

УДК 539.312

**ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ
КВАДРАТОВ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

И. О. Арушанян¹, Г. М. Кобельков¹

Рассмотрено применение проекционно-сеточного метода наименьших квадратов к обобщенной задаче плоской теории упругости с двумя большими параметрами. Для случая стандартной триангуляции области построен эффективный неявный итерационный метод. Рассмотрен специальный способ триангуляции, позволяющий решить результирующую систему линейных алгебраических уравнений прямым методом с использованием быстрого преобразования Фурье.

Ключевые слова: проекционно-сеточные методы, численный анализ, численные методы, метод наименьших квадратов, теория упругости, задача Стокса, минимизация, краевые задачи.

1. Введение. Данная работа является обобщением результатов [2, 3], полученных авторами для задачи Стокса. Рассматривается применение метода наименьших квадратов к решению двумерной задачи теории упругости с двумя большими параметрами и периодическими граничными условиями. Метод основан на сведении краевой задачи второго порядка к системе уравнений в частных производных первого порядка и последующей минимизации в некотором конечномерном пространстве функционала от невязок этих уравнений методом наименьших квадратов.

Известно [5, 9], что для рассматриваемой задачи можно оценить функционал невязок через H^1 -норму искомых функций, что позволяет при приближенном решении получить одинаковый порядок точности как для скорости, так и для вспомогательных функций (дивергенции и двумерного ротора от вектора перемещений). Кроме того, конечномерные пространства, в которых ищется приближенное решение, могут быть выбраны независимо от $\inf\text{-sup}$ неравенства.

Следует отметить, что существенным недостатком данного метода является появление дополнительных, подлежащих определению неизвестных функций, что особенно заметно при решении задачи с однородными краевыми условиями, накладываемыми на вектор перемещений [7].

Во многих работах [5–7, 9, 10] при решении эллиптических краевых задач методом наименьших квадратов основное внимание уделяется доказательству эллиптичности функционала невязок, в то время как важные вопросы, связанные со свойствами систем линейных алгебраических уравнений, к которым сводится задача минимизации в конечномерном пространстве, отходят на второй план. Настоящая работа посвящена рассмотрению именно алгебраических свойств аппроксимирующей системы, что позволяет построить эффективный итерационный процесс, скорость сходимости которого не зависит от параметров, входящих в условие задачи.

Кроме того, предложена специальная конечно-элементная аппроксимация задачи, позволяющая решить аппроксимирующую систему линейных алгебраических уравнений прямым методом за асимптотически оптимальное количество действий.

2. Постановка задачи. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ с границей Γ

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

и сформулируем следующую краевую задачу:

$$-\Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) = \mathbf{g} \quad \text{в } \Omega. \tag{1}$$

Здесь α — положительный параметр и λ, μ — коэффициенты Ламе. В дальнейшем будем считать, что $\alpha \gg 1$ и $(\lambda + \mu)/\mu \gg 1$. Дискретный аналог задачи (1) возникает при применении неявного численного метода к решению нестационарной системы теории упругости. В этом случае параметр α пропорционален величине δt^{-1} , где δt — шаг, характеризующий дискретизацию по времени.

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: arushan@mech.math.msu.su; kobelkov@dodo.inm.ras.ru

Мы будем рассматривать случай граничных условий, соответствующих условию “жесткого контакта” [12]:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} являются единичными касательными и нормальными векторами к Γ . Введенные граничные условия означают, что мы имеем жесткую стенку (отсутствует проникание: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$) и касательные напряжения обращаются в нуль ($\sigma_{ij}n_j = 0$, где $\sigma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}p$, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ — компоненты тензора напряжений и тензора деформаций).

