УДК 517.977.58

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

С. С. Жулин[1]

Рассматривается метод продолжения по параметру (гомотопии) решения нелинейных уравнений и его численная реализация. Описывается и исследуется один подход к применению метода продолжения к поиску экстремалей Понтрягина в задачах оптимального управления (ЗОУ). Предлагаются разработанные автором методики распространения подхода на нелинейные по управлению ЗОУ и задачи с негладкой областью управления. Описанные алгоритмы были реализованы при разработке программного комплекса "Система Optimus".

Ключевые слова: численный метод, оптимальное управление, краевая задача, продолжение по параметру, гомотопия.

1. Введение. Метод продолжения решения по параметру является мощным численным инструментом решения нелинейных алгебраических и функциональных уравнений. Основным его достоинством перед классическими методами является присущая ему при определенных предположениях глобальная сходимость. Однако этот метод не так широко известен, как классические методы, во многом из-за того, что довольно скудно освещен в русскоязычной литературе.

Идея применения продолжения по параметру для исследования решений нелинейных уравнений восходит к работам У. Леверье (1886) и А. Пуанкаре (1892). По-видимому, впервые для численного решения уравнений метод продолжения был применен бельгийским математиком М. Лаэйем (1934) для случая одного уравнения. Для движения вдоль кривой решений он использовал дискретное продолжение посредством метода Ньютона. Позже Лаэй [47] рассмотрел также и системы уравнений. В более эффективном дифференциальном виде метод сформулировал Д. Ф. Давиденко [13, 14] и применил его к широкому классу задач, таких как обращение матриц, вычисление определителей, вычисление собственных значений матриц и решение интегральных уравнений. Эту же идею дифференцирования по параметру применяли несколько ранее для решения частных задач В. А. Фок [28] и В. С. Кирия [19], а немного позже Н. А. Шидловская [33]. Впоследствии метод продолжения по параметру был применен для решения краевых и простейших вариационных задач В. Е. Шаманским [32], Робертсом и Шипменом [52] (см. также [30, 34, 37 – 39]). В конце 70-х–начале 80-х годов XX в. были предложены варианты метода продолжения, обладающие глобальной сходимостью при достаточно слабых предположениях [45, 51]. Крупный вклад в развитие метода внесли Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин и Е. Б. Кузнецов, их работы [12, 31] являются одними из наиболее основательных отечественных трудов по методу продолжения; отметим также одну из первых работ по данной теме [30]. С 80-х годов XX в. метод продолжения в приложении к задачам оптимального управления развивается С. Н. Аввакумовым и Ю. Н. Киселевым [2, 4, 21, 37].

В последней четверти XX в. существенный вклад в развитие и популяризацию метода внесли зарубежные математики Олгоуэр и Георг. Благодаря их великолепной обзорной работе [35], рассматриваемая тема получила сильный толчок к развитию [41, 42, 50, 54].

Основной темой настоящей статьи является применение метода продолжения к задачам оптимального управления. Для этого существует множество кардинально различных путей, ознакомиться с некоторыми из них можно в работах [15, 21, 37, 38, 43, 44, 55]. Мы же излагаем один из подходов, который основан на принципе максимума Понтрягина [26].

2. Теория гомотопии. Рассмотрим задачу решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\Phi(p) = 0, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Функцией гомотопии называется любая гладкая функция

$$H(p, \mu), \quad H : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; e-mail: ZStep@yandex.ru

удовлетворяющая условиям $H(p,0) = g(p)$, $H(p,1) = \Phi(p)$. Эта функция служит непрерывному деформированию функции g в исходную функцию Φ. Функция $g(p)$ конструируется таким способом, чтобы ее корни были известны или легко находились. Тогда, перемещаясь от корня $H(p,0) = 0$ вдоль кривой

$$H(p,\mu) = 0 \tag{3}$$

и меняя значения параметра от $\mu = 0$ до $\mu = 1$, мы придем к корню исходной системы. Такой подход называется методом гомотопии, или методом продолжения решения по параметру.

Наиболее простыми и часто используемыми гомотопиями являются:

а) гомотопия неподвижной точки (fixed point homotopy)

$$H(p,\mu) = \mu\Phi(p) + (1-\mu)(p - p_0); \tag{4}$$

б) гомотопия Ньютона (Newton homotopy)

$$H(p,\mu) = \Phi(p) - (1-\mu)\Phi(p_0). \tag{5}$$

В обоих случаях уравнение $H(p,0) = 0$ имеет корень p_0.

В задачах оптимального управления в некоторых работах применяется гомотопия по времени процесса [15].

Предположение 1. *Отображение* $H : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *гладкое.*

Справедливость этого предположения для функций (4) и (5) напрямую зависит от гладкости функции $\Phi(p)$.

Предположение 2. *Якобиан функции* H *имеет максимальный ранг:* $\operatorname{rank}\big(H'(p_0,0)\big) = N$ *в точке* $(p_0,0)$.

Из сделанных предположений следует возможность выбора индекса i, $1 \leqslant i \leqslant N+1$, таким образом, чтобы минор якобиана $H'(p_0,0)$, полученный удалением i-го столбца, оказался невырожденным. По теореме о неявной функции множество решений $H^{-1}(0)$ может быть локально параметризовано i-й координатой в качестве параметра. Отсюда следует

Лемма. *В предположениях* 1 *и* 2 *существует гладкая кривая* $\big(p(\alpha),\mu(\alpha)\big)$ *на некотором открытом интервале, содержащем нуль.*

Это означает, что существует возможность продвинуться вдоль кривой (p,μ) по параметру α, если предположить невырожденность якобиана и в следующей точке; процесс движения вдоль кривой можно продолжить (быть может, с использованием другого параметра). В таком "шаг за шагом" продвижении и заключается идея численного применения метода продолжения.

Здесь остается свобода в выборе параметризации кривой. Во избежание смены параметра целесообразно в качестве него взять длину дуги $s = \big\|(p,\mu)\big\|$ (в [31] это подразумевается под наилучшей параметризацией).

Простейший вариант естественной параметризации по μ возможен, если выполнено

Предположение 3. *Пусть* $\det \dfrac{\partial H}{\partial p} \neq 0$.

Для гомотопии Ньютона это эквивалентно выполнению неравенства

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial p} \neq 0. \tag{6}$$

Определение. Пусть $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ — гладкое отображение. Точка $x \in \mathbb{R}^p$ называется регулярной точкой f, если якобиан $f'(x)$ имеет максимальный ранг $\min(p,q)$. Значение $y \in \mathbb{R}^q$ называется регулярным значением f, если x — регулярная точка f для всех $x \in f^{-1}(y)$. Точки и значения называются сингулярными, если они не регулярные.

В случае использования параметра длины дуги s справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть нуль является регулярным значением функции* H. *Тогда существует гладкая кривая* $\big(p(s),\mu(s)\big) : H\big(p(s),\mu(s)\big) = 0$, $s \in \mathbb{R}$.

Доказательство этой теоремы в расширенном варианте можно найти в [35].

Если предположения регулярности не выполняются, то дискретизированное уравнение $H = 0$ может иметь точки бифуркации.

