

УДК 517.444:519.65

НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЭЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ПАКЕТЕ MATHCAD

Я. М. Жилейкин¹, Ю. И. Осипик¹, А. Я. Хасин²

Вычисление непрерывных вэйвлет-преобразований осуществляется с помощью оптимальных квадратурных формул типа Филона. Для визуализации полученных вэйвлет-преобразований используется пакет MathCad, возможности которого позволяют в наглядном виде представить свойства сигнала. Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 05-01-00984 и 04-02-17259).

Ключевые слова: вэйвлет-преобразования, квадратурные формулы, визуализация, интегральные преобразования.

1. Постановка задачи. Статья посвящена вэйвлет-преобразованию функции $f(x)$. Вэйвлет-преобразованием называется интегральное преобразование

$$W_f(s, t) = s^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-t}{s}\right) dx. \quad (1)$$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и принадлежит классу $H^\alpha(M)$ ($\alpha > 0$) всюду в $[0, 1]$ за исключением конечного числа точек x_ν , $\nu = 1, 2, \dots, l$. Класс $H^\alpha(M)$, $\alpha = [\alpha] + \alpha_1$, $0 < \alpha_1 \leq 1$, содержит функции $f(x)$, производные которых удовлетворяют следующим неравенствам: $|f^{(k)}(x)| \leq M$ при $0 \leq k \leq [\alpha]$ и $|f^{([\alpha])}(x + \delta) - f^{([\alpha])}(x)| \leq M|\delta|^{\alpha_1}$. Предполагается, что в точках x_ν функции $f(x)$ имеют разрывы производных порядка m_ν , где $0 \leq m_\nu < [\alpha]$. Чтобы вычислить $W_f(s, t)$, функция $f(x)$ продолжается вне отрезка $[0, 1]$. Простейшие способы продолжения — это продолжение нулем либо периодически с периодом 1. От функции ψ требуется кусочная гладкость в R ($-\infty < x < \infty$) и быстрое убывание на бесконечности. Последнее характеризуется наличием “реального” носителя $[-K, K]$, вне которого функция $\psi(x)$ пренебрежимо мала. Важное свойство вэйвлетов — наличие n нулевых моментов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Существование одного нулевого момента — это необходимое условие, накладываемое на $\psi(x)$.

В настоящей статье непрерывное вэйвлет-преобразование (1) используется для выявления характерных свойств $f(x)$ по двумерной функции $W_f(s, t)$.

Для вычисления вэйвлет-преобразований с заданной точностью используются квадратурные формулы, описанные в [1], где приведены не только сами алгоритмы, но и неуклучшаемые оценки погрешности непрерывного вэйвлет-преобразования.

2. Свойства рассматриваемых вэйвлетов. Рассмотрим вэйвлет-функции, широко используемые на практике.

1. *Семейство вэйвлетов, порожденных функцией Гаусса.*

Функцией Гаусса называется функция $\phi(x) = ce^{-x^2/2}$. Сама эта функция не удовлетворяет требованиям, накладываемым на вэйвлеты, однако ее производные могут быть использованы в качестве базисных функций. Например, первая производная имеет вид $\phi'(x) = \psi_1(x) = -cxe^{-x^2/2}$. Константу c мы выбираем из условия нормировки в пространстве L_2 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |-cxe^{-x^2/2}|^2 dx = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = c^2 \frac{1}{2} \pi^{1/2} = 1.$$

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; e-mail: jam@srcc.msu.ru

² Московский энергетический институт, Красноказарменная ул., 14, 111250, Москва; e-mail: khasinAY@mprei.ru

