УДК 519.6

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

И. В. Колос[1], **М. В. Колос**[2]

Рассмотрена задача восстановления сигналов в системах с операторными коэффициентами при наличии вырожденных белых шумов в измерениях и приближенно заданных исходных данных. Предложен метод нахождения приближенного решения задачи, основанный на идее регуляризации А. Н. Тихонова. Доказана сходимость алгоритма решения задачи и получены оценки точности решения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00269).

Ключевые слова: линейная фильтрация, оптимальная фильтрация, восстановление сигналов, вырожденные шумы, белые шумы, цветные шумы, метод регуляризации.

Обозначим через H_u и H_r — сепарабельные вещественные гильбертовы пространства, $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ и $L_2\big(H_r;[0,t]\big)$ — пространства измеримых по Лебегу функций $f(\tau)$, $\tau\in[0,t]$, отображающих сегмент $[0,t]$, $t<\infty$, соответственно в H_u и H_r со скалярным произведением $(f,g)_{0H_i}$ и нормой $\| f\|_{0H_i}$, где индекс $i\in\{u,r\}$ указывает на пространство, в котором вычисляется скалярное произведение (или норма). Через $\mathcal{F}(X,Y)$ будем обозначать банахово пространство всех линейных операторов, непрерывно отображающих гильбертово пространство X в гильбертово пространство Y. Пополнение множества дважды дифференцируемых на $[0,t]$ функций $u(\tau)$, отображающих $[0,t]$ в H_u, для которых $u(t)=0$, $\left.\dfrac{du}{d\tau}\right|_{\tau=t}=0$ по соболевской норме, обозначим через $W^1_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ с нормой $\|\cdot\|_{1tu}$. Пусть $W^{-1}_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ — пополнение пространства $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ по негативной норме $\| v\|_{-1tu}=\sup\limits_u\left(\dfrac{\big|(v,u)_{0H_u}\big|}{\| u\|_{1tu}},\ u\in W^1_{2t}\big(H_u;[0,t]\big),\ u\neq 0\right)$, а $\langle u,v\rangle_u$ — билинейная форма [3–5]. Все случайные процессы рассматриваются в вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{G},p)$.

Постановка задачи. Пусть H_u-значный полезный сигнал $u(\tau)=u(\tau,\omega)$ описывается уравнением

$$\mathcal{L}u\equiv\frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2}+\mathcal{B}u(\tau)=v(\tau);\quad u(0)=u_0,\quad \left.\frac{du(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}=u_1, \tag{1}$$

где $u_0=u_0(\omega)$ и $u_1=u_1(\omega)$ — случайные процессы, реализации которых с вероятностью 1 принадлежат $L_2(H_u)$, и $v(\tau)=v(\tau,\omega)$ — случайный процесс типа белого шума, реализации которого почти наверное принадлежат негативному пространству $W^{-1}_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$.

Известно, что $M[u_0]=M[u_1]=0$, $M[u_0,u_0]=\mathcal{U}_0$, $M[u_1,u_1]=\mathcal{U}_1$. Здесь $\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{U}_1$ — корреляционные операторы процессов u_0 и u_1, такие, что $\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1\in\mathcal{F}\big(L_2(H_u),L_2(H_u)\big)$; $M\big[v(\tau)\big]=0$ и $M\big[v(\tau),v(\sigma)\big]=\mathcal{V}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $\mathcal{V}(\tau)\in\mathcal{F}\Big(W^1_{2t}\big(H_u;[0,t]\big),W^{-1}_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)\Big)$, $\delta(\tau-\sigma)$ — δ-функция Дирака, $\delta(\tau-\sigma)\in W^{-1}_{2t}\big([0,t]\big)$. Линейный замкнутый оператор $\mathcal{B}$ имеет в H_u всюду плотную область определения $D(\mathcal{B})$; этот оператор симметрический $(\mathcal{B}u,v)_{0H_u}=(u,\mathcal{B}v)_{0H_u}$ для $\forall u,v\in D(\mathcal{B})$, положительно определенный $(\mathcal{B}u,u)_{0H_u}\geqslant c\| u\|^2_{0H_u}$ и такой, что справедливы неравенства $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\geqslant c\| u\|_{0H_u}$, $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\leqslant c\| u\|_{10u}$, где $\|\cdot\|_{10u}$ — норма в пространстве $W^1_{20}\big(H_u;[0,t]\big)$, полученном пополнением по соболевской норме множества дважды дифференцируемых на $[0,t]$ функций $u(\tau)$, которые отображают $[0,t]$ в H_u и для которых выполняются условия $u(0)=0$ и $\left.\dfrac{du(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}=0$ [6, 9].

Наблюдается процесс $\big\{r(\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant t\big\}$, связанный с $u(\tau)$ соотношением

$$r(\tau)=\mathcal{S}u(\tau)+w(\tau), \tag{2}$$

[1]Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, д. 58, 109180, Москва; e-mail: kolos_v@mail.ru

[2]Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Ленинские горы, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

где $w(\tau) = w(\tau,\omega)$ — гауссовский вырожденный шум с нулевым средним $M\bigl[w(\tau)\bigr] = 0$ и корреляцией $M\bigl[w(\tau), w(\sigma)\bigr] = \mathcal{W}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $\mathcal{W}(\tau) \in \mathcal{F}\Bigl(W^1_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr), W^{-1}_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr)\Bigr)$. Здесь $\mathcal{W}(\tau)$ — вырожденный оператор и реализации $w(\tau)$ почти наверное принадлежат негативному пространству $W^{-1}_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr)$.

Требуется найти оценку $\widehat{u}(t)$ из пространства состояний H_u, такую, что

$$\inf_{\mathcal{A}} M\bigl[(z,\mathcal{A}r-u)^2_{H_u}\bigr] = m(z), \quad \mathcal{A}r = \widehat{u}(t), \tag{3}$$

где z — произвольный элемент из H_u и нижняя грань берется по всем линейным непрерывным операторам $\mathcal{A}$, действующим из $W^{-1}_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr)$ в H_u.

