

УДК 519.633.9

## ИТЕРАЦИОННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СИНОГРАММЫ В ПРОСТРАНСТВЕ РАДОНА ДЛЯ ЗАДАЧИ СТЕГАНОГРАФИИ

В. В. Пикалов<sup>1</sup>, Д. И. Казанцев<sup>2</sup>

Рассматривается итерационный алгоритм, реализующий обратное преобразование Радона для возмущенных данных. Предложенная схема основана на разложении обратного оператора в ряд Неймана по степеням прямого преобразования Радона. Проведено численное моделирование с использованием вариации вида возмущения в пространстве Радона (на синограмме). В качестве возможного приложения данного алгоритма рассмотрена задача стеганографии — скрытие одного изображения в другом. Работа частично поддержана грантами РФФИ (коды проектов 07-07-00085, 07-01-00318, 05-08-50308, 05-02-16896 и 04-01-04003).

**Ключевые слова:** алгоритмы томографии, возмущение синограммы, стеганография, итерационные алгоритмы, ряд Неймана, преобразование Радона

**1. Введение.** Среди проблем вычислительной томографии важное значение имеют задачи подавления как случайного шума в измеренных проекциях, так и систематических ошибок и сбоев в работе детекторов [1–4]. Интегральное преобразование Радона функции  $g(x, y)$  обладает свойством совместности, которое накладывает определенные ограничения на измеренные в разных направлениях  $\xi$  проекции  $f(\xi, p)$  (в томографии эта функция называется синограммой). В строгой формулировке условия совместности выражают связь между одномерными моментами проекций и двумерными моментами изображения [5]. В условиях реальных экспериментальных измерений свойство совместности нарушается. Такое нарушение проявляется в большом значении нормы невязки, т.е. в существенном отклонении проекционных данных от псевдопроекции, полученных преобразованием Радона от восстановленной тем или иным алгоритмом томограммы. Учет условия совместности проекций позволяет получать более точное решение обратной задачи томографии [6–13].

Итерационные алгоритмы, учитывающие априорную информацию об искомом решении (положительность, пространственная ограниченность, гладкость), обычно позволяют минимизировать норму невязки, при этом ошибки измерений либо подавляются (сглаживанием или фильтрацией синограммы), либо их влияние на решение в какой-то степени подавляется на каждом итерационном шаге. В [14–17] предложен итерационный алгоритм, позволяющий не только итерационно очищать томограмму от влияния возмущений синограммы, но и выделять это возмущение в отдельное изображение. Такое отделение, в первую очередь, рассматривалось в этих работах лишь как метод улучшения реконструкции томограммы. В данной же работе исследуется качество выделения самого возмущения. Целью такого исследования является разработка нового метода стеганографии.

**2. Алгоритм отделения возмущения от проекционных данных.** Кратко изложим основы предложенного в [16] алгоритма. Пусть  $W$  — неизвестное возмущение в проекционных данных  $f$ , тогда разделение двух изображений (отдельно синограммы и ее возмущения) осуществляется следующим образом:

$$\begin{cases} f_W^n = (RR^{-1})(f - \alpha_n W^{n-1}), \\ W^n = f - \beta_n f_W^n. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $R$  и  $R^{-1}$  — прямое и обратное преобразования Радона;  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  — эмпирически подбираемые множители, влияющие на сходимость процесса;  $f_W^n$  — оценка очищенной от возмущения синограммы на итерации номер  $n$ ; и  $W^n$  — соответствующая оценка возмущения. Данный итерационный алгоритм содержит вычисление обратного оператора Радона  $R^{-1}$ , для чего применялся метод фильтрации и обратного проецирования (алгоритм ФОП) [18, 19] с фильтром Шеппа–Логана [20].