Численное решение методом продолжения по параметру представляет собой отслеживание кривой $p = p(\mu) \mid H(p,\mu) = 0$ и вычисление $p(1)$. Для этого существует несколько подходов, основными из которых являются:

1) метод кусочно-линейных аппроксимаций, основанный на триангуляциях [8, 35];

2) решение системы дифференциальных уравнений с высокой точностью и итерационное уточнение [13, 15, 37];

3) схема предиктор–корректор [35];

4) решение системы дифференциальных уравнений с обратной связью (техника стабилизирующего члена [2]).

Последние три подхода во многом схожи, отличие заключается в том, что в схеме предиктор–корректор интегрирование дифференциальной системы ведется не так точно, а возврат на кривую осуществляется с помощью проектирования. В последнем подходе в дифференциальной системе содержится член в форме обратной связи, который непрерывно по значению невязки уточняет решение системы.

3. Численное отслеживание кривой гомотопии. В предыдущем разделе была описана теория гомотопии; теперь опишем достаточно простой, но эффективный основанный на ней численный метод, предлагаемый автором. Итак, исходная задача — нахождение корня нелинейной системы (1).

Предположим, что существует единственный корень p_* этой системы. Будем использовать гомотопию Ньютона (5).

Предположение 4. *Пусть* $\forall \mu \in [0,1]$ *существует решение уравнения* (3):

$$p = p(\mu), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \tag{7}$$

причем функция $p(\mu)$ *является гладкой на* $[0,1]$ *и удовлетворяет начальному условию* $p(0) = p_0$, *а вдоль решения* (7) *выполнено условие* (6), *т.е.* $\det \dfrac{\partial \Phi}{\partial p} \neq 0$.

Продифференцируем по μ уравнение $H\big(p(\mu),\mu\big) = 0$, что эквивалентно $\Phi\big(p(\mu)\big) = (1-\mu)\Phi(p_0)$, и получим $\dfrac{\partial \Phi}{\partial p}\Big|_{p=p(\mu)} \dfrac{dp(\mu)}{d\mu} = -\Phi(p_0)$; с учетом условия $p(0) = p_0$ приходим к задаче Коши

$$\frac{dp}{d\mu} = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right]^{-1} \Phi(p_0), \quad p(\mu)\big|_{\mu=0} = p_0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1. \tag{8}$$

Решая эту задачу, находим корень исходной системы уравнений: $p_* = p(\mu)\big|_{\mu=1}$.

Замечания. 1. Правая часть полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений не зависит от переменной μ.

2. Для вычисления правой части требуется не обращение матрицы, а лишь решение системы линейных уравнений с матрицей Φ_p и столбцом правых частей $-\Phi(p_0)$.

3. Метод можно применять итерационно, используя вычисленные значения как новые начальные приближения p_0 до тех пор, пока требуемая точность не будет достигнута.

4. При использовании для решения полученной задачи Коши одного шага метода Эйлера итерационный процесс превращается в классический метод Ньютона.

Как бы точно мы ни решали задачу Коши (8) явными методами, ограничение $H(p,\mu) = 0$ будет нарушаться. Для удержания траектории на кривой целесообразно применять корректирование, т.е. после каждого шага интегрирования выполнять проверку условия $H(p_s,\mu_s) < \varepsilon$; если оно не выполняется, то следует решать уравнение $H(p,\mu_s) = 0$ по p. Для этого можно применять различные методы, не требующие нахождения производной, например метод простой итерации или метод секущих. Однако так как мы уже используем производную $H_p = \Phi_p$ при нахождении предиктора, то целесообразнее применять метод Ньютона, его модификации или квазиньютоновские методы. Если начальное приближение не удовлетворяет условию сходимости применяемого метода коррекции, то шаг интегрирования необходимо уменьшить.

Модифицированные методы Ньютона позволяют улучшить соотношение между количеством итераций и количеством нахождений производной. Квазиньютоновские методы расширяют область сходимости, являясь в некотором роде гибридом метода Ньютона и метода скорейшего спуска. Исследование модификаций метода Ньютона не входит в задачу настоящей работы, тем более что эта тема очень широко освещена в литературе. Для изучения рекомендуется фундаментальная работа [22], с последними исследованиями и оценками сходимости можно ознакомиться в статьях [40, 46, 48, 49].

В качестве метода интегрирования дифференциальной системы (предиктора) предлагается использовать явный метод Эйлера или явные методы Рунге–Кутта более высоких порядков. Оценки локальной погрешности для этих методов хорошо известны (см. [5, 6]).

4. Применение метода продолжения по параметру к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Будем рассматривать следующую постановку краевой задачи для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений со смешанными условиями в двух точках:

$$\dot{x} = f(x,t), \quad R\big(x(a), x(b)\big) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Предположим, что существует единственное решение $x_*(t)$ этой краевой задачи. Сведем поиск решения задачи (9) к решению некоторого конечномерного уравнения $\Phi(p) = 0$, к которому впоследствии будет возможно применение метода продолжения по параметру. Для простоты изложения приведем одноточечный формализм сведе́ния, в котором искомый вектор p представляет собой точку на кривой решения краевой задачи. Возможны более общие многоточечные подходы.

Далее все функции, зависящие от t, рассматриваются на отрезке $[a,b]$. Обозначим через $x(p,t)$ решение задачи Коши $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_*) = p$, где $t_* \in [a,b]$ — произвольный фиксированный момент времени и $x(p,t)$ — семейство кривых параметра $p \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих исходной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая содержит искомое решение:

$$x_*(t) = x(p_*, t). \tag{10}$$

Обозначим матрицу производных функции $x(p,t)$ по p через $X(p,t) = \dfrac{\partial x(p,t)}{\partial p} \in \mathbb{R}^{n\times n}$; предположение о существовании такой матрицы накладывает ограничения на функцию $f(x,t)$ — необходимо существование непрерывной производной $f'_x(x,t)$.

Для решения системы алгебраических уравнений $\Phi(p) = 0$, где $\Phi(p) = R\big(x(p,a), x(p,b)\big)$, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, применим метод продолжения по параметру. Получим задачу Коши, называемую *внешней задачей*:

$$\frac{dp}{d\mu} = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right]^{-1} \Phi(p_0), \quad p(\mu)\big|_{\mu=0} = p_0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1; \tag{11}$$

для ее решения следует находить производную (градиент) функции $\Phi(p)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial R}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x(p,a)\\ y=x(p,b)}} X(p,a) + \frac{\partial R}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x(p,a)\\ y=x(p,b)}} X(p,b).$$

Для нахождения $x(p,a)$, $X(p,a)$, $x(p,b)$, $X(p,b)$ решается задача Коши для уравнения первой вариации по начальным данным, называемая *внутренней задачей*:

$$\dot{x} = f(x,t), \quad \dot{X} = f'_x(x,t)X, \quad x(t_*) = p, \quad X(t_*) = I. \tag{12}$$

Посредством решения внешней задачи находим значение $p_* = p(\mu)\big|_{\mu=1}$, т.е. решение исходной краевой задачи (9).

Здесь актуальны все замечания, сделанные в предыдущем разделе статьи. Для внутренней задачи целесообразно применять методы с контролем локальной погрешности (с переменным шагом), которые позволяют достигать заданной точности без повторного интегрирования.

