется в виде $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{\gamma t}$, где γ — комплексная скорость роста, ее мнимая часть определяет период цикла. Если действительная часть γ положительна, то мы имеем дело с самовозбуждением магнитного поля, а если отрицательна — то с затуханием. Задача на собственные значения имеет, вообще говоря, много собственных решений; мы интересуемся собственной функцией с наибольшим $\operatorname{Re} \gamma$ (лидирующей модой).

Естественно, скорость роста зависит от R_α и R_ω . Если R_α и R_ω равны нулю, то скорость роста совпадает со старшей модой свободного затухания.

Если R_ω и R_α достаточно велики, то, как показывает опыт прямого численного моделирования, появляются растущие (с осцилляциями) собственные решения, т.е. возникает явление динамо. На плоскости R_α , R_ω возникает некоторая линия, соответствующая порогу генерации. На этой линии магнитное поле маргинально устойчиво. На практике интерес представляет нахождение порога генерации и структуры растущего магнитного поля вблизи этого порога.

Порог генерации соответствует условиям, при которых генерационные эффекты (спиральность и дифференциальное вращение) невелики, они лишь в состоянии компенсировать диссипационные потери (лапласиан). Можно надеяться, что в этом случае искомая конфигурация магнитного поля хорошо аппроксимируется линейной комбинацией нескольких старших (медленнее всего убывающих во времени) мод свободного затухания. На этом и основан предлагаемый метод.

2.2. Задача о свободно затухающих колебаниях. Моды свободного затухания для сферы в общей форме приведены в [2]. Нам понадобятся явные выражения нескольких первых мод затухания, которые мы приводим ниже. Для мод свободного затухания имеем $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \Delta \mathbf{B}$ при $r < 1$ и $\Delta \mathbf{B} = 0$ при $r > 1$.

Решение ищем в виде $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}) \exp(\gamma_i^{(0)} t)$, где i — номер собственного решения. Тогда $\gamma_i^{(0)} \mathbf{B}^{(i)} = \Delta \mathbf{B}^{(i)}$ при $r < 1$ и $\Delta \mathbf{B}^{(i)} = 0$ при $r > 1$. Оператор Δ самосопряженный, поэтому все $\gamma_i^{(0)}$ — действительны и отрицательны.

Полагая

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p = \operatorname{rot} \mathbf{r} T + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{r} P, \quad (3)$$

сводим нашу задачу к спектральной задаче для потенциалов T и P :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \Delta P, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \Delta T \quad \text{при} \quad r < R; \quad \Delta P = 0, \quad T = 0 \quad \text{при} \quad r > R; \quad P = \frac{\partial P}{\partial r} = T = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Поле T можно разложить по поверхностным гармоникам $T(r, \theta, \phi, t) = \sum_n T^{(n)}(r, t) S_n(\theta, \phi)$, где S_n — сферические функции, а $T^{(n)}(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} T^{(n)} \quad \text{при} \quad r < R, \quad T^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad r \geq R.$$

В области $r < R$ общее решение для T имеет вид

$$T(r, \theta, \phi, t) = \sum_n S_n(\theta, \phi) \sum_q \exp(\gamma_{nq}^{(0)} t) C_{nq} r^{-1/2} J_{n+1/2}(k_{nq} r). \quad (4)$$

Здесь $J_{n+1/2}$ — функции Бесселя, k_{nq} определяются из дисперсионного уравнения $J_{n+1/2}(k_{nq} R) = 0$, а скорости затухания тороидальных мод равны $\gamma_{nq}^{(0)} = -k_{nq}^2$ ($n = 1, 2, \dots$; $q = 1, 2, \dots$).

Тороидальное магнитное поле, соответствующее тороидальному скалярному потенциалу, имеет только компоненту $B_\phi = -\partial T / \partial \theta$.

Аналогичное разложение имеет место внутри сферы и для P : $P(r, \theta, \phi, t) = \sum_n P^{(n)}(r, t) S_n(\theta, \phi)$. Однако теперь, поскольку в области $r > R$ потенциал P удовлетворяет уравнению $\Delta P = 0$, получим при $r > R$ следующее выражение для P : $P^{(n)}(r, t) = c_n(t) r^{-(n+1)}$. Общее решение для P , аналогичное решению (4), имеет вид

$$P(r, \theta, \phi, t) = \begin{cases} \sum_n S_n(\theta, \phi) \sum_q \exp(\gamma_{(n-1)q}^{(0)} t) \hat{C}_{nq} r^{-1/2} J_{n+1/2}(k_{nq} r) & \text{при } r \leq R, \\ \sum_n c_n(t) S_n(\theta, \phi) r^{-(n+1)} & \text{при } r > R, \end{cases}$$

где $c_n(t) = \sum_q \exp(\gamma_{(n-1)q}^{(0)} t) \hat{C}_{nq} R^{n+1/2} J_{n+1/2}(k_{nq} R)$, а k_{nq} теперь определяются из дисперсионного уравнения $J_{n-1/2}(k_{nq} R) = 0$. Следовательно, скорости затухания полоидальных мод равны $\gamma_{nq}^{(0)} = -k_{(n-1)q}^{(0)2}$.