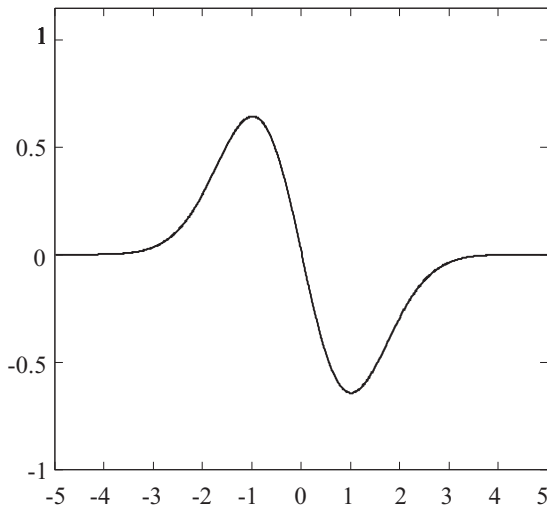


Рис. 1. График $\psi_1^G(x)$

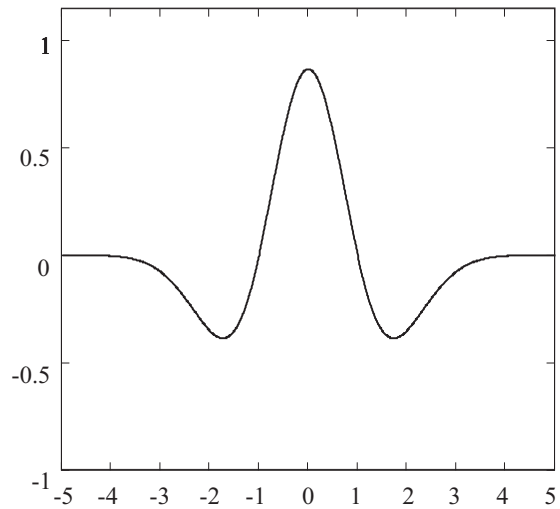
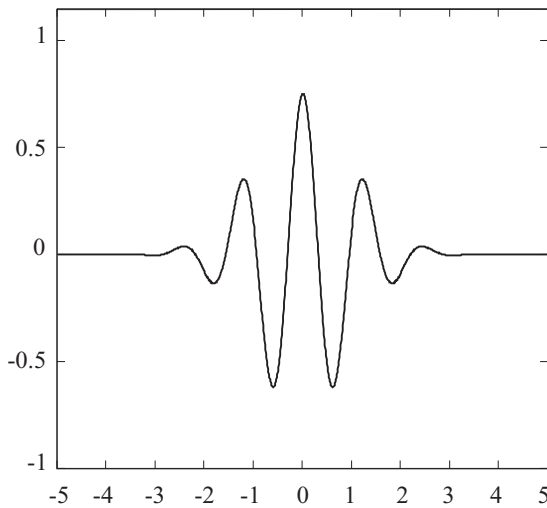


Рис. 2. График $\psi_2^G(x)$

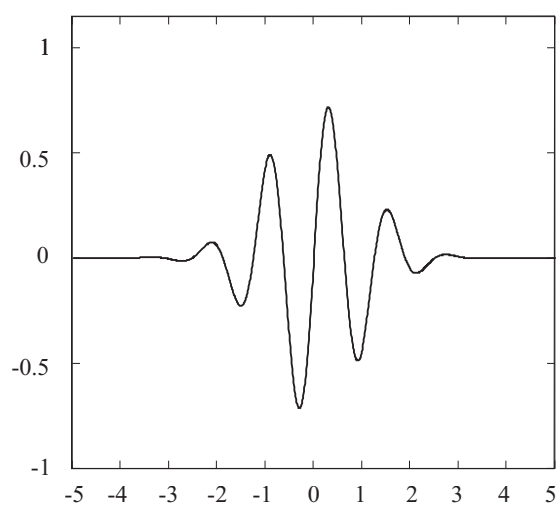
Отсюда получаем $c = \sqrt{\frac{2}{\pi^{1/2}}} = c_G$ и $\psi_1^G(x) = -c_G x e^{-x^2/2}$. На рис. 1 приводится график функции ψ_1^G .