Пусть вместо множества исходных данных $\Delta = \{\mathcal{B},\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1,\mathcal{V},\mathcal{S},\mathcal{W}\}$ известна совокупность их приближений $\Delta_\varepsilon = \{\mathcal{B}_\varepsilon,\mathcal{U}_{0\varepsilon},\mathcal{U}_{1\varepsilon},\mathcal{V}_\varepsilon,\mathcal{S}_\varepsilon,\mathcal{W}_\varepsilon\}$. Операторы $\mathcal{B}_\varepsilon,\mathcal{U}_{0\varepsilon},\mathcal{U}_{1\varepsilon},\mathcal{V}_\varepsilon,\mathcal{W}_\varepsilon$ симметрические и неотрицательно определенные. Множество Δ_ε такое, что справедливо соотношение $\max\limits_i\bigl\{\|\,\mathcal{I}_i-\mathcal{I}_{i\varepsilon}\|,\ \mathcal{I}_i\in\Delta,\ \mathcal{I}_{i\varepsilon}\in\Delta_\varepsilon\bigr\}\leqslant\varepsilon$.

Ниже индекс ε указывает на то, что величины относятся к задаче оптимальной фильтрации с приближенными исходными данными.

Решение задачи фильтрации (1) – (3) в случае приближенно заданных данных эквивалентно решению операторного уравнения Винера–Хопфа [3, 5]

$$\mathcal{A}_{0\varepsilon}\mathcal{R}_{r\varepsilon} = \mathcal{R}_{ur\varepsilon}, \tag{4}$$

где $\mathcal{A}_{0\varepsilon}$ — линейный оператор, удовлетворяющий критерию (3); $\mathcal{R}_{r\varepsilon}$ — корреляционный оператор случайного процесса $r_\varepsilon(\tau)$; $\mathcal{R}_{r\varepsilon}\in\mathcal{F}\Bigl(W^1_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr), W^{-1}_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr)\Bigr)$; $\mathcal{R}_{ur\varepsilon}$ — взаимно-корреляционный оператор случайных процессов $u_\varepsilon(\tau)$ и $r_\varepsilon(\tau)$, $\mathcal{R}_{ur\varepsilon}\in\mathcal{F}\Bigl(W^1_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr), H_u\Bigr)$. Это — уравнение первого рода, задача решения которого некорректна (неустойчива) [1, 2].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Последовательность операторов* $\{\mathcal{A}_{\varepsilon\alpha}\}$, $\mathcal{A}_{\varepsilon\alpha}\in\mathcal{F}\Bigl(W^{-1}_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr), H_u\Bigr)$, *удовлетворяющая критерию* $\lim\limits_{\alpha\to0}\lim\limits_{\varepsilon\to0} M\bigl[(z, A_{\varepsilon\alpha}r_\varepsilon-u)^2_{H_u}\bigr] = m(z)$, *находится из уравнения* $\mathcal{A}_{\varepsilon\alpha}\mathcal{R}_{r\varepsilon}+\alpha\mathcal{A}_{\varepsilon\alpha} = \mathcal{R}_{ur\varepsilon}$, *где* α — *параметр регуляризации,* $\alpha>0$. *При этом справедливы соотношения* $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|\mathcal{R}_{r\varepsilon}-\mathcal{R}_r\| = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|\mathcal{R}_{ur\varepsilon}-\mathcal{R}_{ur}\| = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|\mathcal{A}_{\varepsilon\alpha}-\mathcal{A}_\alpha\| = 0$ *и* $\lim\limits_{\varepsilon\to0} M\Bigl[\bigl(z,\widehat{u}_{\varepsilon\alpha}(t)-\widehat{u}_\alpha(t)\bigr)^2_{H_u}\Bigr] = 0$, *где* $\widehat{u}_{\varepsilon\alpha} = \mathcal{A}_{\varepsilon\alpha}r_\varepsilon$ *и* $\widehat{u}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha r$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы из [5].

Приближенное решение задачи линейной фильтрации. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированные базисы в гильбертовых сепарабельных пространствах H_u и H_r соответственно.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде $u_{n\varepsilon}(\tau) = \sum\limits_{i=1}^n x_i^\varepsilon(\tau)e_i$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, где $x_i^\varepsilon(\tau)$ — искомые функции.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет вектор-столбец $\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)}(\tau)$ с координатами $\bigl(x_1^\varepsilon(\tau), x_2^\varepsilon(\tau), x_3^\varepsilon(\tau),\dots,x_n^\varepsilon(\tau)\bigr)$, имеет вид

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)}(\tau)}{d\tau^2}+F_\varepsilon\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)}(\tau) = \boldsymbol{v}^\varepsilon_{(n)}(\tau), \quad \boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)}(0) = \boldsymbol{x}_{0\varepsilon}, \quad \frac{d\,\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)}(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} = \boldsymbol{x}_{10\varepsilon}, \tag{5}$$

где F_ε — матрица размерности $n\times n$ с элементами $F^\varepsilon_{ij} = (\mathcal{B}_\varepsilon e_i, e_j)_{0H_u}$, $i,j = 1,2,\dots,n$; $\boldsymbol{v}^\varepsilon_{(n)}(\tau)$ — случайный n–мерный белый гауссовский шум с нулевым средним и корреляционной матрицей

$$M\bigl[\boldsymbol{v}^\varepsilon_{(n)}(\tau)(\boldsymbol{v}^\varepsilon_{(n)})^{\mathrm{T}}(\sigma)\bigr] = V^\varepsilon_{(n)}(\tau)\delta(\tau-\sigma),$$

$V^\varepsilon_{(n)}(\tau) = \Bigl[\bigl(\mathcal{V}_\varepsilon(\tau)e_i, e_j\bigr)_{0H_u}\Bigr]_{i,j=1}^n$. Задача (5) является обобщенной задачей Коши [3 – 5], так как координаты вектора $\boldsymbol{v}^\varepsilon_{(n)}(\tau)$ почти наверное принадлежат негативному пространству $W_2^{-1}\bigl([0,t]\bigr)$.