Соответствующее полоидальное магнитное поле имеет следующие компоненты:

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \left(-r \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta}, \quad B_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial P}{\partial r} \right)}{\partial r}, \quad B_\phi = 0.$$

Поскольку все γ_i действительны и отрицательны, упорядочим их так, что

$$0 > \gamma_1^{(0)} \geq \gamma_2^{(0)} \geq \gamma_3^{(0)} \geq \dots \tag{5}$$

В настоящей работе мы рассматриваем только осесимметричные моды, обладающие дипольной симметрией, т.е. антисимметричные относительно экватора. Учитывая это и упорядочив в соответствии с (5) решения дисперсионного уравнения для тороидального поля, получим $k_1^t = 5.763$, $k_2^t = 8.813$, $k_3^t = 9.095$ и т.д. Аналогично для дисперсионного уравнения для полоидального поля имеем $k_1^p = \pi$, $k_2^p = 5.763$, $k_3^p = 2\pi$, $k_4^p = 8.813$, $k_5^p = 9.095$. Нетрудно заметить, что $k_1^t = k_2^p$, $k_2^t = k_4^p$, а $k_3^t = k_5^p$ — это дублеты, т.е. одной скорости роста соответствуют разные собственные функции. Обозначая через S и D синглеты и дублеты, получаем, что в соответствии с принятым нами упорядочением спектра они идут в следующем порядке: $SDSDDS$ и т.д.

В соответствии с этим мы будем выбирать и первые моды разложения поля. Выпишем выражения для нескольких первых мод затухания. Первая мода разложения — полоидальный синглет:

$$P1 = \left\{ -0.203\sqrt{2} [\cos(\pi r)\pi r - \sin(\pi r)] \cos \theta / r^3, -0.101\sqrt{2} [\cos(\pi r)\pi r - \sin(\pi r) - \pi^2 r^2 \sin(\pi r)] \sin \theta / r^3, 0 \right\}.$$

Ему соответствует скорость роста $\gamma_1^p = -\pi^2 \approx -9.87$. Далее следует дублет, соответствующий скорости роста $\gamma_1^t = \gamma_2^t = -5.763^2 \approx -33.212$: тороидальная мода

$$T1 = \left(0, 0, -\sqrt{5763} \sqrt{5} [(5.30610^{-4} - 0.059 r^2) \sin(5.763r) - 0.031 \cos(5.763r)r] \cos \theta \sin \theta / r^3 \right)$$

и полоидальная мода

$$P2 = \left\{ \cos \theta [(0.029r^3 - 0.013r) \cos(5.763r) - (0.031r^2 - 2.3017 \cdot 10^{-4}) \sin(5.763r)] \times \right. \\ \times \sqrt{5.763} \sqrt{20} (5 \cos 2\theta - 1) / r^5, \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \sqrt{5.763} \sqrt{20} \times \\ \left. \times [(0.088r^3 - 0.020r) \cos(5.763r) - \sin(5.763r)((-0.005)r^2 + 3.453 \cdot 10^{-4} + 0.085 r^4)] / r^5, 0 \right\}.$$

Следующая мода — полоидальный синглет

$$P3 = \left\{ -[2 \cos(2\pi r)\pi r - \sin(2\pi r)] \cos \theta / (\pi^2 r^3), -2 \sin \theta [\cos(2\pi r)\pi r + \sin(2\pi r)(4\pi^2 r^2 - 1)] / (2\pi^2 r^3), 0 \right\}$$

с соответствующей скоростью роста $\gamma_3^p = -4\pi^2 \approx -39.478$. Затем следует еще один дублет, соответствующий скорости роста $\gamma_2^t = \gamma_4^t = -8.813^2 \approx -77.669$: тороидальная мода

$$T2 = \left\{ 0, 0, \cos \theta \sin \theta (7 \cos^2 \theta - 3) [\sin(8.813r)(0.032r^4 - 0.019r^2 + 5.571 \cdot 10^{-5}) + \right. \\ \left. + \cos(8.813r)(0.036 r^3 - 4.91 r)] \sqrt{35} \sqrt{1259} / r^5 \right\}$$

и полоидальная мода

$$P4 = \left\{ \cos \theta \left[\cos(8.813r)(-0.005r^5 + 0.007r^3 - 7.521 \cdot 10^{-4}) + \sin(8.813r)(0.008r^4 - 0.003r^2 + 8.534 \cdot 10^{-5}) \right] \times \right. \\ \left. \times \sqrt{35} \sqrt{1259} (63 \cos^4 \theta - 70 \cos^2 \theta + 15) / r^7, \sin \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \sqrt{35} \sqrt{1259} \left[\cos(8.813r) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (-0.036r^5 + 0.02r^3 - 2 \cdot 10^{-4}r) + \sin(8.813r)(0.02r^6 - 0.0327r^4 - 0.008r^2 - 2.133 \cdot 10^{-4}) \right] / r^7, 0 \right\}.$$

И, наконец, еще один дублет, соответствующий скорости роста $\gamma_3^t = \gamma_5^p = -9.095^2 \approx -82.719$: тороидальная мода

$$T3 = \left\{ 0, 0, \cos \theta \sin \theta \sqrt{1819} \left[\sin(9.095r)(-0.019r^2 + 6.75 \cdot 10^{-4}) - 0.06r \cos(9.095r) \right] / r^3 \right\}$$

и полоидальная мода

$$P5 = \left\{ \cos \theta \left[\cos(9.095r)(0.19r^3 - 0.003r) + \sin(9.095r)(-0.012r^2 + 3.711 \cdot 10^{-4}) \right] \times \right. \\ \left. \times \sqrt{17} \sqrt{107} (5 \cos 2\theta - 1) / r^5, \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \sqrt{17} \sqrt{107} \times \right. \\ \left. \times \left[\cos(9.095r)(0.056r^3 - 0.005r) + \sin(9.095r)(-0.022r^2 + 5.566 \cdot 10^{-4} + 0.085r^4) \right] / r^5, 0 \right\}.$$

Далее показывается, что для нашего анализа нужны именно эти моды (для проверки устойчивости решения мы используем также девятую моду, представляющую собой полоидальный синглет, однако для краткости не выписываем здесь его явного вида).