На практике нередко используется вторая производная функции Гаусса (взятая со знаком минус), часто называемая “мексиканской шляпой”: $\psi_2^G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1 - x^2) e^{-x^2/2}$ (рис. 2). Легко проверить, что функция ψ_1^G имеет один нулевой момент, а функция ψ_2^G — два нулевых момента.

Важное свойство этих вэйвлетов заключается в том, что они являются вещественными функциями, поэтому их удобно применять для представления вещественных функций. Рассматриваемые в статье вэйвлеты характеризуются быстрым убыванием на бесконечности.



а)



б)

Рис. 3. Графики действительной (а) и мнимой части (б) $\psi^M(x)$

2. Вэйвлет Морле (модулированный гауссиан).

Вэйвлет Морле — это, по сути дела, гармоническая функция, модулированная функцией Гаусса:

$$\psi^M(x) = \pi^{-1/4} (e^{-i\xi_0 x} - e^{-\xi_0^2/2}) e^{-x^2/2}.$$

Функция Морле имеет один нулевой момент. На практике используются большие значения параметра ξ_0 ($\xi_0 \geq 5$), что позволяет пренебречь слагаемым $e^{-\xi_0^2/2}$. В результате $\psi^M(x) \approx \pi^{-1/4} e^{-i\xi_0 x} e^{-x^2/2}$. Если

записать вэйвлет Морле при наличии сдвига t и масштабного коэффициента s , то получим

$$\psi^M\left(\frac{x-t}{s}\right) \approx \pi^{-1/4} e^{-i\xi_0(x-t)/s} e^{-((x-t)^2)/2s^2}.$$

На рис. 3а и 3б изображены действительная и мнимая части функции $\psi^M(x)$ при $\xi_0 = 5$. В результате вэйвлет-функция Морле позволяет получить аналог преобразования Фурье с частотой ξ_0/s , модулированной функцией Гаусса с полушириной $\sqrt{2}s$, локализованной в окрестности точки $x = t$. При масштабном коэффициенте s , стремящемся к нулю, возрастает частота этой функции и степень ее локализации. Большого внимания заслуживает исследование с помощью вэйвлета Морле осциллирующих функций, которое позволяет рассмотреть вэйвлет-преобразование, когда переменными функции являются амплитуда и фаза.

В рассмотренных выше случаях значение параметра K , характеризующего носитель, можно взять величиной порядка 6–7. Однако если взять K и s в виде степеней 2, то объем вычислений можно заметно сократить.

3. Численная и графическая реализация вэйвлет-преобразований. Результатом вэйвлет-преобразования является функция $W_f(s, t)$ (см. (1)). Обычно параметр t играет роль времени, а параметр s — масштаба. В силу двумерности функции $W_f(s, t)$, полученные преобразования можно изобразить в виде плоской картинki.

Все результаты, представленные в настоящей статье, в том числе графические, были получены в пакете MathCad [2]. Для изображения результатов использовалась компонента 3DPlot в режиме Contour Plot. Эта компонента позволяет изображать на экране функции двух переменных в виде цветовой карты. Интенсивность цвета в каждой точке графика определяется соответствующим значением $W_f(s, t)$. Большим значениям соответствует большая интенсивность (белый цвет), меньшим значениям — меньшая (черный цвет). Нулевые значения изображаются серым цветом. Интенсивность в точках, где $W_f(s, t)$ не определена, рассчитывается пакетом MathCad автоматически (интерполяция). Помимо вышеперечисленного, компонента 3DPlot обладает встроенными средствами сглаживания изображения, что позволяет без дополнительных ухищрений получить более качественную картинку.

Во всех вычислительных экспериментах разрешение по параметру t бралось равным 256 точкам, по масштабу s — 64 точкам. В приведенных графиках по оси абсцисс откладывается параметр n , связанный с t_n соотношением $t_n = \frac{n}{256}$, $0 \leq n \leq 256$, а по оси ординат откладывается $s_m = 2^{-m}$, $2 \leq m \leq 11$. Таким образом, отрезок наблюдения по t варьируется от 0 до 1, по масштабу s — от 2^{-2} до 2^{-11} . Такой выбор параметров обусловлен стремлением подобрать коэффициенты степени 2. Это позволило вычислять коэффициенты квадратурных формул, связанные с вэйвлетом, только один раз. Данный прием ускорил процесс вычисления вэйвлет-преобразования, не снижая при этом точности результата.