Наблюдения для приближенной задачи строим следующим образом. Умножим скалярно наблюдения $r_\varepsilon(\tau)$ на векторы $\{\rho_j\}_{j=1}^m$ и введем обозначения $\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)}(\tau)\equiv\Bigl[\bigl(r_\varepsilon(\tau),\rho_j\bigr)_{0H_r}\Bigr]_{j=1}^m$. Пусть C_ε — матрица размерности $m\times n$ с элементами $C^\varepsilon_{ji} = (\mathcal{S}_\varepsilon e_i,\rho_j)_{0H_r}$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,m$; $\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(m)}(\tau)$ — векторный гауссовский шум, $\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(m)}(\tau) = \Bigl[\bigl(w(\tau),\rho_j\bigr)_{0H_r}\Bigr]_{j=1}^m$, $M\bigl[\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(m)}(\tau)\bigr] = 0$, $M\bigl[\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(m)}(\tau)(\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(m)})^{\mathrm{T}}(\sigma)\bigr] = W^\varepsilon_{(m)}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$

и $W^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)$ — вырожденная матрица размерности $m\times m$, $W^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)=\Big[\big(\mathcal{W}_\varepsilon(\tau)\rho_i,\rho_j\big)_{0H_r}\Big]_{i,j=1}^{m}$. Тогда измерения для приближенной задачи запишем в форме

$$\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)=C_\varepsilon\boldsymbol{x}^{\varepsilon}_{(n)}(\tau)+\boldsymbol{w}^{\varepsilon}_{(m)}(\tau). \tag{6}$$

Требуется найти последовательность оценок $\big\{\widehat{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}_{\alpha}(\tau)\big\}_{\alpha>0}$ процесса $\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)$ в момент $\tau=t$, такую, что

$$\lim_{\alpha\to0}\lim_{\varepsilon\to0}M\Big[\big(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}_{(n)}(t)-\widehat{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}_{\alpha}(t)\big)^2_{E_n}\Big]=\lim_{\varepsilon\to0}\inf_{\mathcal{H}}M\Big[\big(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}_{(n)}(t)-\mathcal{H}\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)}(t)\big)^2_{E_n}\Big]=m(\boldsymbol{z}). \tag{7}$$

Здесь нижняя грань берется по всем линейным непрерывным операторам $\mathcal{H}$, действующим из пространства наблюдений в пространство состояний, $\mathcal{H}\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)}(t)=\int\limits_0^t h(t,\tau)\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)\,d\tau$, $h(t,\tau)$ — матрица размерности $m\times n$ с элементами $h_{ij}(t,\tau)$, по аргументу τ принадлежащими позитивному пространству $W_2^1\big([0,t]\big)$, $\boldsymbol{z}$ — произвольный вектор из евклидового n-мерного пространства E_n и $\boldsymbol{x}_{(n)}$ — решение уравнения (5) при точном задании исходных данных.

Имеют место следующие статистики:

$$\begin{array}{llll}
M[\boldsymbol{x}_{0\varepsilon}]=0, & M[\boldsymbol{x}_{0\varepsilon}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}_{0\varepsilon}]=P_{0\varepsilon}, & P^{ij}_{0\varepsilon}=(\mathcal{U}_{0\varepsilon}e_i,e_j)_{0H_u}, & i,j=1,2,\ldots,n;\\
M[\boldsymbol{x}_{10\varepsilon}]=0, & M[\boldsymbol{x}_{10\varepsilon}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}_{10\varepsilon}]=P_{10\varepsilon}, & P^{ij}_{10\varepsilon}=(\mathcal{U}_{1\varepsilon}e_i,e_j)_{0H_u}, & i,j=1,2,\ldots,n;\\
M\big[\boldsymbol{v}^{\varepsilon}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}^{\mathrm T}_{0\varepsilon}\big]=0, & M\big[\boldsymbol{v}^{\varepsilon}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}^{\mathrm T}_{10\varepsilon}\big]=0, & & \\
M\big[\boldsymbol{w}^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{x}^{\mathrm T}_{0\varepsilon}\big]=0, & M\big[\boldsymbol{w}^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{x}^{\mathrm T}_{10\varepsilon}\big]=0, & M\big[\boldsymbol{w}^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)(\boldsymbol{v}^{\varepsilon}_{(n)})^{\mathrm T}(\sigma)\big]=0. &
\end{array}$$

Матрица $W^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)$ может быть вырожденной; поэтому для решения задачи фильтрации (5) – (7) рекомендуется использовать алгоритм, аналогичный изученному в [3, 5].

Покажем, что приближенное решение $\widehat{u}^{\alpha}_{n\varepsilon}(\tau,x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\widehat{x}^{\varepsilon\alpha}_i(\tau)e_i(x)$ задачи (1) – (3), построенное согласно (5) – (7), сходится в соответствующей норме к точному решению при $n\to\infty$, $\varepsilon\to0$ и $\alpha\to0$.

Отметим, что при выполнении неравенств $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\geqslant c\|\,u\,\|_{0H_u}$ и $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\leqslant c\|\,u\,\|_{10u}$ (доказательства этих неравенств для некоторых систем приведены в [6, 8, 9]) существует единственное обобщенное решение уравнения (1), а последовательность приближенных решений уравнения (1) при $n\to\infty$ сходится по норме пространства $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ при каждом фиксированном t к его точному решению, т.е. $\|u_n-\overline{u}\,\|_{0H_u}\to0$, $n\to\infty$, где $\overline{u}$ — точное решение уравнения (1). Доказательство этих фактов аналогично доказательствам, приведенным в [3, 5].