Введем две вспомогательные функции

$$\omega = (\sqrt{\alpha})^{-1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right),$$

$$p = (\sqrt{\alpha})^{-1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right).$$

Учитывая соотношения

$$-\frac{\partial \omega}{\partial y} = (\sqrt{\alpha})^{-1} \left(\Delta u^1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \right),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = (\sqrt{\alpha})^{-1} \left(\Delta u^2 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \right),$$

сведем поставленную задачу к системе уравнений первого порядка

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial y} + u^1 - (\varkappa + 1) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} = f_1 \quad \text{в } \Omega, \\ -\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial x} + u^2 - (\varkappa + 1) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial y} = f_2 \quad \text{в } \Omega, \\ \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial u^1}{\partial y} \right) - \omega = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ p - \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u^1 = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ u^2 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \\ \omega = 0 \quad \text{на } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\}, \Gamma_2 = \{(x, y) \mid x = 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1\}, \Gamma_4 = \{(x, y) \mid x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

и $\varepsilon = \alpha^{-1}$, $\varkappa = (\lambda + \mu)/\mu$, $\mathbf{f} = \alpha^{-1} \mathbf{g}$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие функциональные пространства:

$$H_0^1 = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \quad \text{на } \Gamma\},$$

$$V^1 = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \cup \Gamma_4\},$$

$$V^2 = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\}.$$

Для решения системы (3) запишем функционал невязок

$$\Phi(\omega, \mathbf{u}, p, \mathbf{f}) = \|\sqrt{\varepsilon} \operatorname{curl} \omega + \mathbf{u} - (\varkappa + 1) \sqrt{\varepsilon} p - \mathbf{f}\|^2 +$$

$$+ \left\| \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial u^1}{\partial y} \right) - \omega \right\|^2 + \left\| p - \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \right\|^2$$

и сформулируем следующую задачу минимизации:

$$\Phi(\omega, \mathbf{u}, p, \mathbf{f}) \rightarrow \min \quad \text{на } \mathbf{W}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{W} = H_0^1 \times V_n \times H^1 = \{\omega, \mathbf{u}, p\}.$$

Лемма 1. Для любых функций $\omega \in H_0^1(\Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$ в рассматриваемой области Ω выполнено:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy = 0.$$

Доказательство. Интегрируя выписанное соотношение по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \left(n_x \omega \frac{\partial p}{\partial y} + n_y p \frac{\partial \omega}{\partial x} - n_x p \frac{\partial \omega}{\partial y} - n_y \omega \frac{\partial p}{\partial x} \right) dl = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \left(n_y p \frac{\partial \omega}{\partial x} - n_x p \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dl = \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (p (\nabla \omega \cdot \boldsymbol{\tau})) dl = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\nabla \omega \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ на Γ . Лемма доказана.

Лемма 2. Для любой ограниченной выпуклой области Ω с кусочно-гладкой (из C^1) границей Γ и для произвольной вектор-функции $\mathbf{u} = (u^1, u^2)^T \in V_n$ выполнено неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_1^2 \leq \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|^2.$$

Если область Ω является многоугольником, то

$$\|\mathbf{u}\|_1^2 = \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|^2$$

и, следовательно,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} \frac{\partial u^2}{\partial y} - \frac{\partial u^1}{\partial y} \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) dx dy = 0.$$

Доказательство Леммы 2 можно найти в [8].

Таким образом, функционал невязок может быть записан в виде

$$\Phi(\omega, \mathbf{u}, p, \mathbf{0}) = \|\omega\|^2 + \varepsilon \|\nabla \omega\|^2 + \|p\|^2 + (\varkappa + 1)^2 \varepsilon \|\nabla p\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \varepsilon \|\nabla u^1\|^2 + \varepsilon \|\nabla u^2\|^2 + 2 \varkappa \sqrt{\varepsilon} (\mathbf{u}, \nabla p).$$

Теперь покажем, что решение задачи (4) существует и единственно.