Перейдем к рассмотрению конкретных функций. Начнем с функций, имеющих разрыв в средней точке. Например, функция “пила” (рис. 4) дается равенством $f_1(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 0.5, \\ -1+x, & 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$

Заметим, что в точке $x = 0.5$ функцию $f_1(x)$ можно определить произвольным образом, например $f_1(0.5) = 0$ или $f_1(0.5) = -0.5$.

Для функции $\psi_1^G(x)$ на основе формулы (1) и разложения $f_1(x)$ в ряд Тейлора в точке t нетрудно вычислить $W_f(s, 0.5)$. Справедливо равенство

$$W_f(s, 0.5) = c s^{1/2} + 2 d s^{3/2},$$

где $c = \int_{-\infty}^0 \psi_1^G(\eta) d\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi^{1/2}}} \approx 1.062$ и $d = \int_{-\infty}^0 \eta \psi_1^G(\eta) d\eta = -\pi^{1/4} \approx -1.331 < 0$. Так как $s^{3/2}$ убывает

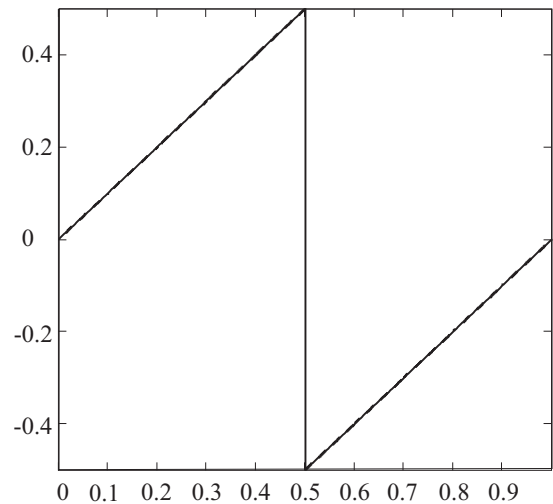


Рис. 4. График функции “пила”

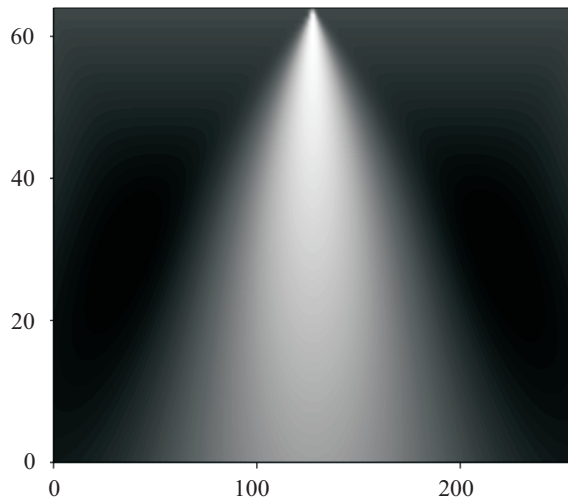


Рис. 5. Вэйвлет-изображение функции “пила”, построенное с помощью $\psi_1^G(x)$

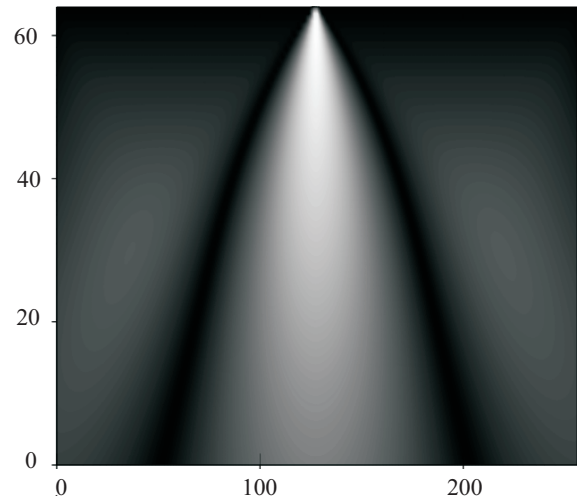


Рис. 6. Изображение модуля вэйвлет-преобразования функции “пила”, построенное с помощью $\psi_1^G(x)$