Лемма 1. *Для почти всех* $t<\infty$ *справедливо следующее равенство:* $\lim\limits_{n\to\infty}M\Big[\big\|u_n(t)-u(t)\big\|^2_{0H_u}\Big]=0$, *где* $u_n(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(t)e_i$, *а* $u(\tau)$ *— решение уравнения* (1) *в точке* $\tau=t$.

Доказательство. Используя неравенства $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\geqslant c\|\,u\,\|_{0H_u}$ и $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\leqslant c\|\,u\,\|_{10u}$, легко показать [7], что для почти всех $\omega\in\Omega$ имеет место соотношение $\int\limits_0^t\big\|u_n(\tau)-u(\tau)\big\|^2_{H_u}\,d\tau\to0$, если $n\to\infty$. Отсюда следует, что $M\Bigg[\int\limits_0^t\big\|u_n(\tau)-u(\tau)\big\|^2_{H_u}\,d\tau\Bigg]\to0$ при $n\to\infty$. Лемма доказана.

Регуляризованное уравнение Винера–Хопфа для задачи (5) – (7) можно записать следующим образом:

$$M\big[\boldsymbol{x}^{\varepsilon}_{(n)}(t)(\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)})^{\mathrm T}(\sigma)\big]=\int\limits_0^t h^{\varepsilon\alpha}_{mn}(t,\tau)M\big[\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)(\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)})^{\mathrm T}(\sigma)\big]\,d\tau+\alpha h^{\varepsilon\alpha}_{mn}(t,\sigma). \tag{8}$$

Представим корреляционную матрицу $M\big[\boldsymbol{x}^{\varepsilon}_{(n)}(t)(\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)})^{\mathrm T}(\sigma)\big]$ в виде бесконечной матрицы

$$K^{\varepsilon}_{nm}(t,\sigma)=\begin{bmatrix} M\big[\boldsymbol{x}^{\varepsilon}_{(n)}(t)(\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)})^{\mathrm T}(\sigma)\big] & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{bmatrix},$$

которая задает линейный непрерывный оператор, действующий из $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$ в $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ [3, 5]. Обозначим этот оператор через $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{nm}$.

Аналогично, бесконечная матрица $K^{\varepsilon}_{mm}(\tau,\sigma)$, построенная по $M\big[\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)}(\tau)(\boldsymbol{r}^{\varepsilon}_{(m)})^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]$, задает линейный оператор $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{mm}$, действующий из $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$ в $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$.

Пусть $H^{\varepsilon\alpha}_{mn}(t,\sigma) = \begin{bmatrix} h^{\varepsilon\alpha}_{mn}(t,\sigma) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$. Тогда с использованием этих бесконечных матриц уравнение (8) можно записать в виде $K^{\varepsilon}_{nm}(t,\sigma) = \int\limits_0^t H^{\varepsilon\alpha}_{mn}(t,\tau)K^{\varepsilon}_{mm}(\tau,\sigma)\,d\tau + \alpha H^{\varepsilon\alpha}_{mn}(t,\sigma)$, а в операторной форме — в виде

$$\mathcal{A}^{\varepsilon\alpha}_{mn}\mathcal{R}^{\varepsilon}_{mm} + \alpha\mathcal{A}^{\varepsilon\alpha}_{mn} = \mathcal{R}^{\varepsilon}_{nm}, \tag{9}$$

где $\mathcal{A}^{\varepsilon\alpha}_{mn}$ — искомый оператор, определяемый матрицей $H^{\alpha}_{mn}(t,\sigma)$.

Покажем, что решение уравнения (9) задает приближенное решение уравнения (4).

Теорема 2. *Для каждого фиксированного $\alpha > 0$ и почти всех $t < \infty$ выполняется следующее равенство:* $\lim\limits_{n,m\to\infty} M\big[(z,\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm} - \widehat{u}_{\varepsilon\alpha})^2_{H_u}\big] = 0$, $z\in H_u$, *где* $\widehat{u}_{\varepsilon\alpha} = \mathcal{A}_{\varepsilon\alpha}r_\varepsilon$, *а* $\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm} = \mathcal{A}^{\varepsilon\alpha}_{mn}r_\varepsilon$.

В доказательстве теоремы 2 используются следующие леммы.

Лемма 2. *Справедливо соотношение* $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|\mathcal{R}_{ur\varepsilon} - \mathcal{R}^{\varepsilon}_{nm}\| = 0$.

Лемма 3. *Для почти всех $t < \infty$ и $\alpha > 0$ имеет место соотношение* $\lim\limits_{m\to\infty}\|\mathcal{R}^{\varepsilon\alpha}_{r} - \mathcal{R}^{\varepsilon\alpha}_{mm}\| = 0$, *где* $\mathcal{R}^{\varepsilon\alpha}_{r} = \mathcal{R}_{r\varepsilon} + \alpha I\delta(\tau-\sigma)$, *а* $\mathcal{R}^{\varepsilon\alpha}_{mm} = \mathcal{R}^{\varepsilon}_{mm} + \alpha I\delta(\tau-\sigma)$.

Доказательство этих лемм и теоремы 2 аналогично доказательству лемм 2, 3 и доказательству теоремы 2 из [11].

Теорема 3. *Соотношение* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{\alpha\to 0}\varliminf\limits_{n,m\to\infty} M\Big[\big(z,\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t) - u(t)\big)^2_{H_u}\Big] = m(z)$ *справедливо для почти всех $t<\infty$. Здесь $\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t)$ — решение приближенной задачи фильтрации* (1)–(3), $\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n}\widehat{x}^{\varepsilon\alpha}_i(t)e_i$, *а* $\widehat{x}^{\varepsilon\alpha}_i(t)$ *— координаты решения задачи* (5)–(7).