<sup>1</sup> Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; e-mail: pickalov@itam.nsc.ru

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр. акад. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; e-mail: dkazanc@ngs.ru

Первая итерация алгоритма отделения возмущения от проекционных данных может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} f_W^1 = R(R^{-1}f) = (RR^{-1})f, \\ W^1 = f - \beta_1 f_W^1. \end{cases}$$

Вторая итерация имеет вид

$$\begin{cases} f_W^2 = (RR^{-1})(f - \alpha_2 W^1), \\ W^2 = f - \beta_2 f_W^2 \end{cases}$$

и т.д. В процессе моделирования наложение возмущения  $W$  на фоновую синограмму  $f_W$  производилось по формуле

$$f(i) = f_W(i) + h_{\text{dist}} W(i) \max(f_W), \quad (2)$$

где  $h_{\text{dist}}$  — параметр, отвечающий за управление амплитудой налагаемого возмущения. В качестве нормы отклонения восстановленного фонового изображения  $f_W^{\text{rec}}$  от точного  $f_W^{\text{exa}}$  вычислялось следующее выражение:

$$\Delta_{f_W} = \sqrt{\frac{\sum_i (f_W^{\text{rec}}(i) - f_W^{\text{exa}}(i))^2}{\sum_i (f_W^{\text{exa}}(i))^2}} 100 (\%). \quad (3)$$

Подобное же выражение использовалось для оценки точности реконструкции возмущения  $W^{\text{rec}}$  с помощью нормы  $\Delta_W$ :

$$\Delta_W = \sqrt{\frac{\sum_i (W^{\text{rec}}(i) - W(i))^2}{\sum_i (W(i))^2}} 100 (\%). \quad (4)$$

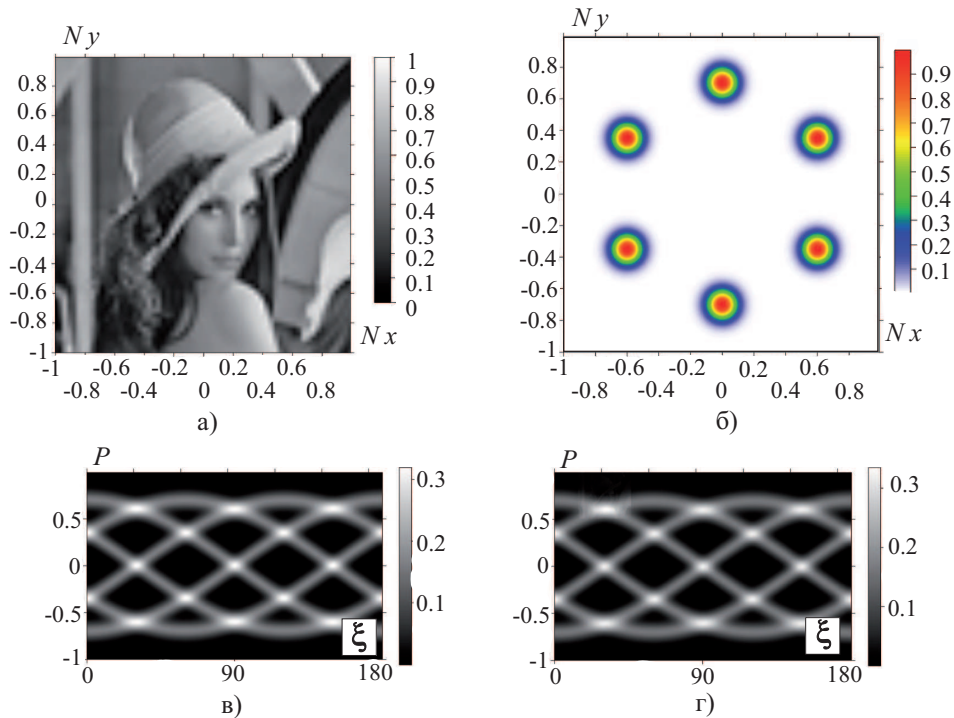


Рис. 1. а) Возмущение в виде изображения Lena размерностью  $N_x = N_y = 64$ ; б) модельная томограмма размерностью  $N_x = N_y = 256$ ; в) фоновая модельная синограмма размерностью  $N_p = 256$ ,  $K = 360$ ; г) сумма возмущения (Lena) и синограммы, вес возмущения  $h_{\text{dist}} = 0.1$

### 3. Вычислительный эксперимент по отделению возмущения от фонового изображения.

В данном разделе в численном эксперименте исследуется итерационный алгоритм (1) по разделению суммы двух изображений. Первое изображение представляет собой известное из теории сигналов изображение Lena, которое выступает в качестве возмущения  $W$  (рис. 1 а). Второе (фоновое) изображение  $f_W$  является синограммой (рис. 1 в) для произвольно выбранной модели № 217 пакета Tomas-Micro [4] (рис. 1 б). Возможность разделения двух изображений на отдельные компоненты связана с тем, что одно из этих изображений является синограммой (преобразованием Радона от некоторой двумерной томограммы), поэтому в итерациях алгоритма (1) удастся эту синограмму отделить, опираясь на условия совместности проекций.