Теорема 1. Существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2 , что для произвольных функций $(\omega, \mathbf{u}, p) \in \mathbf{W}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} C_1 (\|\omega\|^2 + \varepsilon \|\nabla \omega\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \varepsilon \|\nabla u^1\|^2 + \varepsilon \|\nabla u^2\|^2 + \|\nabla p\|^2) &\leq \Phi(\omega, \mathbf{u}, p, \mathbf{0}) \leq \\ &\leq C_2 (\|\omega\|^2 + \varepsilon \|\nabla \omega\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \varepsilon \|\nabla u^1\|^2 + \varepsilon \|\nabla u^2\|^2 + \|\nabla p\|^2), \end{aligned}$$

причем $C_2/C_1 = O((\varepsilon + \varkappa^{-1})^{-1})$.

Доказательство. Оценка сверху следует из неравенства треугольника.

Пусть c — постоянная из неравенства Фридрикса

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq c (\|\nabla u^1\|^2 + \|\nabla u^2\|^2), \tag{5}$$

а $\xi \in (0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, \mathbf{u}, p, \mathbf{0}) &\geq \|\omega\|^2 + \varepsilon \|\nabla \omega\|^2 + \|p\|^2 + (\varkappa + 1)^2 \|\nabla p\|^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2c}\right) \|\mathbf{u}\|^2 + 0.5 \varepsilon \|\nabla u_1\|^2 + \\ &+ 0.5 \varepsilon \|\nabla u_2\|^2 - \xi \|\mathbf{u}\|^2 - \varepsilon \varkappa^2 \xi^{-1} \|\nabla p\|^2. \end{aligned}$$

Условие теоремы выполнено при любом ξ , удовлетворяющем неравенствам

$$\left(\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\right)^2 < \xi < 1 + \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Для построения приближенного решения рассмотрим конечномерные пространства кусочно-линейных функций $H_h^1 \in H^1$, $H_{0,h}^1 \in H_0^1$, $V_{n,h} \in V_n$. Здесь h — параметр дискретизации, в качестве которого берется характерный размер элементов, образующих введенные конечномерные пространства. Из Теоремы 1 следует следующая теорема [5, 10].

Теорема 2. Пусть решение задачи (1), (2) принадлежит пространству $\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{W}$. Тогда для приближенного решения $\{\omega_h, \mathbf{u}_h, p_h\} \in H_{0,1}^1 \times V_{n,h} \times H_h^1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\omega - \omega_h\| + \varkappa\sqrt{\varepsilon}\|p - p_h\| + \sqrt{\varepsilon}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| &\leq C_3 h^2 (\|\omega\|_2 + \|p\|_2 + \|\mathbf{u}\|_2), \\ \|\omega - \omega_h\| + \sqrt{\varepsilon}\|\nabla(\omega - \omega_h)\| + \varkappa\sqrt{\varepsilon}\|p - p_h\|_1 + \sqrt{\varepsilon}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 &\leq C_4 h (\|\omega\|_2 + \|p\|_2 + \|\mathbf{u}\|_2), \end{aligned}$$

причем постоянные C_4 и C_5 не зависят от выбора h .

3. Описание аппроксимирующей системы. Введем стандартную триангуляцию области Ω с шагом $h = 1/N$ при некотором натуральном N и через $\{\varphi_i\}$ обозначим базис в H_h^1 .

Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$\Phi(\omega_h, u_h^1, u_h^2, p_h, \mathbf{f}) \rightarrow \min \text{ на } \mathbf{W}_h, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{W}_h = H_{0,h}^1 \times V_h^1 \times V_h^2 \times H_h^1 = \{\omega_h, u_h^1, u_h^2, p_h\}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \omega_h(x, y) &= \sum_{\varphi_i \in H_{0,h}^1} \omega_i \varphi_i(x, y), \quad p_h(x, y) = \sum_{\varphi_i \in H_h^1} p_i \varphi_i(x, y), \\ u_h^k(x, y) &= \sum_{\varphi_i \in V_h^k} u_i^k \varphi_i(x, y), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Минимум в задаче (6) достигается при выполнении условий

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_i^1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_i^2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = 0.$$