Доказательство. Прибавим и вычтем $\widehat{u}_{\varepsilon\alpha}(t)$ и $\widehat{u}_{\alpha}(t)$ под знаком скалярного произведения. После ряда преобразований находим, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\varliminf_{n,m\to\infty} M\Big[\big(z,\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t) - u(t)\big)^2_{H_u}\Big] \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\Bigg(\varliminf_{n,m\to\infty} M\Big[\big(z,\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t) - \widehat{u}_{\varepsilon\alpha}(t)\big)^2_{H_u}\Big] + \\
&\quad + 2\Big\{\varliminf_{n,m\to\infty} M\Big[\big(z,\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t) - \widehat{u}_{\varepsilon\alpha}(t)\big)^2_{H_u}\Big] M\Big[\big(z,\widehat{u}_{\varepsilon\alpha}(t) - \widehat{u}_{\alpha}(t)\big)^2_{H_u}\Big]\Big\}^{1/2} + \\
&\quad + 2\Big\{\varliminf_{n,m\to\infty} M\Big[\big(z,\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t) - \widehat{u}_{\varepsilon\alpha}(t)\big)^2_{H_u}\Big] M\Big[\big(z,\widehat{u}_{\alpha}(t) - u(t)\big)^2_{H_u}\Big]\Big\}^{1/2} + M\Big[\big(z,\widehat{u}_{\varepsilon\alpha}(t) - \widehat{u}_{\alpha}(t)\big)^2_{H_u}\Big] + \\
&\quad + 2\Big\{M\Big[\big(z,\widehat{u}_{\varepsilon\alpha}(t) - \widehat{u}_{\alpha}(t)\big)^2_{H_u}\Big] M\Big[\big(z,\widehat{u}_{\alpha}(t) - u(t)\big)^2_{H_u}\Big]\Big\}^{1/2} + M\Big[\big(z,\widehat{u}_{\alpha}(t) - u(t)\big)^2_{H_u}\Big]\Bigg) = m(z)
\end{aligned}$$

(согласно теоремам 1 и 2).

Таким образом, доказана сходимость решения приближенной регуляризованной задачи линейной фильтрации к решению исходной задачи.

Приведем алгоритм решения приближенной задачи линейной оптимальной фильтрации (5)–(7), основанный на построении последовательности регуляризованных оценок, полученных с помощью фильтра Калмана–Бьюси. Обозначим

$$\chi^{\varepsilon}_i(\tau) = \begin{cases} x^{\varepsilon}_i(\tau), & \text{при} \quad i \leqslant n, \\ \dfrac{dx^{\varepsilon}_{i-n}(\tau)}{d\tau}, & \text{при} \quad n < i \leqslant 2n; \end{cases} \qquad F_{2n\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ F_\varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

где I — единичная матрица порядка n. Пусть $\zeta_\varepsilon(\tau)$ — вектор с координатами $\zeta^{\varepsilon}_i(\tau) = 0$ при $i = 1,2,\dots,n$ и $\zeta^{\varepsilon}_i(\tau) = (v_\varepsilon, e_{i-n})_{0H_u}$ при $i = n+1, n+2,\dots,2n$; $\overline{C}_\varepsilon$ — матрица размерности $m\times 2n$, $\overline{C}_\varepsilon = [C_\varepsilon\ \overline{0}]$, где $\overline{0}$ — нулевая матрица размера $m \times n$. С учетом введенных обозначений задачу линейной оптимальной фильтрации можно сформулировать в следующем виде:

1) векторный случайный процесс $\chi_\varepsilon(\tau)$ моделируется системой

$$\frac{d\chi_\varepsilon(\tau)}{d\tau} = F_{2n\varepsilon}\chi_\varepsilon(\tau) + \zeta_\varepsilon(\tau), \quad \chi_\varepsilon(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{0\varepsilon} \\ \boldsymbol{x}_{10\varepsilon} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $\zeta_\varepsilon(\tau)$ — белый вырожденный шум;

2) наблюдается процесс $\{\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)}(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$, связанный с $\chi_\varepsilon(\tau)$ соотношением

$$\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)}(\tau) = \overline{C}_\varepsilon\chi_\varepsilon(\tau) + \boldsymbol{w}^\varepsilon_{(m)}(\tau); \tag{11}$$

3) требуется найти последовательность оценок $\{\widehat{\chi}^{\,\alpha}_\varepsilon(\tau)\}_{\alpha>0}$ процесса $\chi(\tau)$ в момент $\tau = t$, удовлетворяющую критерию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}\left\{M\Big[\big(\overline{\boldsymbol{z}}, \chi(t) - \mathcal{H}^\alpha\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)}(t)\big)^2_{E_{2n}}\Big] - \inf_{\mathcal{H}} M\Big[\big(\overline{\boldsymbol{z}}, \chi(t) - \mathcal{H}\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)}(t)\big)^2_{E_{2n}}\Big]\right\} = 0, \tag{12}$$

где $\overline{\boldsymbol{z}}$ — произвольный вектор из E_{2n}, а нижняя грань берется по всем линейным операторам $\mathcal{H}$, действующим из пространства наблюдений в пространство состояний: $\mathcal{H}\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)} = \int\limits_0^t h(t,\tau)\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)}(\tau)\,d\tau$, при этом $\widehat{\chi}^{\,\alpha}_\varepsilon(t) = \mathcal{H}^\alpha\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)} = \int\limits_0^t \widehat{h}^\alpha(t,\tau)\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)}(\tau)\,d\tau$. Здесь матрица $\widehat{h}^\alpha(t,\tau)$ удовлетворяет уравнению Винера–Хопфа

$$M\big[\chi_\varepsilon(t)(\boldsymbol{r}^\varepsilon_m)^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = \int\limits_0^t \widehat{h}^\alpha(t,\tau)\overline{C}_\varepsilon(\tau)M\big[\chi_\varepsilon(\tau)(\chi_\varepsilon)^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\overline{C}^{\mathrm{T}}_\varepsilon(\sigma)\,d\tau + \widehat{h}^\alpha(t,\sigma)S_{\varepsilon\alpha}(\sigma), \tag{13}$$

где $S_{\varepsilon\alpha}(\sigma) = W^\varepsilon_{(m)}(\sigma) + \alpha I_m$, I_m — единичная матрица порядка m и $\chi(\tau)$ — решение системы (10) при точных исходных данных.