3. Метод решения задачи. В рамках нашего анализа нам нужно найти минимальное количество мод, которые качественно правильно описывают процесс генерации. Отталкиваясь от опыта детального численного моделирования, мы ожидаем, что первой возбуждается осциллирующая мода. Поэтому мы берем вначале одну моду и проектируем на нее уравнение, описывающее процесс генерации. Получается одномерная спектральная задача, которая, как оказывается, имеет только затухающее решение. Потом мы добавляем к нашему базису следующую по степени убывания моду, а именно дублет. Возникает спектральная задача для матрицы 3×3 , которая, как выясняется, также не имеет осциллирующих растущих решений. Потом мы последовательно добавляем к ней следующие моды, пока не получим картину, в которой первой возбуждается осциллирующая мода. Это происходит при числе мод $N = 8$. Потом мы добавили в спектр еще одну моду и выяснили, что картина устойчива.

Оказывается, что получившаяся картина самовозбуждения магнитного поля достаточно сложна и ее описание требует достаточно большого числа мод. Мы полагаем, что отчасти эта сложность является искусственной и некоторые из использованных мод на самом деле практически не участвуют в самовозбуждении магнитного поля (на это обстоятельство обращалось ранее внимание в работе [6]). Прямым перебором, устраняя из изучаемого набора отдельные моды и связи между ними, мы находим, какие из мод и связей между ними важны для получения качественно правильной картины (т.е. возбуждения осциллирующего решения). Оказалось, что полиоидальный синглет $P3$ и дублет $T2, P4$ не влияют на правильность картины; таким образом, для получения качественно верной картины генерации достаточно взять не восемь, а пять базисных функций: $P1, T1, P2, T3, P5$.

Перейдем теперь к описанию процедуры решения нашей задачи. Согласно (3) магнитное поле \mathbf{B} представимо в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p = \sum_{n=1}^N (c_n \mathbf{B}_t^n + \hat{c}_n \mathbf{B}_p^n). \quad (6)$$

В рассматриваемом нами осесимметричном случае $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, \theta)$, а коэффициенты разложения c и \hat{c} зависят только от времени и пропорциональны $\exp \gamma t$.

Выбрав N первых мод свободного затухания, рассмотрим линейное подпространство в пространстве магнитных полей, натянутое на эти моды, и спроектируем уравнение динамо (2) на это подпространство:

$$\sum_{n=1}^N \gamma_n (c_n \mathbf{B}_t^n + \hat{c}_n \mathbf{B}_p^n) = R_\alpha \text{rot } \alpha \sum_{n=1}^N (c_n \mathbf{B}_t^n + \hat{c}_n \mathbf{B}_p^n) + R_\omega \text{rot} \left[\mathbf{V} \times \sum_{n=1}^N (c_n \mathbf{B}_t^n + \hat{c}_n \mathbf{B}_p^n) \right] + \\ + \gamma^{(0)} \sum_{n=1}^N (c_n \mathbf{B}_t^n + \hat{c}_n \mathbf{B}_p^n).$$

Теперь, учитывая тот факт, что тороидальное магнитное поле ортогонально полоидальному магнитному полю, домножим это уравнение сначала на $\mathbf{B}_t^{(k)*}$, а затем на $\mathbf{B}_p^{(k)*}$ (здесь звездочкой обозначено комплексное сопряжение), и получим следующую систему:

$$(\gamma^{(0)} - \gamma_k)c_k + \frac{1}{\|\mathbf{B}_t^{(k)}\|^2} \sum_{n=1}^N c_n \left[(R_\alpha \text{rot } \alpha \mathbf{B}_p^{(n)}, \mathbf{B}_t^{(k)}) + R_\omega (\text{rot } [\mathbf{V} \times \mathbf{B}_p^{(n)}], \mathbf{B}_t^{(k)}) \right] = 0, \quad (7)$$

$$(\gamma^{(0)} - \gamma_k)\hat{c}_k + \frac{1}{\|\mathbf{B}_p^{(k)}\|^2} \sum_{n=1}^N \hat{c}_n (\text{rot } \alpha \mathbf{B}_t^{(n)}, \mathbf{B}_p^{(k)}) = 0. \quad (8)$$

Скалярное произведение здесь понимается как $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 2\pi \int \mathbf{A} \mathbf{B}^* r^2 \sin \theta dr d\theta$, где интегрирование ведется по всей плоскости (r, ϕ) . В (7), (8) учтено, что $\text{rot } \alpha \mathbf{B}$ переводит тороидальное поле в полоидальное, а $\text{rot } [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ наоборот — полоидальное в тороидальное; учтено также, что $[\mathbf{V} \times \mathbf{B}_t] = 0$ в случае осесимметричного поля (линейная скорость дифференциального вращения $\mathbf{V} = (0, 0, V_\phi)$).

В результате получается задача на собственные значения для вектора \mathbf{C} , составленного из коэффициентов разложения магнитного поля по данным модам для постоянной матрицы порядка N :

$$(\gamma E - M)\mathbf{C} = \widehat{W}\mathbf{C}. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4, \hat{c}_5)^T$, E — единичная матрица и M — диагональная матрица с элементами $M_{ii} = \gamma_i$.