Следовательно, используя Леммы 1 и 2, мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (G^0 + \varepsilon (D_{xx}^0 + D_{yy}^0)) \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{F}^1, \\ (G^1 + \varepsilon (D_{xx}^1 + D_{yy}^1)) \mathbf{u}^1 + \varkappa\sqrt{\varepsilon} K_x \mathbf{p} &= \mathbf{F}^2, \\ (G^2 + \varepsilon (D_{xx}^2 + D_{yy}^2)) \mathbf{u}^2 + \varkappa\sqrt{\varepsilon} K_y \mathbf{p} &= \mathbf{F}^3, \\ \varkappa\sqrt{\varepsilon} K_x^T \mathbf{u}^1 + \varkappa\sqrt{\varepsilon} K_y^T \mathbf{u}^2 + (G + \varepsilon(\varkappa+1)^2 (D_{xx} + D_{yy})) \mathbf{p} &= \mathbf{F}^4. \end{aligned} \quad (8)$$

Матрицы в (8) определяются соответствующими дифференциальными операторами [1–3]. Например,

$$((G^1 + D_{xx}^1 + D_{yy}^1) \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) + (K_x \mathbf{p}, \mathbf{u}^1) = (u_h^1, u_h^1) + (\nabla u_h^1, \nabla u_h^1) + \left(\frac{\partial p_h}{\partial x}, u_h^1\right),$$

где связь между векторами \mathbf{u}^1, \mathbf{p} и функциями u_h^1, p_h задается посредством (7).

Отметим, что вектор $\boldsymbol{\omega}$, определяющий функцию ω , может быть получен как решение изолированной группы уравнений

$$(G + \varepsilon (D_{xx}^0 + D_{yy}^0)) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{F}^1.$$

Для определения остальных неизвестных $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ и \mathbf{p} получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$A \mathbf{z} = \mathbf{F}, \quad (9)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} G^1 + \varepsilon (D_{xx}^1 + D_{yy}^1) & 0 & \varkappa\sqrt{\varepsilon} K_x \\ 0 & G^2 + \varepsilon (D_{xx}^2 + D_{yy}^2) & \varkappa\sqrt{\varepsilon} K_y \\ \varkappa\sqrt{\varepsilon} K_x^T & \varkappa\sqrt{\varepsilon} K_y^T & G + (\varkappa + 1)^2 \varepsilon (D_{xx} + D_{yy}) \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \\ \mathbf{F}^4 \end{pmatrix}.$$

Введем следующие обозначения:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} G^1 + \varepsilon (D_{xx}^1 + D_{yy}^1) & 0 \\ 0 & G^2 + \varepsilon (D_{xx}^2 + D_{yy}^2) \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \varkappa\sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = A_{12}^T, \quad A_{22} = G + (\varkappa + 1)^2 \varepsilon (D_{xx} + D_{yy}), \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 обеспечивает спектральную эквивалентность матриц D и A . Таким образом, при построении итерационного процесса для решения системы (9) можно использовать матрицу D в качестве предобуславливателя для A . При решении на верхнем слое системы с матрицей D в правой части можно использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Оценим эффективность такого подхода. Известно [4], что

$$\text{cond}(D^{-1}A) = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma},$$

где

$$\gamma = \sup_{\mathbf{U}, \mathbf{p}} \frac{(A_{12}\mathbf{U}, \mathbf{p})}{\sqrt{(A_{11}\mathbf{U}, \mathbf{U})(A_{22}\mathbf{p}, \mathbf{p})}}.$$

В рассматриваемом случае мы можем получить оценку для величины γ :

$$\gamma^2 = \sup_{\mathbf{u} \in V_{n,h}, \mathbf{p} \in \hat{V}_h} \frac{\varepsilon \varkappa^2 (\mathbf{u}, \nabla \mathbf{p})^2}{\|\mathbf{p}\|^2 + \varepsilon (\varkappa + 1)^2 \|\nabla \mathbf{p}\|^2 (\|\mathbf{u}\|^2 + \varepsilon |u_1|^2)} \leq \left(\frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \right)^2 \frac{1}{1 + \varepsilon/c}.$$

Здесь c — постоянная из неравенства (5).