Имеют место следующие статистики:

$$M\big[\zeta_\varepsilon(\tau)\big] = 0, \quad M\Big[\zeta_\varepsilon(\tau)\big(\zeta_\varepsilon(\sigma)\big)^{\mathrm{T}}\Big] = Q_\varepsilon(\tau)\delta(\tau-\sigma), \quad Q_\varepsilon(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V^\varepsilon_{(n)}(\tau) \end{bmatrix},$$
$$M\big[\chi_\varepsilon(0)\big] = 0, \quad M\big[\chi_\varepsilon(0)\chi^{\mathrm{T}}_\varepsilon(0)\big] = \begin{bmatrix} P_{0\varepsilon} & 0 \\ 0 & P_{10\varepsilon} \end{bmatrix},$$
$$M\big[\chi_\varepsilon(0)\zeta^{\mathrm{T}}_\varepsilon(\tau)\big] = M\big[\chi_\varepsilon(0)(\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(m)})^{\mathrm{T}}(\tau)\big] = M\big[\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(m)}(\tau)\zeta^{\mathrm{T}}_\varepsilon(\sigma)\big] = 0.$$

Запишем матрицу $\widehat{h}^\alpha(t,\tau)$ в виде $\widehat{h}^\alpha(t,\tau) = \begin{bmatrix} h^\alpha_{1mn}(t,\tau) \\ h^\alpha_{2mn}(t,\tau) \end{bmatrix}$, где $h^\alpha_{1mn}(t,\tau)$ и $h^\alpha_{2mn}(t,\tau)$ — матрицы размера $n \times m$. Тогда уравнение (13) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} M\big[\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)}(t)(\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)})^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] &= \int\limits_0^t h^\alpha_{1mn}(t,\tau)C_\varepsilon(\tau)M\big[\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)}(\tau)(\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)})^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]C^{\mathrm{T}}_\varepsilon(\sigma)\,d\tau + h^\alpha_{1mn}(t,\sigma)S_{\varepsilon\alpha}(\sigma), \\ M\left[\frac{d\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)}(t)}{dt}(\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)})^{\mathrm{T}}(\sigma)\right] &= \int\limits_0^t h^\alpha_{2mn}(t,\tau)C_\varepsilon(\tau)M\big[\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)}(\tau)(\boldsymbol{x}^\varepsilon_{(n)})^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]C^{\mathrm{T}}_\varepsilon(\sigma)\,d\tau + h^\alpha_{2mn}(t,\sigma)S_{\varepsilon\alpha}(\sigma). \end{aligned} \tag{14}$$

Интегральные уравнения в (14) независимы, и первое уравнение совпадает с уравнением Винера–Хопфа (8) для задачи (5)–(7), т.е. решение h^α_{1mn} совпадает с $h^{\varepsilon\alpha}_{mn}$. Следовательно, оценка состояния $\widehat{\boldsymbol{x}}^{\,\varepsilon}_\alpha(t)$ системы (5)–(7) равна первым n координатам вектора $\widehat{\chi}^{\,\alpha}_\varepsilon(t)$ — решения задачи (10)–(12), которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\widehat{\chi}^{\,\alpha}_\varepsilon(\tau)}{d\tau} = F_\varepsilon(\tau)\widehat{\chi}^{\,\alpha}_\varepsilon(\tau) + P_\varepsilon(\tau)\overline{C}^{\mathrm{T}}_\varepsilon(\tau)S^{-1}_{\varepsilon\alpha}(\tau)\big[\boldsymbol{r}^\varepsilon_{(m)}(\tau) - \overline{C}_\varepsilon(\tau)\widehat{\chi}^{\,\alpha}_\varepsilon(\tau)\big], \quad \widehat{\chi}^{\,\alpha}_\varepsilon(0) = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty,$$

где $P_\varepsilon(\tau)$ — решение уравнения Риккати

$$\frac{dP_\varepsilon(\tau)}{d\tau} = F_\varepsilon(\tau)P_\varepsilon(\tau) + P_\varepsilon(\tau)F_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\tau) + Q_\varepsilon(\tau) - P_\varepsilon(\tau)\overline{C}_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\tau)S_{\varepsilon\alpha}^{-1}(\tau)\overline{C}_\varepsilon(\tau)P_\varepsilon(\tau), \quad P_\varepsilon(0) = \begin{bmatrix} P_{0\varepsilon} & 0 \\ 0 & P_{10\varepsilon}\end{bmatrix}.$$

Обоснование алгоритма решения задачи (10) – (12) дано в [3, 5]. Параметр регуляризации выбирается согласно одному из методов, приведенных в [1 – 3, 5].