Возможны случаи, когда исходная система очень сложна и непосредственное решение сопряжено с большими вычислительными затратами (например, правая часть имеет очень большую константу Липшица). Предлагается методика постепенного перехода от более простой задачи к более сложной. Для этого может использоваться модифицированная гомотопия Ньютона:

$$H(p,\mu) = \widetilde{\Phi}(p,\mu) - (1-\mu)\widetilde{\Phi}(p_0, 0), \quad \widetilde{\Phi}(p,1) = \Phi(p). \tag{13}$$

В краевой задаче параметр μ вводится в правую часть системы так, что при $\mu = 1$ имеем исходную систему (или хорошее ее приближение), а при $\mu = 0$ получается простая для решения задача (например, очень гладкая). В следующем разделе этот подход будет использоваться для сглаживания области управления. Опишем реализацию предложенной схемы для задачи $\dot{x} = f(x,t,\mu)$, $R\big(x(a), x(b)\big) = 0$, $\mu \in [0,1]$.

Обозначим через $x(p,t,\mu)$ решение задачи Коши $\dot{x} = f(x,t,\mu)$, $x(t_*) = p$.

Продифференцировав по μ уравнение гомотопии $H(p,\mu) = 0$ с функцией (13), получим следующую внешнюю задачу:

$$\frac{dp}{d\mu} = -\left[\frac{\partial \widetilde{\Phi}(p,\mu)}{\partial p}\right]^{-1} \left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}(p,\mu)}{\partial \mu} + \Phi(p_0, 0)\right), \quad p(\mu)\big|_{\mu=0} = p_0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1. \tag{14}$$

Обозначив $X(p,t,\mu) = \dfrac{\partial x(p,t,\mu)}{\partial p}$ и $m(p,t,\mu) = \dfrac{\partial x(p,t,\mu)}{\partial \mu}$, получим формулы для вычисления производных функции $\Phi(p,\mu)$:

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}(p,\mu)}{\partial p} = \frac{\partial R}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x(p,a,\mu)\\ y=x(p,b,\mu)}} X(p,a,\mu) + \frac{\partial R}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x(p,a,\mu)\\ y=x(p,b,\mu)}} X(p,b,\mu),$$

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}(p,\mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial R}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x(p,a,\mu)\\ y=x(p,b,\mu)}} m(p,a,\mu) + \frac{\partial R}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x(p,a,\mu)\\ y=x(p,b,\mu)}} m(p,b,\mu).$$

Для нахождения векторов $x(p,a,\mu)$, $x(p,b,\mu)$, $m(p,a,\mu)$, $m(p,b,\mu)$ и матриц $X(p,a,\mu)$, $X(p,b,\mu)$ решается внутренняя задача

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x,t,\mu), \quad \dot{X} = f'_x(x,t,\mu)X, \quad \dot{m} = f'_x(x,t,\mu)m + f'_\mu(x,t,\mu), \\ &x(t_*) = p, \quad X(t_*) = I, \quad m(t_*) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

5. Многоточечный подход. Описанный выше одноточечный подход к решению краевой задачи имеет существенный недостаток. Как известно, при больших интервалах времени $[a,b]$ задача Коши может быть неустойчивой, а локальная константа Липшица функции Φ в уравнении $\Phi(p) = 0$ может быть очень велика. Из-за этой особенности в работе [24] Н. Н. Моисеев делает вывод о невозможности решения некоторых задач посредством такого подхода (следует заметить, что в указанной работе используется классический метод Ньютона).

При использовании метода продолжения эта проблема стоит не так остро, так как ограничения сверху на величину производной $|\Phi_p|$ в явном виде отсутствуют. Тем не менее, в плохих случаях указанная проблема может привести к сильному уменьшению шага интегрирования во внешней задаче и к невозможности решения вследствие накопления погрешностей округления. Для устранения этого недостатка предлагается следующая редукция краевой задачи к нелинейному уравнению, известная в зарубежной литературе под названием “multiple shooting” и впервые предложенная, насколько известно автору, Осборном (1968).

Отрезок времени $[a,b]$ разбивается на s частей $a = t_1, \ldots, t_{s+1} = b$. Вектор переменных составляется из s точек искомой траектории: $p = \big\{p_1 = x(t_1), \ldots, p_s = x(t_s)\big\}$.

Обозначим через $x(p_i,t)$ решение задачи Коши $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_i) = p_i$.

В функцию Φ кроме краевых условий добавим еще и условия непрерывности траектории в моменты времени t_i:

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} K\big(x(p_1,a), x(p_s,b)\big) \\ x(p_1,t_2) - p_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x(p_{s-1},t_s) - p_s \end{pmatrix}, \quad \Phi : \mathbb{R}^{ns} \to \mathbb{R}^{ns}.$$

Внешняя задача записывается полностью аналогично одноточечному подходу (11), (14), при этом здесь в s раз увеличивается размерность решаемой системы линейных уравнений $\left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial p}\right]\dfrac{dp}{d\mu} = -\Phi(p_0)$. Однако эта система является разреженной, что позволяет применять соответствующие методы, имеющие невысокую ресурсоемкость. В блочном виде матрица системы выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & & 0 & B \\ C_1 & -I & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -I & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & -I & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & C_{s-1} & -I \end{bmatrix},$$

где $A = \dfrac{\partial K\big(x(p_1,a), x(p_s,b)\big)}{\partial p_1}$, $B = \dfrac{\partial K\big(x(p_1,a), x(p_s,b)\big)}{\partial p_s}$ и $C_i = \dfrac{\partial x(p_i,t_{i+1})}{\partial p_i}$.

Внутренняя задача представляет собой решение s коротких задач Коши

$$\dot{x} = f(x,t), \quad \dot{X} = f'_x(x,t)X, \quad x(t_i) = p_i, \quad X(t_i) = I, \quad i = 1, s,$$

для вычисления значений $x(p_i, t_{i+1})$, $i = 1, \ldots, s$, и соответствующих производных по начальным данным. Трудоемкость внутренней задачи не увеличивается, она решается один раз для каждого нахождения производной $\Phi'(p)$ во внешней задаче.

Суть описанного подхода заключается в том, чтобы отказаться от сохранения непрерывности в моментах t_i. В окончательном решении пределы справа и слева в этих точках стянутся и условия непрерывности будут выполнены с заданной точностью.

Несмотря на кажущуюся расточительность этого подхода, оказывается, что затраты на итерацию сопоставимы с соответствующими затратами при одноточечном подходе. При этом многоточечный подход может позволить получить решение даже в том случае, если при использовании одноточечного подхода искомой кривой гомотопии попросту не существует.

6. Све́дение задачи оптимального управления к краевой задаче. Известно, что проблема поиска экстремали Понтрягина в задаче оптимального управления сводится к решению краевой задачи, что позволяет применять к ней описанные выше численные методы. Далее будет описан класс задач оптимального управления, процесс построения краевой задачи и особенности применения к ней метода продолжения по параметру.

Для ознакомления с фундаментальной теорией оптимального управления и принципом максимума Понтрягина рекомендуется обратиться к трудам [23, 26]. Для ознакомления с прикладной теорией и численными методами оптимального управления рекомендуются работы [9, 11, 24, 27].

Выпишем стандартную постановку задачи оптимального управления. Начнем с задачи быстродействия из множества на множество:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m \quad x(0) \in X_0, \quad x(T) \in X_1, \quad T \to \min\,,$$

где управление $u(\cdot)$ принадлежит классу кусочно-непрерывных функций. Начальное X_0 и терминальное X_1 множества — выпуклые компакты, заданные соответствующими опорными функциями $c(X, \xi) = \max\limits_{x \in X} (x, \xi)$ [7], или точки. Область управления U — гладкий выпуклый компакт.