Таким образом, скорость сходимости итерационного процесса будет замедляться с ростом \varkappa и $\alpha = \varepsilon^{-1}$, т.к. $\text{cond}(D^{-1}A) = O((\varepsilon + \varkappa^{-1})^{-1})$.

Другой путь состоит в сведении (9) к системе

$$S\mathbf{p} = -A_{12}^T A_{11}^{-1} \mathbf{F},$$

где $S \equiv A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}$.

Известно [4], что

$$1 - \gamma^2 \leq \frac{(S\mathbf{p}, \mathbf{p})}{(A_{22}\mathbf{p}, \mathbf{p})} \leq 1.$$

Таким образом, в качестве предобуславливателя может быть взята матрица A_{22} . Однако в этом случае мы получим улучшение скорости сходимости не более чем в четыре раза, т.к.

$$\frac{\text{cond}(D^{-1}A)}{\text{cond}(A_{22}^{-1}S)} = (1 + \gamma)^2.$$

4. Построение специального предобуславливателя. Приведенные выше оценки показывают важность построения эффективного предобуславливателя для A , позволяющего получить итерационный процесс со скоростью сходимости, не зависящей от ε и \varkappa .

Если мы рассматриваем стандартную триангуляцию области Ω , то

$$(K_x \mathbf{p})_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6h} (2p_{i+1,j} - 2p_{i-1,j} + p_{i+1,j+1} - p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}) \\ \text{при } 1 \leq i, j \leq N-1; \\ \frac{1}{6h} (p_{i+1,0} - p_{i-1,0} + p_{i+1,1} - p_{i,1}) \\ \text{при } 1 \leq i \leq N-1, j=0; \\ \frac{1}{6h} (p_{i+1,N} - p_{i-1,N} + p_{i,N-1} - p_{i-1,N-1}) \\ \text{при } 1 \leq i \leq N-1, j=N. \end{cases}$$

Выражения для $(K_y \mathbf{p})_{ij}$ имеют ту же структуру с точностью до переобозначения индексов.

Введем оператор ∂_x следующим образом:

$$(\partial_x \mathbf{p})_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2h} (p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) \text{ при } 1 \leq i, j \leq N-1; \\ \frac{1}{4h} (p_{i+1,0} - p_{i-1,0}) \text{ при } 1 \leq i \leq N-1, j=0; \\ \frac{1}{4h} (p_{i+1,N} - p_{i-1,N}) \text{ при } 1 \leq i \leq N-1, j=N. \end{cases}$$

Аналогично введем оператор ∂_y . Важно отметить, что

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix} \equiv \text{Ker} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}.$$

Используя “интегрирование по частям” в разностном случае, нетрудно показать, что

Лемма 3. *Справедливо соотношение*

$$(K_x \mathbf{p}, \mathbf{u}^1) + (K_y \mathbf{p}, \mathbf{u}^2) = (\partial_x \mathbf{p}, \mathbf{u}^1) + (\partial_y \mathbf{p}, \mathbf{u}^2) + (\hat{K}_{13} \mathbf{p}, \mathbf{u}^1) + (\hat{K}_{23} \mathbf{p}, \mathbf{u}^2).$$