Оценки точности решения задачи линейной оптимальной фильтрации. Обозначим

$$M\big[\chi_\varepsilon(t)(\boldsymbol{r}_m^\varepsilon)^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = M\Big[\chi_\varepsilon(t)\big(\chi_\varepsilon(\sigma)\big)^{\mathrm{T}}\Big]\overline{C}_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\sigma) = K_{\chi\varepsilon}(t,\sigma)\overline{C}_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\sigma),$$

где $M\Big[\chi_\varepsilon(\tau)\big(\chi_\varepsilon(\sigma)\big)^{\mathrm{T}}\Big] = K_{\chi\varepsilon}(\tau,\sigma)$. Уравнение Винера–Хопфа (13) в этом случае запишется в виде

$$K_{\chi\varepsilon}(t,\sigma)\overline{C}_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\sigma) = \int\limits_0^t \hat{h}^\alpha(t,\tau)\overline{C}_\varepsilon(\tau)K_{\chi\varepsilon}(\tau,\sigma)\overline{C}_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\tau + \hat{h}^\alpha(t,\sigma)S_{\varepsilon\alpha}(\sigma). \tag{15}$$

Уравнение (15) в векторной форме имеет вид $\boldsymbol{B}_\varepsilon\boldsymbol{y}_{\varepsilon\alpha} + \alpha\boldsymbol{y}_{\varepsilon\alpha} = \boldsymbol{f}_\varepsilon$, где $\boldsymbol{y}_{\varepsilon\alpha}(t,\tau) = \big(\hat{h}^\alpha(t,\tau)\big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{f}_\varepsilon(t,\sigma) = \overline{C}_\varepsilon(\sigma)K_{\chi\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t,\sigma)\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}\in E_{2n}$, $\boldsymbol{B}_\varepsilon\boldsymbol{y} = \int\limits_0^t \overline{C}_\varepsilon(\sigma)K_{\chi\varepsilon}^{\mathrm{T}}(\tau,\sigma)\overline{C}_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{y}(\tau)\,d\tau + W_{(m)}^\varepsilon(\sigma)\boldsymbol{y}(\sigma)$.

Справедлива

Теорема 4. *При $\alpha\to 0$, $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon^2/\alpha\to 0$ и $\varepsilon_n\to 0$ оценка точности решения задачи линейной оптимальной фильтрации задается соотношениями*

$$M\Big[\big(z, u(t) - \widehat{u}_{nm}^{\varepsilon\alpha}(t)\big)_{H_u}^2\Big] \leqslant c\left\{M\Big[\big(\boldsymbol{z}, \chi(t) - \widehat{\chi}_\varepsilon^\alpha(t)\big)_{E_{2n}}^2\Big] + 2\,\frac{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_B^2\|\boldsymbol{y}_{\varepsilon\alpha}\|_{-10}^2}{\alpha}\right\} +$$
$$+ 2\varepsilon_n\left\{c\left(M\Big[\big(\boldsymbol{z}, \chi(t) - \widehat{\chi}_\varepsilon^\alpha(t)\big)_{E_{2n}}^2\Big] + 2\,\frac{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_B^2\|\boldsymbol{y}_{\varepsilon\alpha}\|_{-10}^2}{\alpha}\right)\right\}^{1/2} + \varepsilon_n^2 \to m(z),$$

где ε_n — точность аппроксимации процесса $u(\tau,x)\in H_u$, $\varepsilon_n\geqslant 0$, $\lim\limits_{n,m\to\infty}\varepsilon_n = 0$,

$$\varepsilon_f = \varepsilon\|K_{\chi\varepsilon}\| + \big(\varepsilon + \|C_\varepsilon\|\big)\varepsilon_\chi, \quad \varepsilon_B = \varepsilon\big(1 + \|K_{\chi\varepsilon}^{\mathrm{T}}\overline{C}_\varepsilon^{\mathrm{T}}\|\big) + \big(\varepsilon + \|C_\varepsilon\|\big)\Big[\varepsilon_\chi\|C_\varepsilon\| + \big(\varepsilon_\chi + \|K_{\chi\varepsilon}\|\big)\varepsilon\Big],$$
$$\varepsilon_\chi = \varepsilon_\phi|P_{0\varepsilon}|\,\|\Phi_\varepsilon\| + \varepsilon_\phi\|\Phi_\varepsilon\|\Big\{\varepsilon\|\Phi_\varepsilon\| + \big(\varepsilon + |P_{0\varepsilon}|\big)\varepsilon_\phi\Big\} + \varepsilon_\phi\|Q_\varepsilon\|\,\|\Phi_\varepsilon\| +$$
$$+ \Big[\varepsilon\|Q_\varepsilon\|\,\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon+1)\Big(\varepsilon\|\Phi_\varepsilon\| + \big(\varepsilon + \|Q_\varepsilon\|\big)\big(\varepsilon\|\Phi_\varepsilon\| + (\varepsilon+1)\varepsilon_\phi\big)\Big)\Big]\big(\varepsilon_\phi + \|\Phi_\varepsilon\|\big),$$
$$\varepsilon_\phi^2 = 2\varepsilon^2 e^{ct}\|\Phi_\varepsilon\|, \quad c>0, \quad c = \mathrm{const}.$$

Здесь $\Phi_\varepsilon(\tau,\sigma)$ — фундаментальная матрица решений системы (11).

Если матрицы P_0 и $V_{(n)}$ или P_0 и P_{10} положительно определены, то верны следующие соотношения: $c_0\|\boldsymbol{y}\|_{-10}^2 \leqslant \langle\boldsymbol{y}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\rangle \leqslant c_1\|\boldsymbol{y}\|_{-10}^2$, где c_0 и c_1 — положительные константы [3, 5]. *Тогда оценка принимает следующий вид:*

$$M\Big[\big(z, u(t) - \widehat{u}_{nm}^{\varepsilon\alpha}(t)\big)_{H_u}^2\Big] \leqslant c\left\{\sqrt{m(z)} + \sqrt{\frac{\alpha}{c_0}}\,\big(\varepsilon_\chi + \|K_{\chi\varepsilon}\|\big)\big(\varepsilon + \|C_\varepsilon\|\big)\|\boldsymbol{z}\|_{2n} +\right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_B^2\|P_{\widehat{\chi}\varepsilon\alpha}\|\,\|\boldsymbol{z}\|_{2n}^2}\right\}^2 + 2\varepsilon_n\left\{c\left(\sqrt{m(z)} + \sqrt{\frac{\alpha}{c_0}}\,\big(\varepsilon_\chi + \|K_{\chi\varepsilon}\|\big)\big(\varepsilon + \|C_\varepsilon\|\big)\|\boldsymbol{z}\|_{2n} +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_B^2\|P_{\widehat{\chi}\varepsilon\alpha}\|\,\|\boldsymbol{z}\|_{2n}^2}\right)\right\} + \varepsilon_n^2 \to m(z).$$