Результат наложения возмущения на фоновое изображение показан на рис. 1 г (возмущение помещено в левый верхний угол). На этом рисунке размер возмущения небольшой, поскольку использованное изображение Lena имело размер  $64 \times 64$ . Модельная томограмма вычислялась внутри единичного круга, ее размерность —  $256 \times 256$ . Проекция вычислялись в диапазоне углов от 0 до  $\pi$  с изменением прицельного параметра в диапазоне  $[-1, 1]$ .

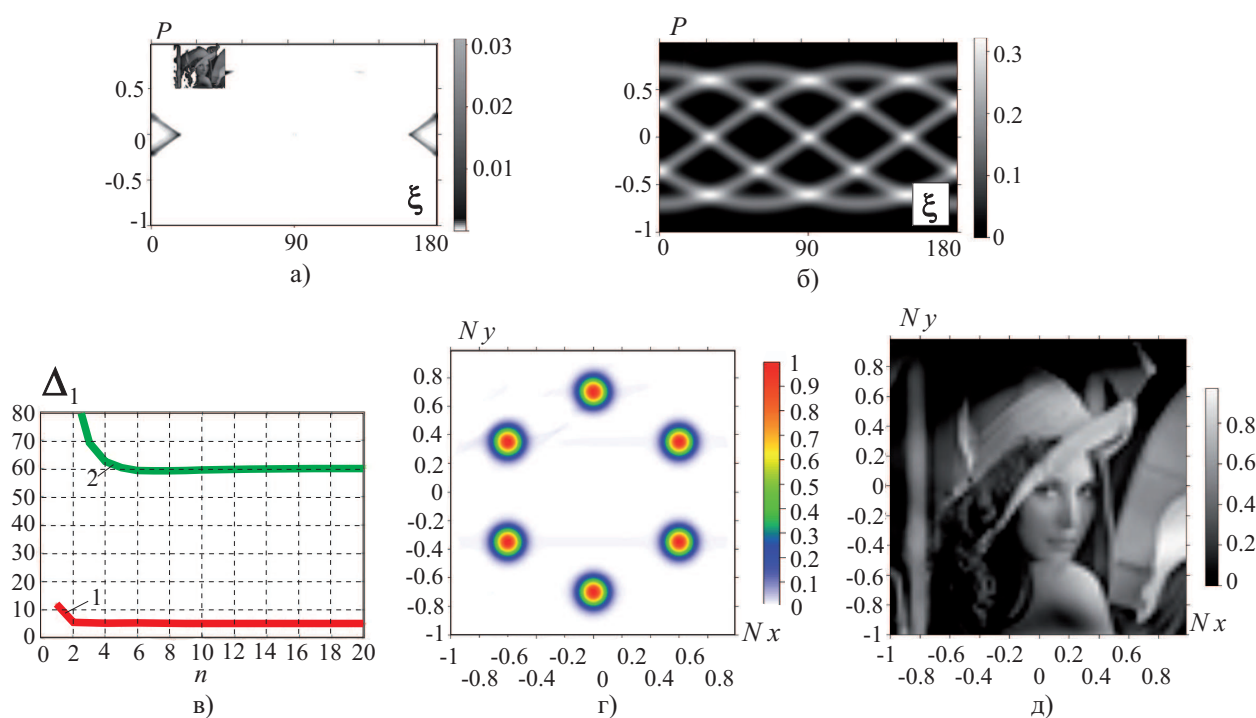


Рис. 2. а) Реконструкция возмущения  $W$ ; б) реконструкция фоновой синограммы  $f_W$ ; в) зависимость погрешности реконструкции (в %) от числа итераций для фона (1) и возмущения (2); г) реконструкция томограммы по восстановленной синограмме; д) выделенное с (а) возмущение размерностью  $N_x = N_y = 64$