При этом

$$\begin{aligned} & \left| (\hat{K}_{13} \mathbf{p}, \mathbf{u}^1) \right| + \left| (\hat{K}_{23} \mathbf{p}, \mathbf{u}^2) \right| \leq \\ & \leq \frac{h}{6} \left(((D_{xx}^1 + D_{yy}^1) \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) + ((D_{xx}^2 + D_{yy}^2) \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^2) + ((D_{xx} + D_{yy}) \mathbf{p}, \mathbf{p}) \right). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} G^1 + \varepsilon (D_{xx}^1 + D_{yy}^1) & 0 & \varkappa \sqrt{\varepsilon} \partial_x \\ 0 & G^2 + \varepsilon (D_{xx}^2 + D_{yy}^2) & \varkappa \sqrt{\varepsilon} \partial_y \\ \varkappa \sqrt{\varepsilon} \partial_x^T & \varkappa \sqrt{\varepsilon} \partial_y^T & G + (\varkappa + 1)^2 \varepsilon (D_{xx} + D_{yy}) \end{pmatrix}$$

и

$$B = \begin{pmatrix} I + \varepsilon (D_{xx}^1 + D_{yy}^1) & 0 & \varkappa \sqrt{\varepsilon} \partial_x \\ 0 & I + \varepsilon (D_{xx}^2 + D_{yy}^2) & \varkappa \sqrt{\varepsilon} \partial_y \\ \varkappa \sqrt{\varepsilon} \partial_x^T & \varkappa \sqrt{\varepsilon} \partial_y^T & I + (\varkappa + 1)^2 \varepsilon (D_{xx} + D_{yy}) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A = \hat{B} + \hat{K},$$

где

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varkappa \sqrt{\varepsilon} \hat{K}_{13} \\ 0 & 0 & \varkappa \sqrt{\varepsilon} \hat{K}_{23} \\ \varkappa \sqrt{\varepsilon} \hat{K}_{13}^T & \varkappa \sqrt{\varepsilon} \hat{K}_{23}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из Леммы 3 следует

Теорема 3. Пусть величина h отвечает условию

$$h \leq \frac{3}{2} \sqrt{\varepsilon} (1 - d)$$

при некотором $0 < d < 1$. Тогда существуют две строго положительные постоянные $\beta_1(d)$ и $\beta_2(d)$, такие, что

$$\beta_1(d) \widehat{B} \leq A \leq \beta_2(d) \widehat{B}$$

и $\beta_2(d)/\beta_1(d) = O(d^{-2})$.

Отметим, что для всех значений h справедливы неравенства

$$\beta_0 B \leq \widehat{B} \leq B,$$

где β_0 — минимальное собственное число матрицы Грама.

Матрица B легко обратима [11, 12], т.е. для решения системы

$$Bz = \psi$$

можно применить технику БПФ.

Таким образом, для достаточно малых значений h скорость сходимости неявного итерационного метода с предобуславливателем B не зависит от ε и \varkappa .

5. Прямой метод решения. Нетрудно видеть, что в отличие от дифференциальной задачи (1), (2) ее аппроксимация (8) не допускает периодического продолжения на всю плоскость. Тем не менее, мы предложим специальную триангуляцию области, позволяющую построить такое периодическое продолжение. В этом случае аппроксимирующая система линейных уравнений может быть решена с использованием БПФ.

Перейдем к построению триангуляции области Ω . Будем считать, что

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}.$$

Пусть $N = 2^m$ и $m \in \mathbf{Z}$. Обозначим $h = \pi(2N)^{-1}$. Прямые $x = 2ih, y = 2jh$ разбивают область $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ на элементарные квадраты. В каждом квадрате проводим диагонали и соединяем середины противоположных сторон. В результате получаем разбиение области $\overline{\Omega}$ на прямоугольные треугольники с катетами длины h . Обозначим

$$\Omega_h = \{(ih, jh), 0 \leq i, j \leq 2N\}$$

и

$$\mathbf{u}^1 = \{u_{ij}, 1 \leq i \leq 2N - 1, 0 \leq j \leq 2N\},$$

$$\mathbf{u}^2 = \{v_{ij}, 0 \leq i \leq 2N, 1 \leq j \leq 2N - 1\},$$

$$\mathbf{p} = \{p_{ij}, 0 \leq i \leq 2N, 0 \leq j \leq 2N\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать пространство непрерывных функций V_h , линейных на каждом элементарном треугольнике. Базисные функции φ_{ij} строятся следующим образом.