Определение. Под гладким выпуклым компактом будем понимать такой выпуклый компакт, опорная функция которого удовлетворяет следующим условиям:

1) условию гладкости $\exists\, c''(\xi)\ \forall \xi \neq 0$;

2) условию максимальности ранга гессиана: $\operatorname{rank}\big[c''(\xi)\big] = \dim(u) - 1$.

Это определение эквивалентно тому, что любое опорное множество состоит из единственной точки, причем для различных направлений они различны. Отсюда следует, что гладкость, в нашем понимании, влечет строгую выпуклость. Негладкие области управления будут рассмотрены далее с помощью процедуры сглаживания.

Для задачи поиска экстремали будем применять необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Запишем функцию Гамильтона–Понтрягина: $H(x, \psi, u, t) = \big(f(x, u, t), \psi\big)$.

Сделаем

Предположение 5. *Существует единственный максимизатор функции Гамильтона–Понтрягина* $u^*(x, \psi, t) = \arg\max\limits_{u \in U} H(x, \psi, u, t)$.

Очевидно, что для аффинных по управлению задач это предположение выполнено (следствие выпуклости области управления).

В предположении, что требования принципа максимума выполнены, соответствующая теорема гарантирует существование нетривиальной сопряженной переменной ψ, удовлетворяющей сопряженному уравнению, которое в сочетании с исходной дифференциальной системой дает краевую задачу для принципа максимума: $\dot{x} = H_\psi(x, \psi, u^*(x, \psi, t), t)$, $\quad \dot{\psi} = -H_x(x, \psi, u^*(x, \psi, t), t)$. Краевые условия получаются из условий трансверсальности: $x(0) = c'\big(X_0, \psi(0)\big)$, $x(T) = c'\big(X_1, -\psi(T)\big)$; в частном случае точек они выглядят так: $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$.

Для задач с нефиксированным временем, таких как задачи быстродействия, предлагается сделать замену временно́й переменной $\tau = \dfrac{t}{T}$ и ввести время T в фазовое пространство в виде постоянной функции:

$$\dot{x}_\tau = TH_\psi\big(x, \psi, u^*(x, \psi, \tau), \tau\big), \quad \dot{\psi}_\tau = -TH_x\big(x, \psi, u^*(x, \psi, \tau), \tau\big), \quad \dot{T}_\tau = 0, \quad \tau \in [0, 1].$$

Для устранения неоднозначности, связанной с инвариантностью к умножению сопряженной переменной на константу, требуется принять условие нормировки сопряженной переменной на одном из концов отрезка. Таким образом, имеем $2n + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений и столько же краевых условий.

Для задач с терминальным функционалом $J = \Phi\big(x(T)\big) \to \min$ изменяется только правое краевое условие: $\psi(T) = -\Phi'\big(x(T)\big)$.

Для задач с интегральным функционалом $J = \int\limits_0^T f_0\big(x(t), u(t), t\big)\, dt \to \min$ изменяется функция Гамильтона–Понтрягина: $H(x, \psi, u, t) = \psi_0 f_0\big(x(t), u(t), t\big) + \big(f(x, u, t), \psi\big)$; предполагая существование функционала, можно положить $\psi_0 = -1$. В случае нефиксированного правого конца краевое условие на правом конце $x(T) = x_1$ заменяется на $\psi(T) = 0$.

Для применения метода продолжения по параметру, описанного в предыдущем разделе, к поставленным краевым задачам необходимо выдвинуть дополнительные условия: требуется существование непрерывных производных f_{xx}, $(f_0)_{xx}$, f_{xu}, $(f_0)_{xu}$, $(u^*)_x$ и $(u^*)_\psi$. Для аффинных по управлению задач при условии регулярности управляемой системы, т.е. невырожденности градиента $H'_u(x, \psi, t) \neq 0$, можно найти аналитический вид максимизатора $u^*(x, \psi, t) = \left.\dfrac{\partial c(U, \xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi = H'_u(x, \psi, t)}$.

До сих пор принималось предположение, что область управления U является гладким компактом. В противном случае (например прямоугольника) применение метода продолжения по параметру напрямую невозможно, так как не обеспечиваются требования существования непрерывных производных максимизатора, а следовательно, нарушаются предположения гладкости (предположение 1) и регулярности (предположение 3).

Чтобы избежать указанных трудностей, возможно применение сглаживания области управления. Подробно сглаживание выпуклых компактов описано в работе [1]. Исследование устойчивости решения задачи оптимального управления при сглаживании области управления приведено в работе [4].

Пример. Пусть $c(\xi_1, \xi_2) = a\,|\xi_1| + b\,|\xi_2|$ — опорная функция прямоугольника $[-a, a] \times [-b, b]$. Применение сглаживания с параметром ν дает следующую опорную функцию:

$$\widetilde{c}(\xi_1, \xi_2, \nu) = a\sqrt{\xi_1^2 + (\nu\xi_2)^2} + b\sqrt{(\nu\xi_1)^2 + \xi_2^2}.$$

Очевидно, что при стремлении $\nu \to 0$ сглаженная опорная функция сходится к первоначальной.

Таким образом, в результате сглаживания область управления становится гладким компактом, опорная функция которого зависит от параметра ν.

Для внедрения сглаживания в схему продолжения предлагается использовать модифицированную гомотопию Ньютона (13), а параметр сглаживания ν выразить через параметр гомотопии $\mu \in [0, 1]$, например так: $\nu = \nu_0 \left(\dfrac{\nu_1}{\nu_0}\right)^\mu$, где ν_0 — начальное значение параметра сглаживания и ν_1 — конечное значение, равное требуемой точности решения.

Выпишем производную правой части по параметру, требуемую для внутренней задачи (15):

$$f'_\mu(x, t, \nu) = f'_\nu(x, t, \nu)\, \nu'_\mu = f'_\nu(x, t, \nu)\, \nu\, \ln\frac{\nu_1}{\nu_0}\,.$$

С использованием предложенного подхода становится возможным применение метода продолжения по параметру в виде (14) к поиску экстремали в ЗОУ с негладкой областью управления.

7. Применение к нелинейным по управлению задачам. До этого свед́ение задачи оптимального управления к краевой задаче для принципа максимума и дальнейшее решение ее методом продолжения по параметру производилось в предположении, что максимизатор функции Гамильтона–Понтрягина задан аналитически. Многие реальные задачи являются нелинейными по управлению, и в большинстве из них найти максимизатор аналитически не представляется возможным. Для таких случаев автором предлагается методика численного нахождения максимизатора с аналитическим вычислением его производных.

Задача поиска максимизатора является стандартной задачей математического программирования: $H(x, \psi, u, t) \to \max\limits_{u \in U}$. Рассмотрим следующий аспект. Очевидно, что намного эффективнее решать n задач оптимизации размерности 1, чем задачу оптимизации размерности n. Для того чтобы воспользоваться этим преимуществом, необходимо разбить задачу оптимизации на независимые части (по функционалу и ограничениям). Это позволяет также выделить независимую линейную часть задачи, решение которой можно найти аналитически.