при $s \rightarrow 0$ быстрее, чем $s^{1/2}$, то $W(s, 0.5)$ — положительная функция, и на рис. 5 изображение имеет ярко белый цвет, который постепенно ослабевает с ростом s .

При $t = 0.5 - Ks$ мы имеем равенство $W_f(s, t) = 2ds^{3/2}$, т.е. вэйвлет-преобразование становится отрицательным. Это справедливо и для $0 \leq t < 0.5 - Ks$. Ввиду симметрии функций $f_1(x)$ и $\psi_1^G(x)$, картинка на рис. 5 также обладает симметрией.

Модуль полученного преобразования иллюстрируется на рис. 6, где темным областям соответствуют малые положительные значения, а светлым — большие значения $|W_f(s, t)|$.

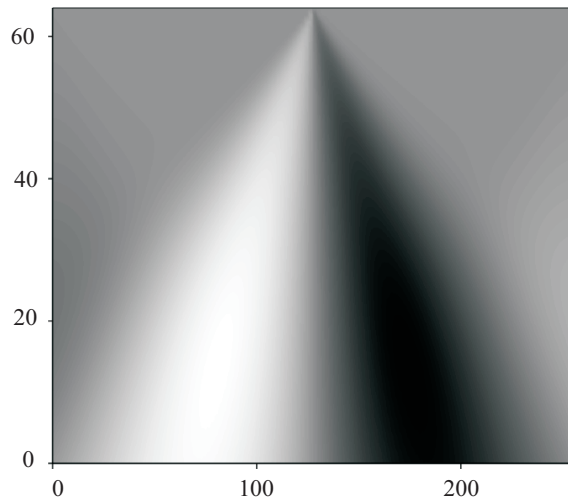


Рис. 7. Вэйвлет-изображение функции “пила”, построенное с помощью $\psi_2^G(x)$

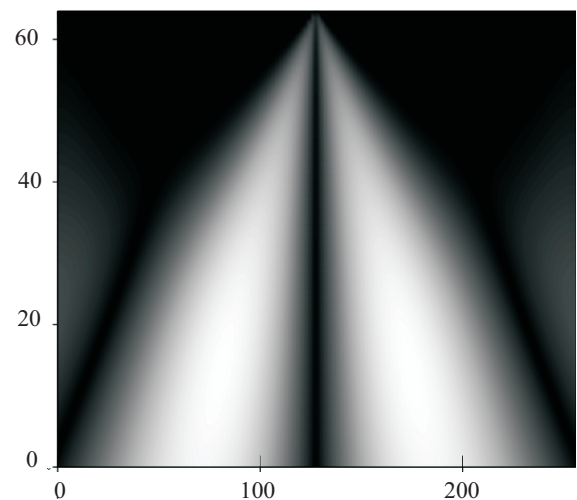


Рис. 8. Изображение модуля вэйвлет-преобразования функции “пила”, построенное с помощью $\psi_2^G(x)$

Для функции $f_1(x)$ и вэйвлета $\psi_2^G(x)$ картинки имеют несколько другой вид (рис. 7, 8).

Так как функция “пила” — нечетная относительно $t = 0.5$, а $\psi_2^G(t - 0.5)$ — четная функция относительно этой точки, то $W_f(s, t)$ — нечетная функция относительно $t = 0.5$, при этом $W_f(s, 0.5) = 0$, что объясняется, в частности, тем, что $\int_0^\infty \psi_2^G(\eta) d\eta = 0$.