Если $i + j = 2l$, то носитель φ_{ij} состоит из восьми ближайших элементарных треугольников. Если $i + j = 2l + 1$, то носитель φ_{ij} состоит из четырех ближайших элементарных треугольников. В каждом случае $\varphi_{ij}(kh, mh) = \delta_{ij}^{km}$.

Перейдем к описанию прямого метода решения системы (9), которая соответствует построенной аппроксимации. Продолжим \mathbf{p} четным образом с Ω_h через координатные оси. Мы получаем разностную функцию $\tilde{\mathbf{p}}$, определенную на сеточной области, которая в четыре раза больше чем Ω_h . Если теперь мы продолжим функцию \mathbf{u}^1 четно через ось абсцисс и нечетно через ось ординат, а функцию \mathbf{u}^2 продолжим нечетным образом через ось абсцисс и четным через ось ординат, то система разностных уравнений (9) будет выполнена для продолженных разностных функций $\tilde{\mathbf{u}}^1, \tilde{\mathbf{u}}^2, \tilde{\mathbf{p}}$ во всех узлах, где аргументы этих уравнений определены. Таким образом, вся разностная задача допускает продолжение с периодом 2π на всю плоскость.

Рассмотрим сеточные области

$$\Omega_{1,h} = \{(ih, jh), i = 2m, j = 2l\},$$

$$\Omega_{2,h} = \{(ih, jh), i = 2m + 1, j = 2l\},$$

$$\Omega_{3,h} = \{(ih, jh), i = 2m, j = 2l + 1\},$$

$$\Omega_{4,h} = \{(ih, jh), i = 2m + 1, j = 2l + 1\}.$$

Мы можем представить $\{\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{p}\}$ в виде $\{u^{1,i}, u^{2,i}, p^i, i = 1, 2, 3, 4\}$, где разностные функции $u^{1,i}, u^{2,i}, p^i$ определены на сеточных областях $\Omega_{i,h}$ соответственно. Так как каждая сеточная область $\Omega_{i,h}$ является сеточным прямоугольником, то решение может быть разложено на $\Omega_{i,h}$ в дискретные ряды Фурье.

Мы будем использовать следующие разложения, отвечающие главным краевым условиям:

$$\begin{aligned}
 u^{1,1}(x, y) &= \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=0}^N d_{k_2} u_{k_1 k_2}^1 \sin k_1 x \cos k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{1,h}, \\
 u^{1,2}(x, y) &= \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=0}^N d_{k_1} d_{k_2} u_{k_1 k_2}^2 \sin k_1 x \cos k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{2,h}, \\
 u^{1,3}(x, y) &= \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} d_{k_2} u_{k_1 k_2}^3 \sin k_1 x \cos k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{3,h}, \\
 u^{1,4}(x, y) &= \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=0}^{N-1} d_{k_1} d_{k_2} u_{k_1 k_2}^4 \sin k_1 x \cos k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{4,h}, \\
 u^{2,1}(x, y) &= \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=1}^{N-1} d_{k_1} v_{k_1 k_2}^1 \cos k_1 x \sin k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{1,h}, \\
 u^{2,2}(x, y) &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} d_{k_1} v_{k_1 k_2}^2 \cos k_1 x \sin k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{2,h}, \\
 u^{2,3}(x, y) &= \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=1}^N d_{k_1} d_{k_2} v_{k_1 k_2}^3 \cos k_1 x \sin k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{3,h}, \\
 u^{2,4}(x, y) &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=1}^N d_{k_1} d_{k_2} v_{k_1 k_2}^4 \cos k_1 x \sin k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{4,h}, \\
 p^1(x, y) &= \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N d_{k_1} d_{k_2} p_{k_1 k_2}^1 \cos k_1 x \cos k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{1,h}, \\
 p^2(x, y) &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^N d_{k_1} d_{k_2} p_{k_1 k_2}^2 \cos k_1 x \cos k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{2,h}, \\
 p^3(x, y) &= \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^{N-1} d_{k_1} d_{k_2} p_{k_1 k_2}^3 \cos k_1 x \cos k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{3,h}, \\
 p^4(x, y) &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} d_{k_1} d_{k_2} p_{k_1 k_2}^4 \cos k_1 x \cos k_2 y, & (x, y) \in \Omega_{4,h}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $d_j = 1$ для всех $0 < j < N$ и $d_0 = d_N = 0.5$. Отметим, что сеточные функции F^2, F^3, F^4 из (9) могут быть аналогичным образом разложены в ряды Фурье с коэффициентами $F_k^i, \Phi_k^i, \Theta_k^i, i = 1, 2, 3, 4$, где k представляет собой мультииндекс $k = (k_1, k_2)$.