Результаты отделения возмущения от фонового изображения за 20 итераций показаны на рис. 2. Отделение возмущения от фона произошло неплохо, поэтому оставшиеся от разделения артефакты на фоновом изображении обладают достаточно малой амплитудой. Зависимость погрешностей разделения  $\Delta_{f_W}$  и  $\Delta_W$  (в %) от номера итерации изображена на рис. 2 в. В этом эксперименте параметры итерационного процесса (1) следующие:  $\alpha = 1, \beta = 1$ . Координаты вставки возмущения (номера соответствующих индексов в матрице фонового изображения, в процессе реконструкции они полагались известными):  $x_0 = 30, y_0 = 1$ , амплитуда возмущения  $h_{\text{dist}} = 0.1$ . В алгоритм на каждой итерации вносится априорная информация в виде положительности возмущения и фонового изображения.

По качеству отделенного в итерациях изображения Lena (рис. 2 а) видно, что некоторые участки изображения не были отделены от фона (верхняя часть изображения). На восстановленном фоновом изображении (рис. 2 б) слабо видны те части возмущения, которые были не полностью отделены от фона в итерационном процессе. Зависимости ошибок  $\Delta_{f_W}$  и  $\Delta_W$  на рис. 2 в демонстрируют медленную сходимость и высокую итоговую погрешность реконструкции возмущения:  $\Delta_W = 61\%$ . Несмотря на столь значительную погрешность, изображение восстановленного возмущения, представленное отдельно на рис. 2 д, показывает, что его основная часть восстановилась неплохо, а погрешности накопились по периферии

изображения на областях с малой амплитудой, слабо отличающихся от окружающей возмущение синограммы. При этом качество восстановления синограммы достаточно высокое (кривая 1, рис. 2 в), что показывает и низкий уровень артефактов на восстановленной томограмме (рис. 2 г).

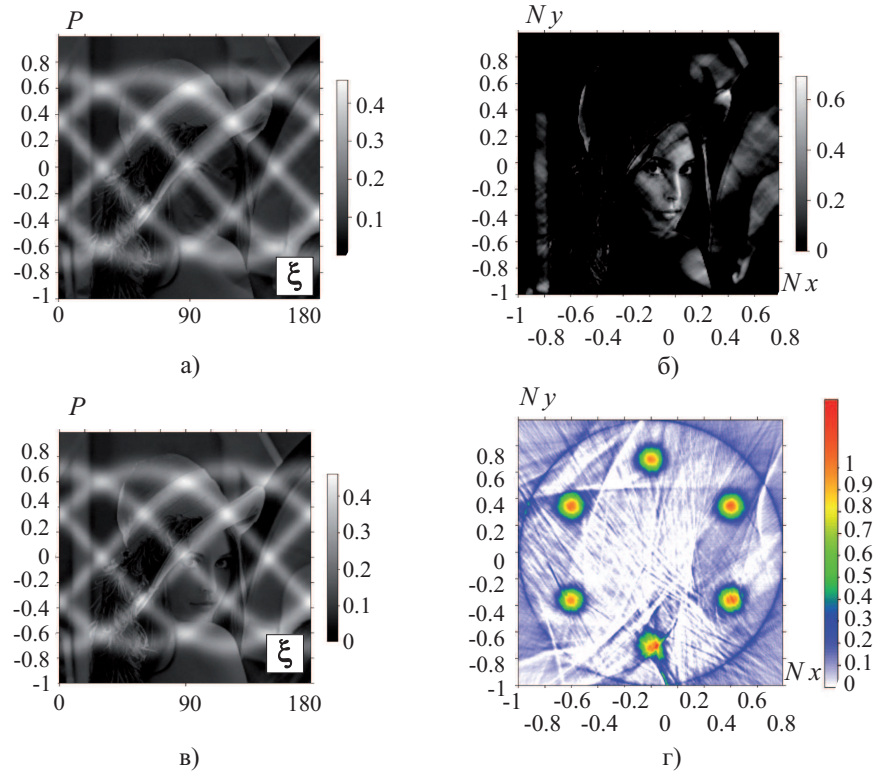


Рис. 3. а) Изображение с фоном и наложенным на него возмущением,  $N_p = 256$ ,  $K = 256$ ,  $h_{\text{dist}} = 0.5$ ; б) восстановленное возмущение,  $\Delta_W = 90\%$ ; в) восстановленный фон; г) восстановленная томограмма,  $N_x = N_y = 256$