Кроме того, так как $|\psi_2^G(x)|$ убывает несколько медленнее, чем $|\psi_1^G(x)|$, то картинки на рис. 5 и рис. 6 более узкие, чем аналогичные картинки на рис. 7 и 8.

В случае ступенчатой функции (рис. 9)

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.5, \\ -1, & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

картинки для вэйвлетов $\psi_1^G(x)$ и $\psi_2^G(x)$ будут иметь вид, изображенный на рис. 10 и рис. 11. Рис. 10 аналогичен рис. 5 и обладает большей расходимостью. То же самое можно сказать и о рис. 7 и 11.

Рассмотрим далее широко известную функцию — “чертову лестницу” (рис. 12), построенную на основе множества Кантора [3, с. 223; 4]:

$$f_C(x) = \begin{cases} 0.5 f_C(3x), & x \in [0, 1/3], \\ 0.5, & x \in [1/3, 2/3], \\ 0.5 + 0.5 f_C(3x - 2), & x \in (2/3, 1]. \end{cases}$$

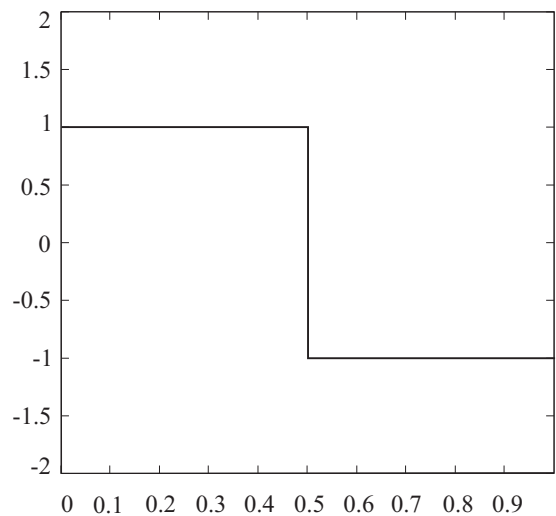


Рис. 9. График ступенчатой функции

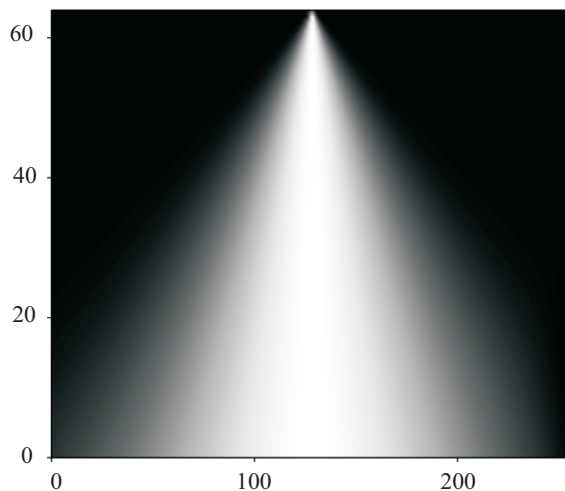


Рис. 10. Вэйвлет-изображение ступенчатой функции, построенное с помощью $\psi_1^G(x)$

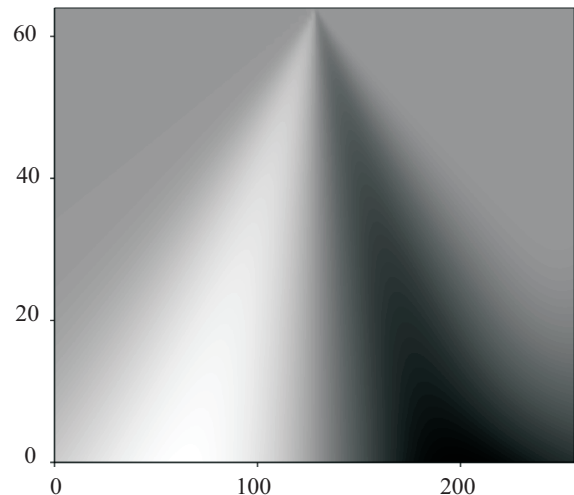


Рис. 11. Вэйвлет-изображение ступенчатой функции, построенное с помощью $\psi_2^G(x)$