Элементы матрицы \widehat{W} состоят из скалярных произведений вида $W_{ij} = \int \mathbf{B}_i^* \widehat{L} \mathbf{B}_j$, где векторы \mathbf{B}_i при изменении индекса i последовательно пробегают в функциональном пространстве все моды затухания (звездочка означает комплексное сопряжение). Оператор \widehat{L} описывает источники генерации и имеет вид $\widehat{L} = R_\omega \text{rot } [\mathbf{V} \times \cdot] + R_\alpha \text{rot } (\alpha \cdot)$. Здесь точкой отмечено место, куда нужно подставить моду, на которую действует оператор.

При вычислении W_{ij} мы выбрали параметры $V = 1 - \exp(-r)$, $\alpha = r \cos \theta$. Для исследования устойчивости модели рассматривались различные близкие распределения дифференциального вращения и α -эффекта. Результаты действительно оказываются устойчивыми, и для краткости мы ограничиваемся лишь основной моделью.

Если мы ограничиваемся первыми $N = 8$ модами затухания, то уравнения динамо в форме (9) имеют $N = 8$ собственных значений и соответствующих им собственных функций. При малых R_α и R_ω эти решения затухают, т.е. их собственные значения имеют отрицательные действительные части. По мере роста R_α и R_ω появляются растущие моды с $\text{Re } \gamma > 0$. Для упорядочения соответствующих результатов мы пользуемся тем, что при реалистических R_α , которые всегда невелики, собственные значения определяются произведением $D = R_\alpha R_\omega$ (так называемое $\alpha\omega$ -динамо). Поэтому мы фиксируем $R_\alpha = 0.5$ (это значение представляется реалистическим) и меняем R_ω .

Зафиксировав R_α и решая задачу на собственные функции и собственные значения, при каждом R_ω получим набор скоростей роста γ_i , а также соответствующие им собственные векторы c_1, c_2, c_3, \dots .

Результат исследования задачи (9) мы представляем в виде зависимости действительной части скорости роста для нескольких первых мод от числа R_ω , которое в нашей задаче характеризует интенсивность работы динамо (рис. 1).

После этого мы простым перебором выясняем, какие из рассмотренных мод затухания можно удалить без качественного изменения схемы того типа, которая приведена на этом рисунке. На рис. 2 мы приводим результат после того, как такая селекция уже проведена.

Из рис. 2 следует, что классическое объяснение механизма динамо Паркера не вполне точно характеризует работу изучаемого механизма, поскольку в его работе реально участвуют не две моды ($T1$ и $P1$), а пять мод ($T1, T3, P1, P2$ и $P5$). Мы проверили, что соответствующие схемы с меньшим числом мод приводят к качественно неправильным результатам (например, возбуждение неосциллирующей моды вместо осциллирующей). С другой стороны, мы проверили, что добавление следующей моды не приводит к качественному изменению рис. 2.

В качестве следующего шага мы проверяем перебором, какие матричные элементы W_{ij} не оказывают существенного влияния на рис. 1, так что их можно отбросить при качественном описании динамо. Напомним, что подобная операция (т.е. отбрасывание регенерации полоидального магнитного поля из тороидального за счет α -эффекта) лежит в основе $\alpha\omega$ -приближения. На рис. 3 указана схема существенных

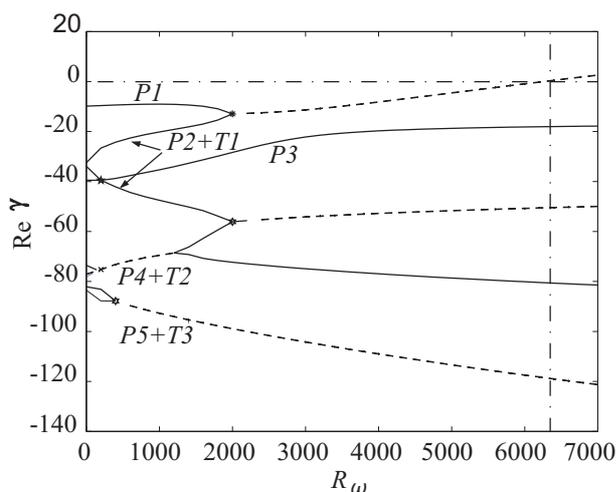


Рис. 1. Действительные части комплексной скорости роста в зависимости от R_ω . Непрерывные линии показывают неосциллирующие моды, пунктир — осциллирующие. Около кривых указано, какие моды затухания в основном определяют состав соответствующей собственной функции. Звездочками помечены бифуркации. Вертикальной пунктирной линией отмечено значение R_ω , при котором наступает самовозбуждение

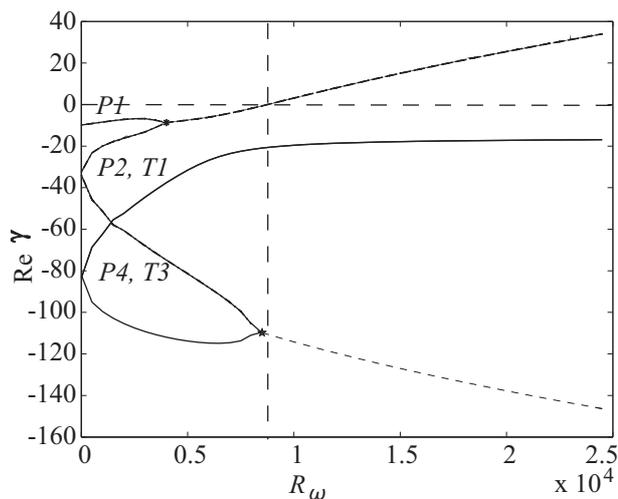


Рис. 2. Действительные части комплексной скорости роста в зависимости от R_ω после проведения селекции. Обозначения те же, что и на рис. 1