Подставляя (10) в систему сеточных уравнений (9), мы получаем системы линейных уравнений, отражающие связь между u_k^i, v_k^i, p_k^i и $F_k^i, \Phi_k^i, \Theta_k^i$.

Эти системы однозначно разрешимы для всех значений k_1 и k_2 , так как их матрицы положительно определены. Каждая из них требует для решения конечное (не зависящее от N) количество арифметических операций.

Теперь мы можем определить коэффициенты u_k^i, v_k^i, p_k^i , используя $O(N^2)$ арифметических операций и, в результате, построить решение u^1, u^2, p , используя БПФ. Общие вычислительные затраты составят $O(N^2 \log_2 N)$ арифметических операций.

Работа поддержана РФФИ (проект № 99-01-01146), программой “Университеты России” (проект № 015.04.02.026) и грантом NWO-RFBR 047.008.007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arushanian I.O., Axelsson O., Kobelkov G.M.* Implementation of a least-squares finite element method for solving the Poisson equation. Department of Mathematics, University of Nijmegen, the Netherlands. Report N 9717, 1997.
2. *Arushanian I.O., Kobelkov G.M.* Implementation of a least-squares finite element method for solving the generalized Stokes problem. Department of Mathematics, University of Nijmegen, the Netherlands. Report N 9901, 1999.
3. *Arushanian I.O., Kobelkov G.M.* Implementation of a least-squares finite element method for solving the Stokes problem with a parameter // *Numer. Linear Algebra Appl.* 1999. **6**. 587–597.
4. *Axelsson O.* Iterative solution methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
5. *Bochev P., Gunzburger M.* Analysis of least-squares finite element methods for the Stokes equations // *Mathematics of Computation.* 1994. **63**. 479–506.
6. *Bramble J.H., Lazarov R.D., Pasciak J.E.* A least-squares approach based on a discrete minus one inner product for first order systems // *Mathematics of Computation.* 1997. **66**. 935–955.
7. *Cai Z., Manteuffel T.A., McCormick S.F.* First-order system least squares for the Stokes equations with application to linear elasticity // *SIAM J. Numer. Anal.* 1997. **35**, N 5. 1727–1741.
8. *Girault V., Raviart P.-A.* Finite element method for Navier–Stokes equations. Berlin: Springer, 1994.
9. *Jiang B.-N., Povinelli L.A.* A least-squares finite element method for fluid dynamics // *Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering.* 1990. **81**. 13–37.
10. *Jiang B.-N., Povinelli L.A.* Optimal least-squares finite element method for elliptic problems // *Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering.* 1993. **102**. 199–212.
11. *Кобельков Г.М.* Численные методы решения уравнений Навье–Стокса в переменных “скорость–давление” // *Вычислительные процессы и системы.* М.: Наука, 1991. **8**. 204–236.
12. *Кобельков Г.М.* Решение задачи жесткого контакта для несжимаемого материала // *Журн. вычислит. матем. и матем. физики.* 1976. **4**. 987–995.

Поступила в редакцию
15.11.2001