Разобьем пространство управлений на наибольшее количество l подпространств таким образом, чтобы области управления, соответствующие этим подпространствам, были независимы, т.е. исходная область управления представлялась в виде их прямого произведения:

$$u = (u'_1, u'_2, ..., u'_l), \quad l \leqslant m, \quad u'_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{iN_i}), \quad u'_i \in U'_i \subset \mathbb{R}^{N_i}, \sum_{1 \leqslant i \leqslant l} N_i = m, \quad U = U'_1 \times U'_2 \times ... \times U'_l.$$

Нахождение такого разбиения эквивалентно решению известной задачи разбиения графа на связанные подграфы. Граф обладает m вершинами, между вершинами i и j ребро отсутствует, если $\dfrac{\partial^2 c(U,\psi)}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \equiv 0.$ Среди всех наборов управлений u'_i выделим те, которые содержат только управления u_{ij}, входящие в систему линейно. Объединим все управления, входящие в такие наборы, в вектор $\overline{u} = (\overline{u}_1, ..., \overline{u}_{\overline{N}})$. Остальные наборы управлений обозначим (перенумеруем) так: $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_{\widetilde{l}})$, $\widetilde{l} \leqslant l$. Объединим их в группы, между которыми максимизацию функции Гамильтона–Понтрягина можно производить раздельно. Для этого еще раз решим задачу разбиения графа на связанные подграфы. Граф обладает $\widetilde{l}$ вершинами, между вершинами i и j ребро отсутствует, если матрица $\dfrac{\partial^2 H(x,\psi,u,t)}{\partial \widetilde{u}_i \, \partial \widetilde{u}_j} \equiv 0$. Допустим, что мы получили k групп по $\widetilde{N}_i$ управлений в каждой, обозначим их через $\widetilde{u}^{\,i} = (\widetilde{u}^{\,i}_1, \widetilde{u}^{\,i}_2, \ldots, \widetilde{u}^{\,i}_{\widetilde{N}_i})$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\overline{N} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \widetilde{N}_i = m.$

В итоге функция Гамильтона–Понтрягина представляется в виде

$$H(x,\psi,u,t) = \big(g(x,\psi,t), \overline{u}\big) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} h(x,\psi,\widetilde{u}^{\,i},t); \quad u = (\overline{u}, \widetilde{u}^{\,1}, \ldots, \widetilde{u}^{\,k}), \quad \overline{u} \in \mathbb{R}^{\overline{N}}, \quad \widetilde{u}^{\,i} \in \mathbb{R}^{\widetilde{N}_i}.$$

Максимизатор линейной части находится отдельно:

$$\overline{u}^*(x,\psi,t) = \underset{\overline{u} \in \overline{U}}{\arg\max}\, H(x,\psi,\overline{u},\widetilde{u},t) = c'\big(\overline{U}, g(x,\psi,t)\big) \overset{def}{=} \frac{\partial c(\overline{U},\xi)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi = g(x,\psi,t)}. \tag{16}$$

Максимизатор нелинейной части в общем случае нельзя найти аналитически; требуется искать его численно в каждой точке. В наиболее часто встречающемся случае, когда размерность $\widetilde{u}^{\,i}$ равна 1, можно применять методы глобальной оптимизации, связанные с нахождением нулей производной, или различные модификации метода золотого сечения. В случае большей размерности можно применять более общие методы нелинейного программирования.

Система дифференциальных уравнений краевой задачи для принципа максимума имеет вид

$$\dot{x} = H_\psi\big(x,\psi,\overline{u}^*(x,\psi,t),\widetilde{u}^*(x,\psi,t),t\big), \quad \dot{\psi} = -H_x\big(x,\psi,\overline{u}^*(x,\psi,t),\widetilde{u}^*(x,\psi,t),t\big).$$

Если ввести расширенную переменную $\widetilde{x} = (x,\psi)$, то эту систему можно записать в виде

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = F\big(\widetilde{x}, \overline{u}^*(\widetilde{x},t), \widetilde{u}^*(\widetilde{x},t), t\big).$$

Тип краевых условий определяется конкретным типом ЗОУ.

Для применения метода продолжения по параметру к решению данной краевой задачи (а именно для построения уравнения вариации по начальному значению (12)) необходим градиент правой части системы по $\widetilde{x}$:

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\Big(F\big(\widetilde{x}, \overline{u}^*(\widetilde{x},t), \widetilde{u}^*(\widetilde{x},t), t\big)\Big) = F_{\widetilde{x}} + F_{\overline{u}}\,\overline{u}^*_{\widetilde{x}} + F_{\widetilde{u}}\,\widetilde{u}^*_{\widetilde{x}}.$$

Опишем метод нахождения $\widetilde{u}^*_{\widetilde{x}} = \widetilde{u}^*_{\widetilde{x}}(\widetilde{x}, u^*, t)$.

Предположим, что для фиксированной точки $(\widetilde{x}, t)$ численно найдено значение максимизатора $\widetilde{u}^* = \widetilde{u}^*(\widetilde{x}, t)$, а также $\overline{u}^*$ из соответствующей формулы (16).

Возможны два случая:

1) максимизатор $\widetilde{u}^*$ лежит внутри области $\widetilde{U}$, тогда $H_{\widetilde{u}}(\widetilde{x}, u^*, t) = 0$;

2) максимизатор $\widetilde{u}^*$ лежит на границе области $\widetilde{U}$, тогда $H_{\widetilde{u}}(\widetilde{x}, u^*, t) \perp \widetilde{U}$.

Случай 1. Продифференцируем по $\widetilde{x}$ уравнение $H_{\widetilde{u}}\big(\widetilde{x}, \widetilde{u}^*(\widetilde{x},t), t\big) = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\Big(H_{\widetilde{u}}\big(\widetilde{x}, \widetilde{u}^*(\widetilde{x},t), t\big)\Big) = H_{\widetilde{u}\,\widetilde{x}}(\widetilde{x}, \widetilde{u}^*, t) + H_{\widetilde{u}\,\widetilde{u}}(\widetilde{x}, \widetilde{u}^*, t)\widetilde{u}^*_{\widetilde{x}} = 0.$$

Отсюда $\widetilde{u}^*_{\widetilde{x}} = \widetilde{u}^*_{\widetilde{x}}(\widetilde{x}, \widetilde{u}^*, t) = -\big[H_{\widetilde{u}\,\widetilde{u}}(\widetilde{x}, \widetilde{u}^*, t)\big]^{-1} H_{\widetilde{u}\,\widetilde{x}}(\widetilde{x}, \widetilde{u}^*, t).$

Случай 2. Введем определение ортогональности $H_{\widetilde{u}}(\widetilde{x}, u^*, t) \perp \widetilde{U}$ в точке $u^*(\widetilde{x}, t) = u^*$ в терминах опорной функции: $\left(\widetilde{u}^*(\widetilde{x}, t), \xi\right) = c(\widetilde{U}, \xi)\big|_{\xi = H_{\widetilde{u}}(\widetilde{x}, u^*(\widetilde{x}, t), t)}$.