Здесь $P_{\widehat{\chi}\varepsilon\alpha}(t) = M\big[\widehat{\chi}_\varepsilon^\alpha(t)(\widehat{\chi}_\varepsilon^\alpha)^{\mathrm{T}}(t)\big]$, $\overline{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}P_{\widehat{\chi}\varepsilon\alpha}(t)\overline{\boldsymbol{z}} = \langle\boldsymbol{y}_{\varepsilon\alpha}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_{\epsilon\alpha}\rangle$ и $\big\|K_{\chi\varepsilon}(t)\big\| = \|\Phi_\varepsilon\|^2\,\|V_{(n)}^\varepsilon\|\,t$.

Доказательство. Оценим выражение $M\Big[\big(z, u(t) - \widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t)\big)^2_{H_u}\Big]$. Запишем $u(\tau)$ и $\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(\tau)$ в виде разложения по базису $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства H_u: $u(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i(\tau)e_i$, $\widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} \widehat{x}^{\varepsilon\alpha}_i(\tau)e_i$. Тогда

$$M\Big[\big(z, u(t) - \widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t)\big)^2_{H_u}\Big] \leqslant M\left[\left(z, \sum_{i=1}^{n}\Big\{\big(x_i(\tau) - \widehat{x}^{\varepsilon\alpha}_i(\tau)\big)e_i\Big\}\right)^2_{H_u}\right] + M\left[\left(z, \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i(\tau)e_i\right)^2_{H_u}\right] +$$
$$+ 2\left\{M\left[\left(z, \sum_{i=1}^{n}\Big\{\big(x_i(\tau) - \widehat{x}^{\varepsilon\alpha}_i(\tau)\big)e_i\Big\}\right)^2_{H_u}\right] M\left[\left(z, \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i(\tau)e_i\right)^2_{H_u}\right]\right\}^{1/2} = \tag{16}$$
$$= M\left[\left(z, \sum_{i=1}^{n}\big\{x_i(\tau) - \widehat{x}^{\varepsilon\alpha}_i(\tau)\big\}e_i\right)^2_{H_u}\right] + \varepsilon_n^2 + 2\varepsilon_n\left\{M\left[\left(z, \sum_{i=1}^{n}\Big\{\big(x_i(\tau) - \widehat{x}^{\varepsilon\alpha}_i(\tau)\big)e_i\Big\}\right)^2_{H_u}\right]\right\}^{1/2}.$$

Пусть $\boldsymbol{z}$ — вектор с координатами $z_i = (z, e_i)_{H_u}$. Тогда (16) примет вид

$$M\Big[\big(z, u - \widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t)\big)^2_{H_u}\Big] \leqslant M\Big[\big(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}(t) - \widehat{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}_{\alpha}(t)\big)^2_{E_n}\Big] + \varepsilon_n^2 + 2\varepsilon_n\left\{M\Big[\big(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}(t) - \widehat{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}_{\alpha}(t)\big)^2_{E_n}\Big]\right\}^{1/2}.$$

Так как $\boldsymbol{x}(\tau)$ и $\widehat{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}_{\alpha}(\tau)$ являются первыми n координатами векторов $\chi(\tau)$ и $\widehat{\chi}^{\varepsilon}_{\alpha}(\tau)$, то справедливо неравенство

$$M\Big[\big(z, u(t) - \widehat{u}^{\varepsilon\alpha}_{nm}(t)\big)^2_{H_u}\Big] \leqslant M\Big[\big(\overline{\boldsymbol{z}}, \chi(t) - \widehat{\chi}^{\varepsilon}_{\alpha}(t)\big)^2_{E_{2n}}\Big] + \varepsilon_n^2 + 2\varepsilon_n\left\{M\Big[\big(\overline{\boldsymbol{z}}, \chi(t) - \widehat{\chi}^{\varepsilon}_{\alpha}(t)\big)^2_{E_{2n}}\Big]\right\}^{1/2},$$

где $\overline{\boldsymbol{z}}$ — вектор с координатами $\overline{z}_i = \begin{cases} z_i, & \text{если } i = 1, 2, \ldots, n; \\ 0, & \text{если } i = n+1, n+2, \ldots, 2n. \end{cases}$ Подставим оценки, доказанные в [5, 10], вместо выражения $M\Big[\big(\overline{\boldsymbol{z}}, \chi(t) - \widehat{\chi}^{\varepsilon}_{\alpha}(t)\big)^2_{E_{2n}}\Big]$ и получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
3. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
4. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
5. *Колос М.В., Колос И.В.* Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. *Колос М.В., Колос И.В.* О разрешимости обобщенной задачи Дирихле для гиперболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 68–78.
7. *Колос М.В., Колос И.В.* О решении линейной задачи фильтрации для гиперболических систем // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 2. 116–126.
8. *Колос М.В., Колос И.В.* О приближенном решении обобщенной смешанной краевой задачи для уравнений параболического и гиперболического типов // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. 149–161.
9. *Колос И.В., Колос М.В.* О приближенном решении одной обобщенной краевой задачи для уравнений гиперболического типа с вырождением // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 2. 160–166.
10. *Колос М.В., Колос И.В.* Об оценках точности решения задач линейной оптимальной фильтрации с цветным шумом в наблюдениях // Вычислит. методы и системы обработки данных на ЭВМ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 19–33.
11. *Колос М.В., Колос И.В.* Об приближенном решении одной задачи линейной оптимальной фильтрации // Вычислительные методы и программирование. **7**. 2006. 259–265.

Поступила в редакцию
12.10.2007