Из приведенной формулы следует, что эта функция самоподобна. Если мы разобьем отрезок $[0, 1]$ на три равные части, то $f_C(x)$ — константа на $[1/3, 2/3]$, а на отрезках $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ она подобна $f_C(x)$ на всем отрезке $[0, 1]$. Процесс можно рекурсивно продолжать, если разбивать каждый из двух крайних отрезков на три равные части. Свойство самоподобия достаточно хорошо иллюстрируется на рис. 13, где изображено вэйвлет-преобразование $f_C(x)$.

На рис. 15 приводится изображение вэйвлет-преобразования функции $f_3(x) = \sin\left(\frac{1}{x-0.5}\right)$, график которой представлен на рис. 14. Наиболее интересным моментом, характеризующим эту функцию, является то, что особенность вида $\sin(1/x)$ проявляется на картинке вэйвлет-преобразования как возмущение, локализованное не внутри угла $-Ks \leq t \leq Ks$, а внутри параболической области $-c(K)s^2 \leq t \leq c(K)s^2$, где $c(K)$ — константа, определяемая значением K . Это явление было отмечено в монографии [2, с. 195].

В завершение рассмотрим случай практического применения вэйвлет-преобразования для исследования наличия различных веществ в материальных средах [5], осуществляемого с помощью математической обработки процесса поглощения рентгеновских лучей исследуемой средой. В качестве модельной использовалась функция

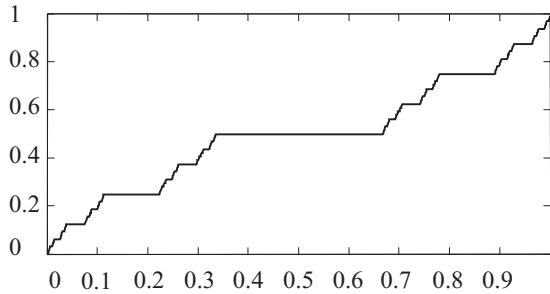


Рис. 12. График функции “чертова лестница”

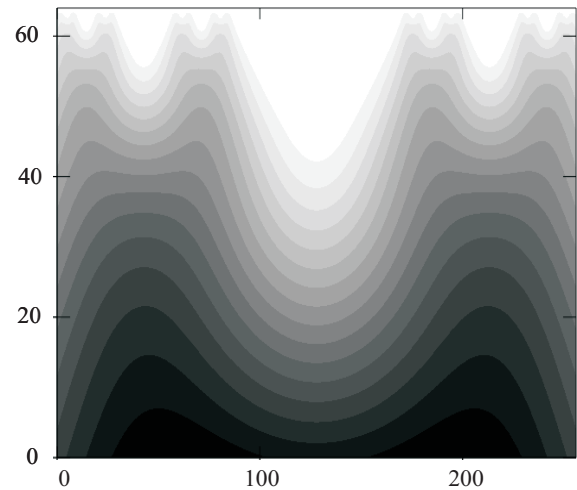


Рис. 13. Вэйвлет-изображение функции “чертова лестница”, построенное с помощью $\psi_1^G(x)$

$$f_E(x) = \frac{A_1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sin(2r_1x + \delta_1) \exp\left(-\frac{(x-c_1)^2}{2}\right) + \frac{A_2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sin(2r_2x + \delta_2) \exp\left(-\frac{(x-c_2)^2}{2}\right).$$