Следующий эксперимент осуществлялся с целью проверить работу алгоритма разделения возмущения и фона при наиболее неблагоприятных условиях. А именно, рассмотрен случай, когда возмущение имеет такую же размерность, что и фоновое изображение, а амплитуда возмущения всего в два раза меньше максимума фона ( $h_{\text{dist}} = 0.5$ ). Таким образом, в этом эксперименте все проекционные данные содержат значительную систематическую ошибку. Размерность синограммы:  $N_p = 256$ ,  $K = 256$ ; накладываемое возмущение имело ту же размерность:  $N_x = N_y = 256$ . Сумма двух изображений приведена на рис. 3 а. Параметры итерационного процесса (1) заданы в виде  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ .

Разделение двух изображений с одинаковой размерностью произошло не качественно (рис. 3 б, в), о чем свидетельствует высокая итоговая погрешность возмущения  $\Delta_W = 90\%$  и сами разделенные изображения (на рис. 3 б у изображения Лена видна лишь центральная часть). Плохое качество разделения объясняется тем, что данное возмущение представляло собой слишком большую помеху, которая вносилась в каждый элемент проекционных данных. Результат реконструкции томограммы (рис. 3 г) также демонстрирует значительную величину артефактов.

Следующий эксперимент подтверждает гипотезу о том, что для более качественного отделения возмущения от фона необходимо, чтобы не все проекционные данные были испорчены налагаемым возмущением. Здесь смоделирован эксперимент, когда возмущение имеет немного меньший размер, чем фоновое изображение. В качестве фона была взята синограмма от той же модели № 217 с размерностью  $N_p = 256$  и большим числом проекций  $K = 360$ , а изображение Лена имело ту же размерность  $N_x = N_y = 256$ . Разделение двух изображений здесь оказалось более точным (рис. 4 б, в) по сравнению с предыдущим экспериментом, а итоговая погрешность возмущения, соответственно, оказалась меньше:  $\Delta_W = 52\%$ . Следует отметить тот факт, что в центре рис. 4 б изображение отделено более точно, чем на его краях (полностью лицо и часть шляпы). Таким образом, улучшение результата разделения связано с тем, что не все проекционные данные содержали систематическую ошибку.

После рассмотрения выполненной серии численных экспериментов с разделением возмущения и фо-