Продифференцируем по ξ: $\widetilde{u}^*(\widetilde{x}, t) = c'\Big(\widetilde{U}, H_{\widetilde{u}}\big(\widetilde{x}, u^*(\widetilde{x}, t), t\big)\Big)$. Продифференцировав далее по $\widetilde{x}$, получим:

$$\widetilde{u}^*_{\widetilde{x}}(\widetilde{x}, t) = c''\big(\widetilde{U}, H_{\widetilde{u}}(\widetilde{x}, u^*, t)\big)\big[H_{\widetilde{u}\,\widetilde{x}}(\widetilde{x}, u^*, t) + H_{\widetilde{u}\,\widetilde{u}}(\widetilde{x}, u^*, t)\widetilde{u}^*_{\widetilde{x}}(\widetilde{x}, t)\big].$$

Выразим $\widetilde{u}^*_{\widetilde{x}}(\widetilde{x}, t)$: $\widetilde{u}^*_{\widetilde{x}}(\widetilde{x}, u^*, t) = \Big[E - c''\big(\widetilde{U}, H_{\widetilde{u}}(\widetilde{x}, u^*, t)\big)H_{\widetilde{u}\,\widetilde{u}}(\widetilde{x}, u^*, t)\Big]^{-1} c''\big(\widetilde{U}, H_{\widetilde{u}}(\widetilde{x}, u^*, t)\big)H_{\widetilde{u}\,\widetilde{x}}(\widetilde{x}, u^*, t)$.

Таким образом, на основе предложенной методики становится возможным применение метода продолжения по параметру к широкому классу нелинейных по управлению задач оптимального управления. Заметим, что скорость решения задач с численным поиском максимизатора во многих случаях снижается не сильно, поскольку к независимой линейной части применяется явная подстановка максимизатора в аналитическом виде.

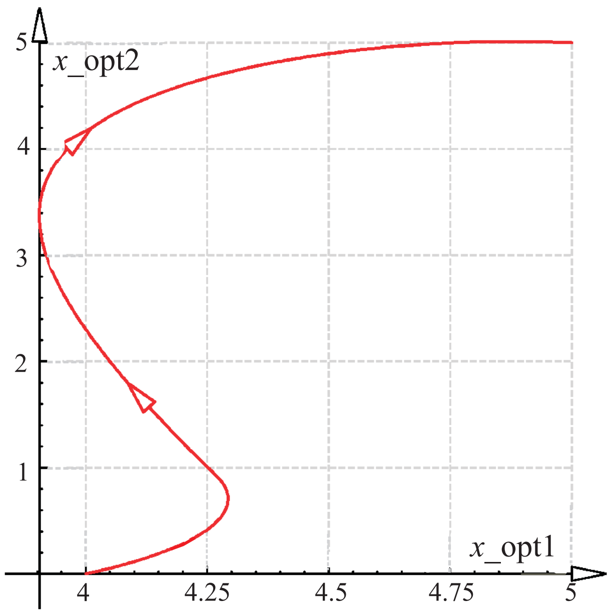

Рис. 1. Оптимальная траектория в задаче (17) в координатах (x_1, x_2)

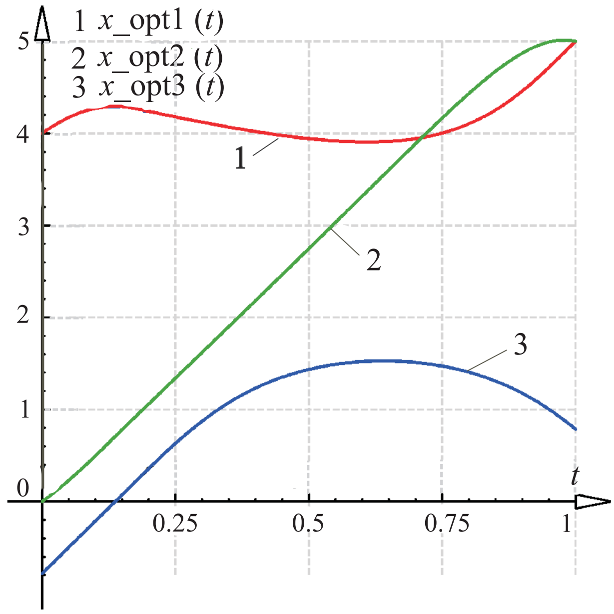

Рис. 2. Оптимальная траектория в задаче (17) в координатах (t, x_i)

8. Пример решения нелинейной по управлению задачи. В качестве подтверждения работоспособности описанного численного метода приведем один интересный пример и его решение в программном комплексе "Система Optimus" [17].

Динамическая система описывает движение мотоцикла с длиной базы b на плоскости. Управляемым является переднее колесо, которое может мгновенно поворачиваться на угол от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Фазовыми координатами являются декартовы координаты переднего колеса и угол между базой мотоцикла и осью абсцисс. Рассматривается задача быстродействия из точки $(x_1^1, x_2^1, \varphi^1)$ в точку $(x_1^2, x_2^2, \varphi^2)$. В исходной постановке задача нелинейна по управлению:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = \cos(x_3 + u), \quad \dot{x}_2 = \sin(x_3 + u), \quad \dot{x}_3 = \sin(u)/b, \\ x(0) = (4, 0, -\pi/4)^T, \quad x(T) = (5, 5, \pi/4)^T, \quad |u| \leqslant \pi/2, \quad J(u) = T \to \min\,.\end{gathered} \tag{17}$$

Найдем экстремаль Понтрягина численно с помощью "Системы Optimus". Листинг решения данной задачи имеет следующий вид:

vector(1, u)
vector(3, x, f(x, u))
$\mathbf{b = 1}$
$\mathbf{f_1 = \cos(x_3 + u_1)}$
$\mathbf{f_2 = \sin(x_3 + u_1)}$
$\mathbf{f_3 = \sin(u_2)/b}$

cubic(**U**, $-\pi/$**2**, $\pi/$**2**)
x0 = {**4**, **0**, $-\pi/$**4**}
x1 = {**5**, **5**, $\pi/$**4**}
T = optcontrol(f, U, x0, x1)
 # Кол-во итераций 3, вызовов функции 2 030 448. Время решения 991.2 миллисек.
 # Оптимальное время перехода T = 5.71358 с точностью 6 знаков.
plot(x_opt, 2(1), 0, 1)
plot(x_opt, {1,2,3}, 0, 1)
plot(**u_opt₁**, **0**, **1**)

Временной параметр на графиках приведен к отрезку $[0,1]$.

Если в исходной системе разложить косинус и синус суммы и ввести новые управления $v_1 = \sin(u)$, $v_2 = \cos(u)$, то система преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\dot x_1 = -v_1 \sin(x_3) + v_2 \cos(x_3),\\
&\dot x_2 = v_1 \cos(x_3) + v_2 \sin(x_3), \quad \dot x_3 = v_1/b,\\
&x(0) = (4, 0, -\pi/4)^T, \quad x(T) = (5, 5, \pi/4)^T,\\
&v_1^2 + v_2^2 \leqslant 1, \quad v_2 \geqslant 0, \quad J(u) = T \to \min\,.
\end{aligned} \tag{18}$$

Полученная система линейна по управлению; следовательно, оптимальное управление будет принадлежать границе области, т.е. $v_1^2 + v_2^2 = 1$, что соответствует исходной задаче. Опорная функция новой области управления $c(V,\xi) = \begin{cases} \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}, & \xi_2 > 0,\\ |\xi_1|, & \xi_2 \leqslant 0.\end{cases}$