Здесь значения параметров (r_1, c_1) и (r_2, c_2) характеризуют свойства веществ (в данном случае — Zn, Al), присутствующих в среде, и $\sigma = 1$. На рис. 16 представлено изображение модуля вэйвлет-преобразования Морле модельной функции, анализ которого дает значения

$$r_1 = 10/3, \quad c_1 = 4, \quad r_2 = 10/9, \quad c_2 = 12.$$

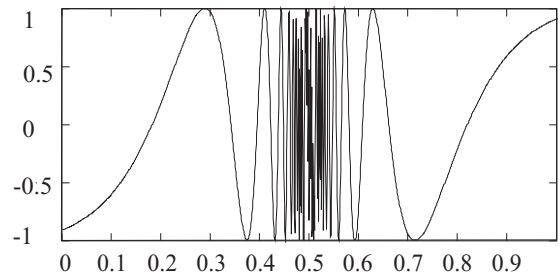


Рис. 14. График функции $f_3(x)$

Точность полученных значений параметров определяется степенью частотно-пространственной локализации вэйвлет-преобразований.

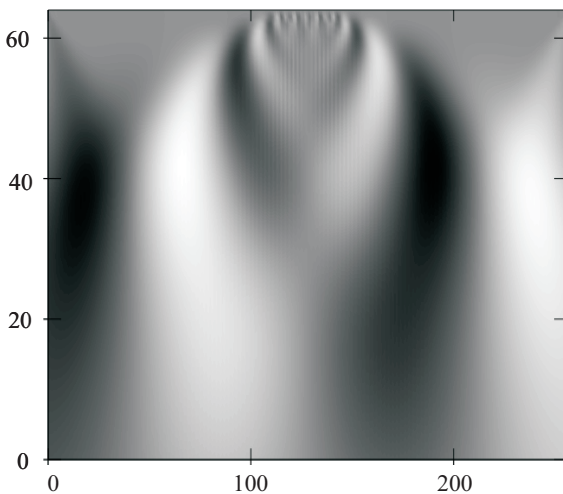


Рис. 15. Вэйвлет-изображение функции $f_3(x)$, построенное с помощью $\psi_2^G(x)$

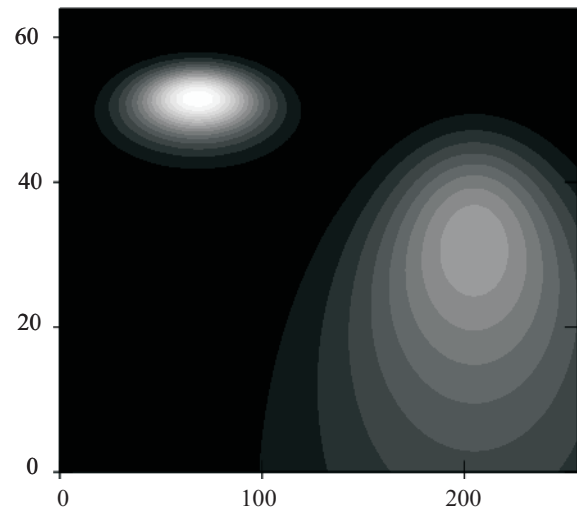


Рис. 16. Модуль вэйвлет-преобразования модельной функции $f_E(x)$

4. Выводы. Из приведенных выше результатов следует, что графическое представление вэйвлет-преобразования исследуемой функции способно дать наглядное и информативное описание особенностей этой функции. При этом важную роль играют математические свойства применяемых вэйвлетов, а также правильный выбор и умелое использование возможностей программного обеспечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жилейкин Я.М., Осипик Ю.И. О погрешности и алгоритмах численной реализации непрерывных вэйвлет-преобразований // ЖВМ и МФ. 2005. **45**, № 12. 2091–2101.
2. Дьяконов В.П. MathCad 2001. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002.
3. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
4. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. М.; Ижевск: РХД, 2001.
5. Funke H., Scheinost A.C., Chukalina M. Wavelet analysis of extended X-ray absorption fine structure data // Phys. Rev. 2005. В 71. 094110, pp. 1–7.

Поступила в редакцию
27.04.2007