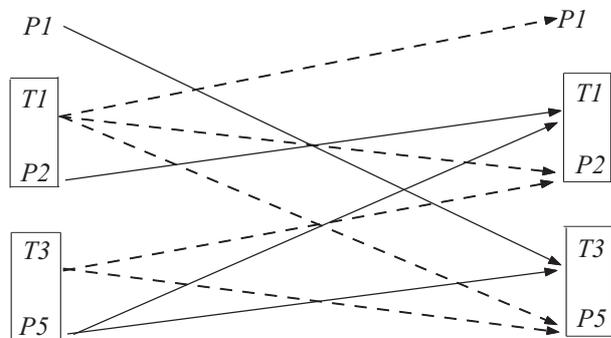


Рис. 3. Схема существенных связей в механизме динамо в полностью конвективной звезде. Сплошными линиями указаны превращения магнитного поля за счет дифференциального вращения, а пунктиром — превращения за счет α -эффекта. Рамками обозначены дублеты

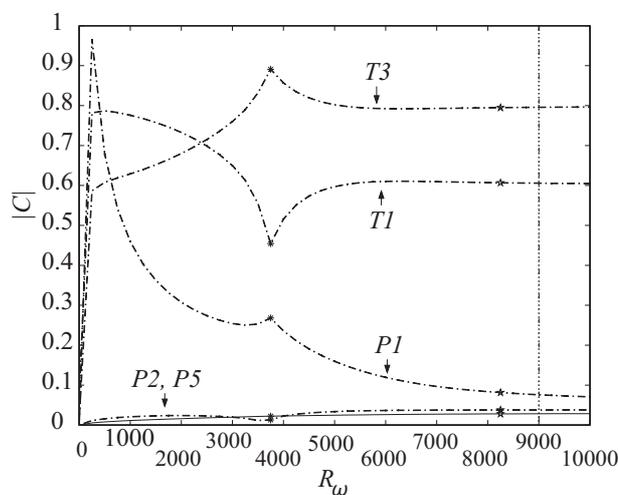


Рис. 4. Спектральный состав лидирующей моды в зависимости от R_ω после проведения селекции. Звездочками отмечены места бифуркаций, вертикальной пунктирной линией — начало самовозбуждения. Поскольку, как обычно, коэффициенты, с которыми тороидальные моды входят в собственную функцию, гораздо больше соответствующих коэффициентов для полоидальных мод, последние умножены на $\sqrt{R_\omega}/12$, с тем чтобы они были видны на рисунке

связей в рассматриваемом механизме генерации. Эта схема генерации состоит в том, что дифференциальное вращение делает из моды $P1$ моду $T3$, из моды $P2$ — моду $T1$, из моды $P5$ — моды $T1$ и $T3$, а

α -эффект делает из моды $T1$ моды $P1$, $P2$ и $P5$, а из моды $T3$ — моды $P2$ и $P5$, причем ни одну из этих связей нельзя отбросить. Отметим, что моды $P2$ и $P5$ приходится учитывать из-за того, что они входят в состав дублетов. На рис. 4 представлен (как функция от R_ω) спектральный состав лидирующей моды.

4. Динамо Паркера. Теперь покажем, что наш метод улавливает различие между динамо в полностью конвективных звездах и динамо в звездах с тонкой конвективной оболочкой. Для этого решим уравнение генерации магнитного поля в тонкой оболочке при помощи использованного метода. Такое поле можно описать при помощи полоидальной компоненты A и тороидальной компоненты B . Предполагается, что в кривой вращения доминирует радиальный градиент $G = \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r}$. Усредняя уравнения среднего поля (2) по толщине конвективной оболочки, можно получить уравнения (см. [7, 8])

$$\gamma A = R_\alpha \alpha B + \frac{d^2 A}{d\theta^2}, \tag{10}$$

$$\gamma B = R_\omega G \sin \theta \frac{dA}{d\theta} + \frac{d^2 B}{d\theta^2}. \tag{11}$$

Функции α и G отвечают здесь за α -эффект и дифференциальное вращение соответственно. Выберем $G = 1$ и $\alpha = \cos \theta$, что представляется аналогичным выбору параметров α и V для задачи с полностью конвективной оболочкой.

При $R_\alpha = R_\omega = 0$ мы имеем невозмущенную систему

$$\gamma A = \frac{d^2 A}{d\theta^2}, \quad \gamma B = \frac{d^2 B}{d\theta^2}$$

или

$$\frac{d^2 A}{d\theta^2} + k^2 A = 0, \quad \frac{d^2 B}{d\theta^2} + k^2 B = 0,$$

где $k^2 = -\gamma$. Магнитное поле вблизи полюсов затухает, поэтому берем нулевые граничные условия. Собственные решения имеют вид $(0, \sin k\theta)$, $k = 1, 3, \dots$ (мы учли условие дипольной симметрии для векторного потенциала A), $\gamma = -1, -9, \dots$ либо $(\sin k\theta, 0)$, $k = 2, 4, \dots$ (мы учли условие дипольной симметрии для тороидального поля B), $\gamma = -2, -16, \dots$. Таким образом, в спектре затухания вначале идет полоидальный синглет с соответствующей скоростью затухания $\gamma = -1$, а далее — тороидальный синглет со скоростью затухания $\gamma = -4$; затем следуют полоидальный синглет, тороидальный синглет и т.д.