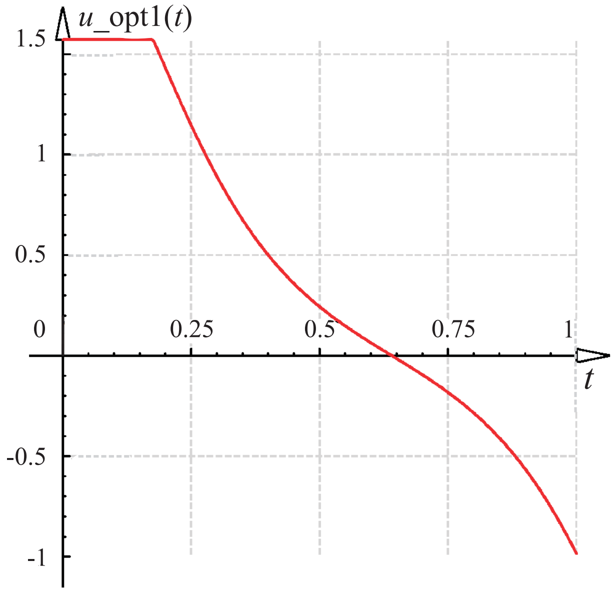

Рис. 3. Оптимальное управление в задаче (17)

Область управления в данной задаче представляет собой полукруг. При решении в “Системе Optimus” будет произведено автоматическое сглаживание опорной функции области управления.

Приведем листинг решения преобразованной задачи:

vector(2, v, ξ)
vector(3, x, f(x,v))
b=1
$\mathbf{f_1} = -\mathbf{v_1} * \mathbf{sin}(\mathbf{x_3}) + \mathbf{v_2} * \mathbf{cos}(\mathbf{x_3})$
$\mathbf{f_2} = \mathbf{v_1} * \mathbf{cos}(\mathbf{x_3}) + \mathbf{v_2} * \mathbf{sin}(\mathbf{x_3})$
$\mathbf{f_3} = \mathbf{v_1}/\mathbf{b}$
 # Опорная функция новой области управления
$\mathbf{c\_V}(\xi) = \mathbf{He}(\xi_2) * \mathbf{sqrt}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \mathbf{He}(-\xi_2) * \mathbf{abs}(\xi_1)$
domain(V, c_V)
plot(V)
x0 = {**4**, **0**, $-\pi/$**4**}
x1 = {**5**, **5**, $\pi/$**4**}
T = optcontrol(f, V, x0, x1, x_opt, v_opt)
 # Кол-во итераций 2, вызовов функции 2 732 730. Время решения 574.9 миллисек.
 # Оптимальное время перехода T = 5.71358 с точностью 6 знаков.
plot(x_opt, 2(1), 0, 1)
plot(x_opt, (1,2,3), 0, 1)
plot(v_opt, (1,2), 0, 1)
 # Возвращаемся к исходному управлению
$\mathbf{u\_opt}(\mathbf{t}) = \mathbf{asin}(\mathbf{v\_opt_1}(\mathbf{t}))$
plot(u_opt, 0, 1)

Таким образом, получена оптимальная траектория (рис. 4, 5), управление (рис. 6, 7) и значение функционала $T = 5.71358$, идентичные таковым в исходной нелинейной задаче (рис. 1–3). Полученные

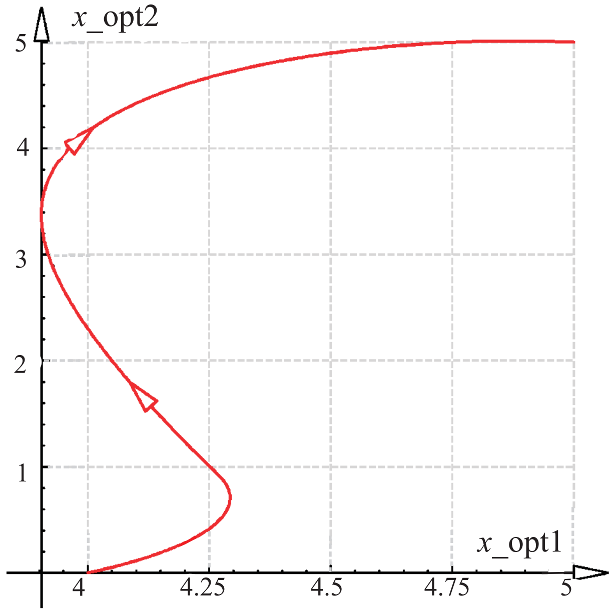

Рис. 4. Оптимальная траектория в задаче (18) в координатах (x_1, x_2)

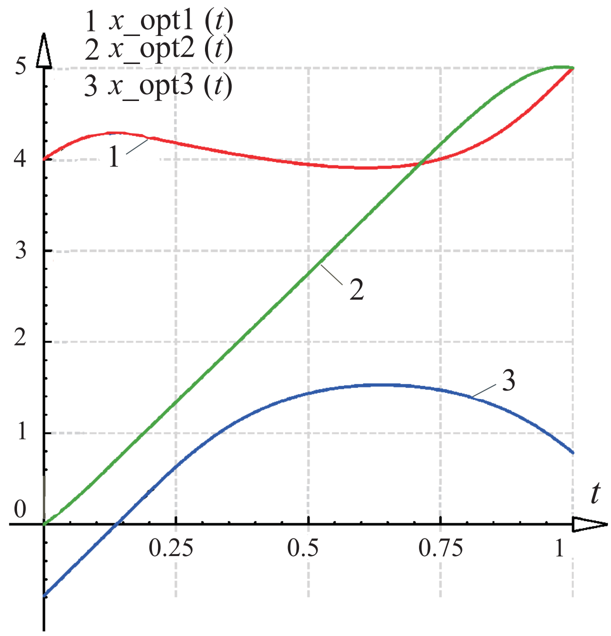

Рис. 5. Оптимальная траектория в задаче (18) в координатах (t, x_i)

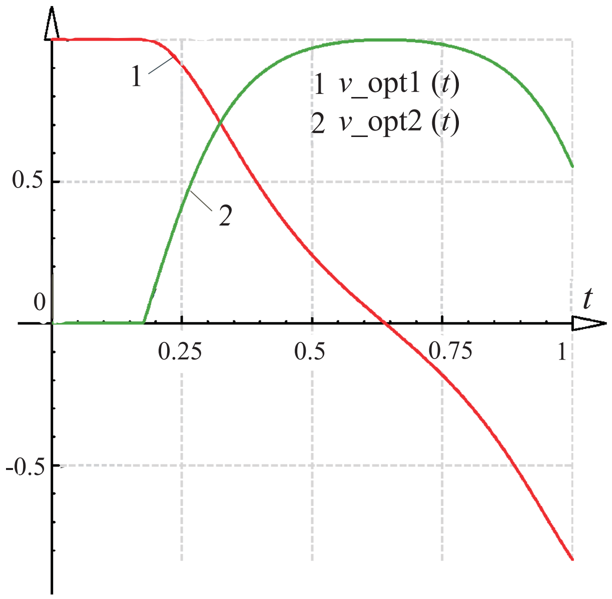

Рис. 6. Оптимальное управление в задаче (18)