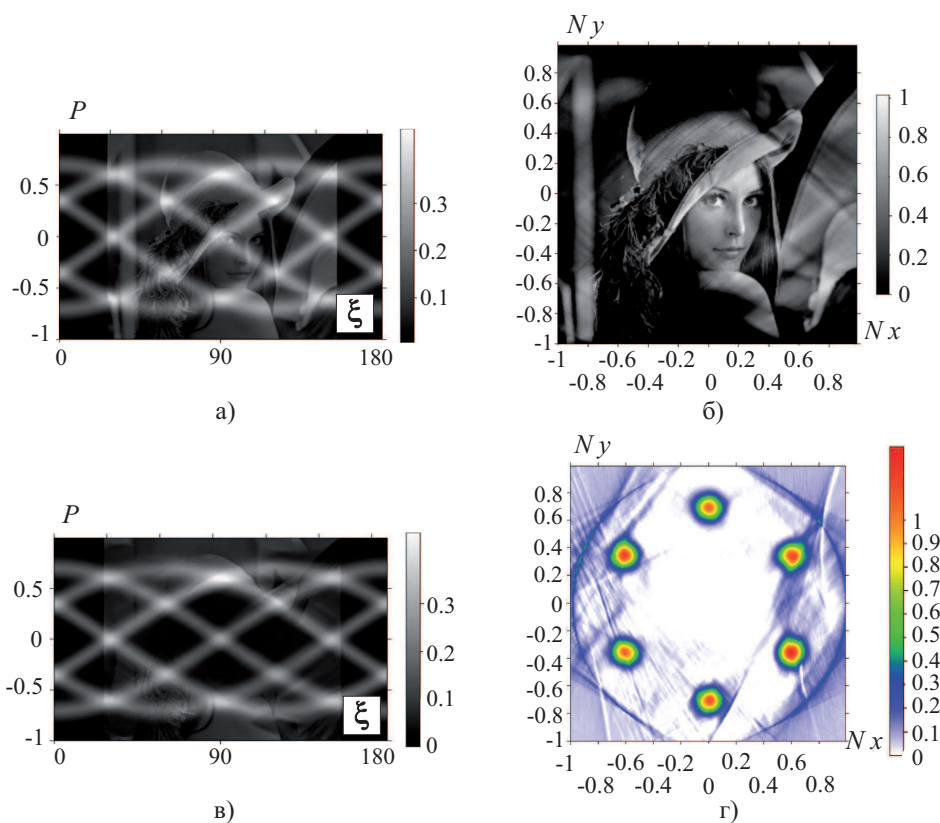


Рис. 4. а) Изображение с фоном и наложенным на него возмущением,  $N_p = 256$ ,  $K = 360$ ,  $h_{\text{dist}} = 0.5$ ; б) восстановленное возмущение,  $\Delta_W = 52\%$ ; в) восстановленный фон; г) восстановленная томограмма,  $N_x = N_y = 256$

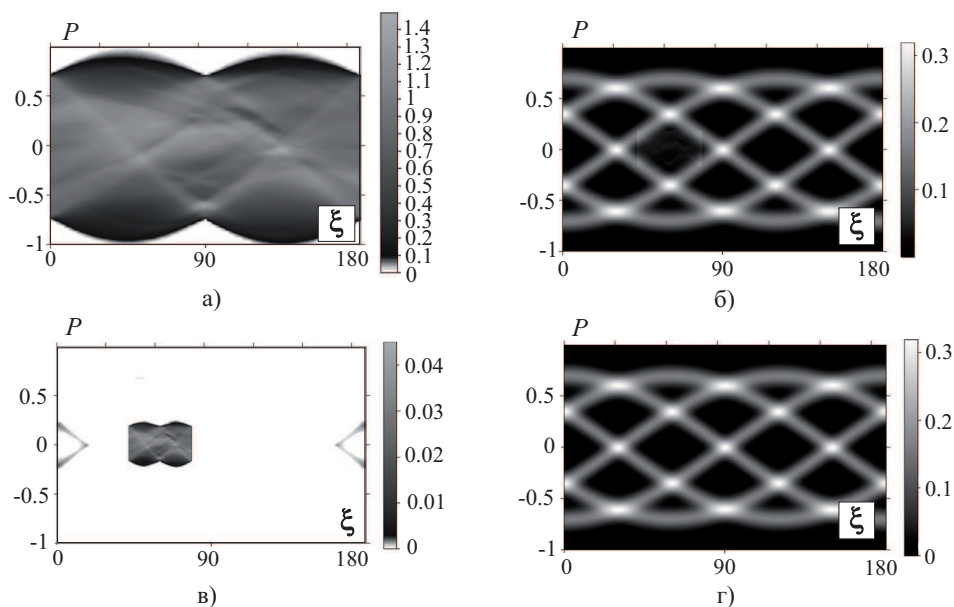


Рис. 5. а) Возмущение в виде синограммы от изображения Lena,  $N_p = 64$ ,  $K = 72$ ; б) суммарное изображение: фон + возмущение,  $N_p = 256$ ,  $K = 360$ ,  $h_{\text{dist}} = 0.1$ ; в) восстановленное возмущение,  $\Delta_W = 11\%$ ; г) восстановленный фон

нового изображения перейдем к задаче стеганографии.