Теперь перейдем к решению системы (10), (11), которая снова сводится к системе вида (9) с вектором $C = (c_1, c_2; \hat{c}_1, \hat{c}_2)^T$, где шляпками отмечены коэффициенты полоидальных мод, а оператор \hat{L} имеет вид $\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & R_\alpha(\alpha \cdot) \\ R_\omega G \sin \theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix}$. Здесь точкой отмечено место, куда нужно подставить моду, на которую действует оператор. Решая задачу на собственные функции и собственные значения, снова при каждом R_ω получим набор скоростей роста γ , а также соответствующие им собственные векторы c_1, c_2, c_3, \dots

На рис. 5 представлено поведение скорости роста, на рис. 6 — схема генерации, на рис. 7 — спектральный состав растущего решения. Мы видим, что все эти рисунки заметно отличаются от аналогичных рисунков для полностью конвективной звезды. Другими словами, конкретное действие динамо, основанного на α -эффекте и дифференциальном вращении в звездах с тонкими конвективными оболочками и в полностью конвективных звездах, заметно различны. Это связано, в частности, с различным строением спектра затухания в обоих случаях. В частности, спектр затухания для классического динамо Паркера состоит из одних синглетов, а спектр затухания в полностью конвективной звезде — из чередующихся синглетов и дублетов. Отметим, что классическое динамо Паркера не полностью описывает поведение магнитного поля даже в очень тонкой конвективной оболочке, поскольку не передает, например, возможной связи полушарий за счет циркумэкваториальных магнитных петель [9]. Поэтому более детальное изучение маломодового приближения для звезд с тонкими конвективными оболочками кажется интересным, хотя и выходит за рамки данной работы.

5. Результаты Обсудим теперь результаты обеих маломодовых моделей, представляющие интерес в астрономическом контексте.

Критическое динамо-число, при котором наступает генерация в полностью конвективной звезде ($|D| \approx 4500$), заметно выше, чем в классическом динамо Паркера ($|D| \approx 290$). При этом реальные динамо-числа, полученные из численных экспериментов, для полностью конвективных звезд порядка 3000–5000 [2]. Мы связываем эти различия между полученными результатами для полностью конвективных звезд и звезд с

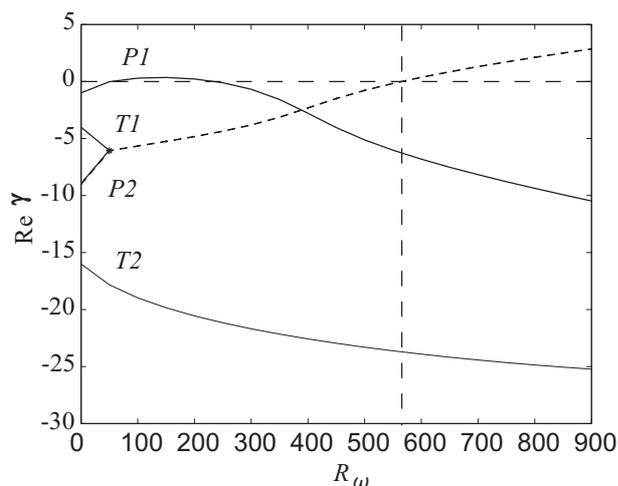


Рис. 5. Действительные части комплексной скорости роста для динамо Паркера. Обозначения те же, что и на рис. 1 для полностью конвективной звезды

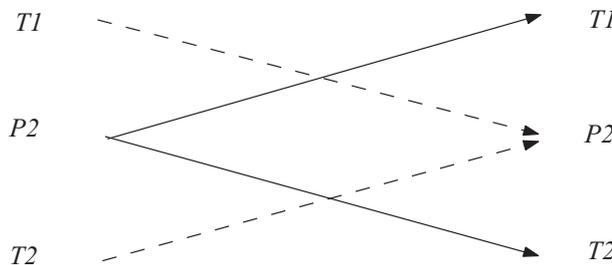


Рис. 6. Схема существенных связей в механизме динамо в динамо Паркера. Обозначения те же, что и на рис. 3

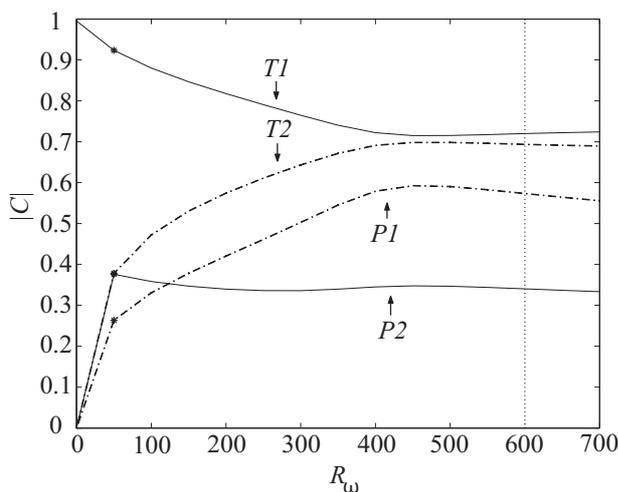


Рис. 7. Спектральный состав лидирующей моды для динамо Паркера. Обозначения те же, что и на рис. 4. Здесь полоидальные моды домножены на $\sqrt{R_ω}$