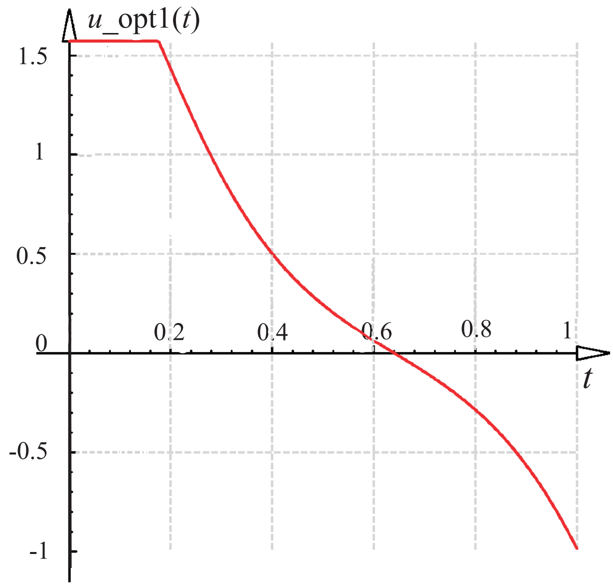

Рис. 7. Исходное управление $\arcsin\bigl(v_1(t)\bigr)$

результаты подтверждают возможность практического применения предложенного метода для решения нелинейных по управлению задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аввакумов С.Н.* Гладкая аппроксимация выпуклых компактов // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. Екатеринбург. 1996. **4**. 184–200.
2. *Аввакумов С.Н.* Решение гладкой линейной задачи быстродействия методом продолжения по параметру с обратной связью // Некоторые вопросы вычислит. матем., матем. физ. и прогр. обеспеч. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 52–54.
3. *Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н.* Некоторые алгоритмы оптимального управления // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. Екатеринбург. 2006. **12**, № 2. 1–15.

4. *Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н., Орлов М.В.* Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1995. **211**. 3–31.
5. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
6. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Физматлит, 2000.
7. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
8. *Болдырев В.И.* Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2004. № 1. 28–123 (http://www.neva.ru/journal).
9. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
10. *Васильев О.В.* Методы оптимизации в функциональных пространствах. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1979.
11. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
12. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988.
13. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. **88**. 601–602.
14. *Давиденко Д.Ф.* О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Украинский матем. журнал. 1953. **5**, № 2. 196–206.
15. *Дикусар В.В., Кошька М., Фигура А.* Метод продолжения по параметру при решении краевых задач в оптимальном управлении // Дифференциальные уравнения. 2001. **37**, № 4. 453–457.
16. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
17. *Жулин С.С.* Численное решение задач оптимального управления с помощью системы Optimus // Проблемы динамического управления: Сб. научн. трудов ф-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / Под ред. Ю. С. Осипова, А. В. Кряжимского. Вып. 1. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2005. 158–165.
18. *Исаев В.К., Сонин В.В.* Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1963. **3**, № 6. 1114–1116.
19. *Кирия В.* Движение тел в сопротивляющихся средах // Тр. Тбилисского ун-та. 1951. № 44. 1–20.
20. *Киселев Ю.Н.* Оптимальное управление. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
21. *Киселев Ю.Н.* Схема продолжения по параметру в нелинейной задаче быстродействия // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 1990. № 2. 51–52.
22. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
23. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
24. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
25. *Ортега Дж., Рейнболт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
26. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
27. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
28. *Фок В.А.* Дифракция волн вокруг земной поверхности. М.; Л.: Изд. АН СССР, 1946.
29. *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973.
30. *Шалашилин В.И.* Метод продолжения по параметру и его применение к задаче больших прогибов непологой круговой арки // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1979. № 4. 178–184.
31. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
32. *Шаманский В.Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев: Наукова Думка, 1966.
33. *Шидловская Н.А.* Применение метода дифференцирования по параметру к решению нелинейных уравнений в банаховых пространствах // Уч. зап. Львовского ун-та. Сер. матем. наук. 1958. № 33. 3–17.
34. *Allgower E.L., Bates D.J., Sommese A.J., Wampler C.W.* Solution of polynomial systems derived from differential equations // Computing. 2006. **76**, N 1. 1–10.
35. *Allgower E.L., Georg K.* Introduction to numerical continuation methods. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1990.
36. *Allgower E.L., Georg K.* Numerically stable homotopy methods without an extra dimension // Proc. of SIAM–AMS Summer Seminar on Computational Solution of Nonlinear Systems of Equations. Ft. Collins (USA), 1988. 1–13.
37. *Avvakumov S.N., Kiselev Yu.N.* Boundary value problem for ordinary differential equations with applications to optimal control // Proc. of the Tenth Crimean Autumn Mathematical School. Spectral and Evolution Problems. Vol. 10. Simferopol, 2000. 1–5.
38. *Bonnard B., Caillau J., Dujol R.* Continuation methods and single input time optimal orbital transfer. Preprint. Institut de Mathematiques de Bourgogne. Bourgogne, 2006 (http://math.u-bourgogne.fr/topo/prepub/continuation.pdf).
39. *Bosarge W.* Infinite dimensional iterative methods and applications. Report 320. IBM Houston Sci. Center. Houston, 1968.

40. *Catinas E.* The inexact, inexact perturbed and quasi-Newton methods are equivalent models // Mathematics of Computation. 2004. **74**, N 249. 291–301.
41. *Decarolis F., Mayer R., Santamaria M.* Homotopy continuation methods: An algorithm for the fixed point and Newton homotopy methods with some examples. Preprint. The University of Chicago. Chicago, 2005.
42. *Dunlavy D.M., O'Leary D.P.* Homotopy optimization methods for global optimization. 2005 (http://www.cs.umd.edu/~oleary/tr/4773.pdf).
43. *Ehtamo H., Raivio T., Hamalainen R.P.* A continuation method for minimum time problems. Systems Analysis Laboratory Research. Report E3. Helsinki University of Technology. Helsinki, 2000.
44. *Gergaud J., Haberkorn T.* Homotopy method for mininum consumption orbit transfer problem // ESAIM Control Opt. and Calc. of Var. 2006. **12**, N 2. 294–310.
45. *Keller H.B.* Global homotopies and Newton methods // Recent Advances in Numerical Analysis. New York–London: Academic Press, 1978. 73–94.
46. *Kelley C.T., Sachs E.W.* Approximate quasi-Newton method // Mathematical Programming. 1990. **48**, N 1. 41–70.
47. *Lahaye M.E.* Solution of system of transcendental equations // Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 1948. **5**. 805–822.
48. *Martinez J.M.* Quasi-inexact-Newton methods with global convergence for solving constrained nonlinear systems // Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications. 1997. **30**. 1–8.
49. *Morini B.* Convergence behaviour of inexact Newton methods // Mathematics of Computation. 1999. **68**, N 228. 1605–1613.
50. *Nocedal J., Wright S.J.* Numerical optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
51. *Percell P.* Note on a global homotopy // Numer. Funct. Anal. Optim. 1980. N 2. 99–106.
52. *Roberts S., Shipman J.* Continuation in shooting methods for two-point boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. 1967. **18**. 45–58.
53. *Watson L.T.* Numerical linear algebra aspects of globally convergent homotopy methods // SIAM Review. 1986. **28**, N 4. 529–545.
54. *Watson L.T.* Theory of globally convergent probability-one homotopies for nonlinear programming // SIAM J. on Optimization. 2000. **11**. 761–780.
55. *Weiser M.* Function space complementarity methods for optimal control problems. Dissertation Eingereicht am Fachbereich Mathematik und Informatik der Freien Universitat. Berlin, 2001 (http://www.diss.fu-berlin.de/2001/189/index.html).

Поступила в редакцию
02.05.2007