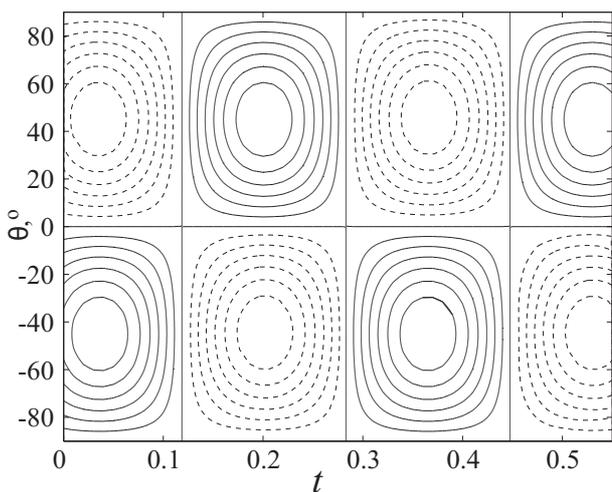


Рис. 8. Баттерфляй-диаграмма для тороидального магнитного поля. Здесь сплошные линии соответствуют положительному полю (линии проведены на уровнях 0.03, 0.06, 0.08, 0.11, 0.14 и 0.17 от максимума), а пунктирные линии — отрицательному полю (линии проведены на тех же уровнях, взятых с обратным знаком)

тонкой конвективной оболочкой с тем обстоятельством, что минимальный набор мод, необходимых для работы динамо в полностью конвективной звезде, больше, чем аналогичный набор для классического динамо Паркера. При увеличении интенсивности генерации в полностью конвективной звезде до начала генерации происходят две бифуркации, а в классическом динамо Паркера — лишь одна бифуркация. В конечном итоге все эти отличия связаны с разными строениями спектров затухания в обеих задачах. Отметим, что роль бифуркаций в работе звездных динамо обсуждалась в [10, 11].

Мы построили также баттерфляй-диаграмму для тороидального магнитного поля, возбуждаемого механизмом динамо (рис. 8).

Баттерфляй-диаграммы были впервые введены Маундером как наглядная визуализация солнечных пятен. Они строятся следующим образом: фиксируется $r = r_0$ и строятся линии уровня тороидального поля $\text{Re}(B_t) = \text{Re}(B_t(\theta, t))$. При этом тем или иным способом (например, подбирается значение динамо-

числа, находящееся на пороге возбуждения) устраняется общий рост магнитного поля. Предполагается, что B_t нормируется на максимальное значение.

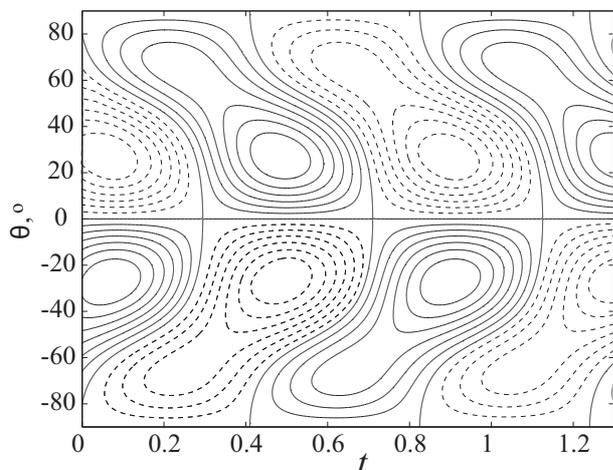


Рис. 9. Баттерфляй-диаграмма для тороидального магнитного поля в случае динамо Паркера. Сплошные линии соответствуют положительному полю (линии проведены на уровнях 0.03, 0.31, 0.47, 0.63, 0.78 и 0.94 от максимума), а штриховые линии — отрицательному полю (линии проведены на тех же уровнях, взятых с обратным знаком)

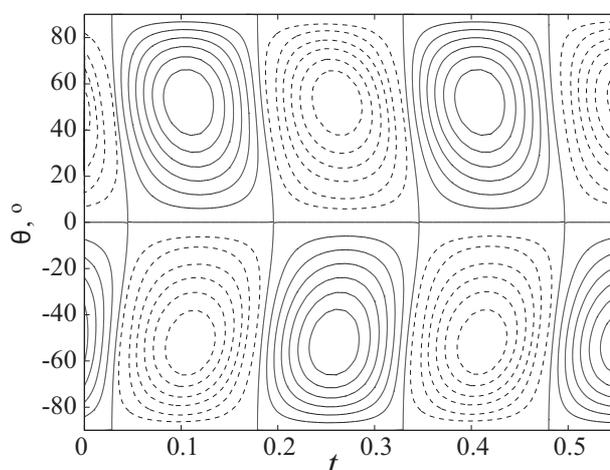


Рис. 10. Баттерфляй-диаграмма для тороидального магнитного поля в более точном приближении. Здесь сплошные линии соответствуют положительному полю (линии проведены на уровнях 0.03, 0.06, 0.09, 0.12, 0.15 и 0.18 от максимума), а штриховые линии — отрицательному полю (линии проведены на тех же уровнях, взятых с обратным знаком)

В случае полностью конвективной звезды порогу генерации $R_\omega \approx 9000$, при котором $\text{Re } \gamma \approx 0$, соответствует скорость роста $\gamma = 19.104 i$; коэффициенты спектрального разложения тороидального магнитного поля таковы: $c_1 = 0.425 + 0.432 i$ и $c_2 = 0.795$. Для полностью конвективной звезды мы строили баттерфляй-диаграмму для $r = r_0 = 0.9$ (при построении баттерфляй-диаграммы для решения динамо Паркера проблема выбора этого параметра не возникает) и проверили, что она качественно не меняется при умеренных изменениях r_0 . Таким образом,

$$B_t = (c_1 T1 + c_2 T3) \exp \gamma t = ((0.425 + 0.432 i) T1(r_0, \theta) + 0.795 T3(r_0, \theta)) \exp (19.104 i t).$$

Из рис. 8 и 9 видно, что динамо-волна в полностью конвективной звезде является стоячей, а в тонкой конвективной оболочке — бегущей. Последний факт хорошо вписывается в контекст наблюдательных данных о солнечной активности. Если ввести диффузионное время как $\tau = R^2/\beta$, где R — радиус звезды, а β — коэффициент диффузии, то для полностью конвективной звезды период колебаний тороидального магнитного поля составляет 0.14τ . Причина того, что динамо в полностью конвективной звезде приводит к генерации стоячей волны, состоит в том, что меридиональные конфигурации мод $T1$ и $T3$, входящих в схему генерации в полностью конвективной звезде, одинаковы ($\sim \cos \theta \sin \theta$).

В случае звезды с полностью конвективной оболочкой порогу генерации $R_\omega = 575$, при котором $\text{Re } \gamma \approx 0$, соответствует скорость роста $\gamma = 7.5669 i$; коэффициенты спектрального разложения тороидального магнитного поля таковы: $c_1 = 0.72$ и $c_2 = -0.383 + 0.578 i$. Таким образом,

$$B_t = (c_1 T1 + c_2 T2) \exp \gamma t = (0.72 T1 + (0.578 i - 0.383) T2) \exp (7.567 i t).$$

Для классического динамо Паркера в схему генерации входят моды $T1$ и $T2$, меридиональные конфигурации которых различны ($\sim \sin 2\theta$ и $\sim \sin 4\theta$ соответственно), т.е. меридиональные составляющие различны и волна получается бегущей (см. рис. 9).

Период колебаний в случае динамо Паркера приблизительно равен 0.4τ .

Для того чтобы подчеркнуть различие между результатами для полностью конвективной звезды и звезды с тонкой конвективной оболочкой, мы включили в схему динамо в полностью конвективной звезде моды $T2$ с меридиональной зависимостью $\sim ((7 \sin 4\theta)/2 + \sin 2\theta)$ и полоидальные моды $P3$ и $P4$.

Теперь генерация происходит при $R_\omega = 6200$, которому соответствует скорость роста $\gamma = 20.874 i$; коэффициенты разложения тороидального поля будут такими: $c_1 = -0.409 - 0.498 i$, $c_2 = 0.053 - 0.227 i$,

$c_3 = -0.72773$. Тогда

$$B_t = (c_1 T_1 + c_2 T_2 + C_3 T_3) \exp \gamma t = ((-0.409 - 0.498 i) T_1 + (0.053 - 0.227 i) T_2 - 0.728 T_3) \exp (20.874 i t).$$

Мы видим, что включение факультативной моды другой меридиональной конфигурации делают волну слабобегущей [12] (см. рис. 10).

Мы проиллюстрировали предлагаемый метод на материале звездных динамо, хотя он очевидно применим и к другим видам динамо, например к галактическому динамо. В таком контексте метод развивался в 90-ые годы XX столетия А. М. Шукуровым и Д. Д. Соколовым, однако эти работы не были доведены до публикации. Авторы благодарны А. М. Шукурову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Паркер Е.Н.* Космические магнитные поля. М.: Мир, 1982.
2. *Моффат Г.К.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980.
3. *Смирнов Д.А., Романова М.М., Ламзин С.А.* Анализ результатов измерений магнитного поля Т Тау // Письма в Астр. журнал. 2005. **31**. 335–344.
4. *Dobler W., Stix M., Brandenburg A.* Magnetic field generation in fully convective spheres // *Astrophys. J.* 2006. **638**. 336–347.
5. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир, 1980.
6. *Rädler K.-H., Wiedemann E.* Numerical experiments with a simple nonlinear mean-field dynamo model // *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.* 1989. **49**. 71–79.
7. *Parker E.N.* Hydromagnetic dynamo models // *Astrophys. J.* 1955. **122**. 293–314.
8. *Галицкий В.М., Соколов Д.Д., Кузанын К.М.* Динамо-волна вблизи солнечного экватора // *Астрон. журнал.* 2005. **82**. 378–384.
9. *Соколов Д.Д., Фьок М., Нем-Риб Э.* Асимптотические свойства динамо-волны // *Магнитная гидродинамика.* 1995. **31**. 18–37.
10. *Jennings R.L.* Symmetry breaking in a nonlinear $\alpha\omega$ -dynamo // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 1991. **57**. 147–189.
11. *Jennings R.L., Weiss N.O.* Symmetry breaking in stellar dynamos // *MNRAS.* 1991. **252**. 249–260.
12. *Moss D., Sokoloff D., Kuzanyan K., Petrov A.* Stellar dynamo waves: asymptotic configurations // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 2004. **98**. 257–272.

Поступила в редакцию
11.05.2007