**4. Решение задачи стеганографии с помощью итерационного отделения возмущения от синограммы.** Задача стеганографии ставит перед собой цель скрытия информации в изображении, в том

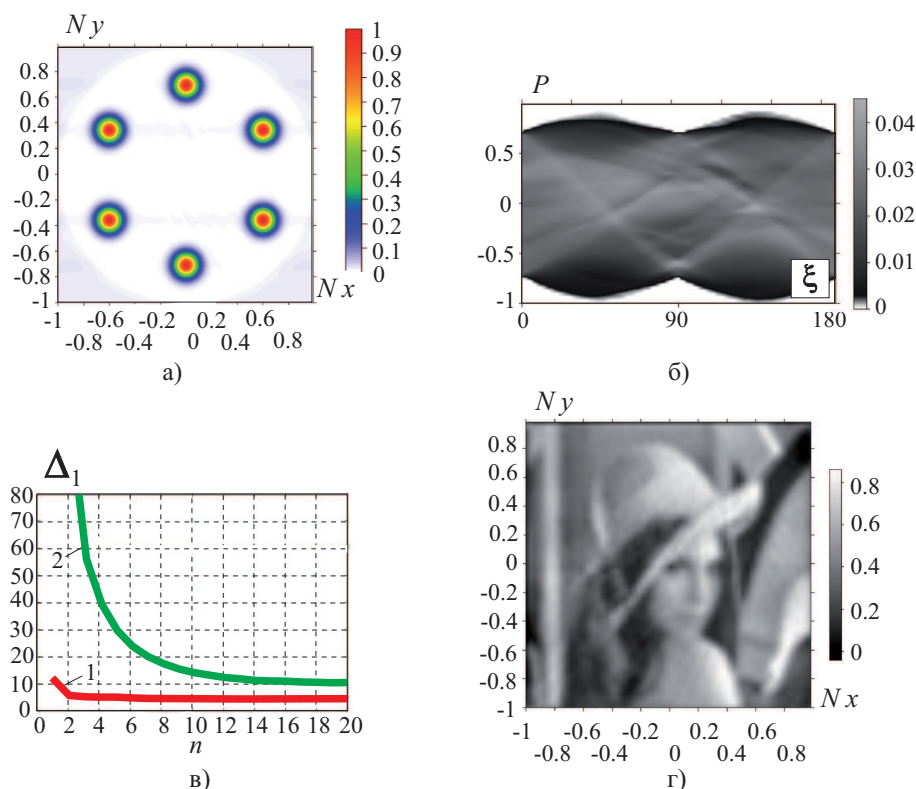


Рис. 6. а) Восстановленная томограмма модели; б) восстановленное возмущение, вырезанное из рис. 5 в; в) зависимость от числа итераций погрешности реконструкции фона (1) и возмущения (2); г) результат обратного преобразования Радона от восстановленного возмущения,  $N_x = N_y = 64$

числе одного изображения в другом [21 – 24]. В настоящей статье рассматривается возможность скрытия изображения в пространстве Радона. Скрываемое изображение является возмущением, наложенным на проекционные данные (синограмму). При расшифровке ставится задача разделения двух изображений: возмущения и фонового изображения, под которым здесь понимается синограмма какой-либо произвольной томограммы.

Далее описаны численные эксперименты, в которых накладываемое возмущение является синограммой от скрываемого изображения Lena. В первом эксперименте (рис. 5 а) выбраны следующие размерности: для скрываемой синограммы  $N_p = 64$ ,  $K = 72$  (угловой интервал от 0 до  $\pi$ ), для реально скрываемого изображения Lena (рис. 1 а)  $N_x = N_y = 64$ . Координаты вставки возмущения  $x_0 = 85$ ,  $y_0 = 95$ , амплитуда возмущения  $h_{\text{dist}} = 0.1$ .

Таким образом, возмущение теперь располагается ближе к центру фонового изображения (размерность фоновой синограммы выбрана  $N_p = 256$ ,  $K = 360$ , угловой диапазон — от 0 до  $\pi$ ). Параметры итерационного процесса (1) использовались те же:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ . Результаты реконструкции показали, что геометрия расположения возмущения на фоновой синограмме влияет на сходимость итерационного процесса и на итоговые погрешности реконструкции. Если возмущение расположено ближе к центру фонового изображения, как в рассматриваемом эксперименте, то возрастает точность разделения двух изображений (рис. 6). Итоговая погрешность восстановленного возмущения  $\Delta_W = 10\%$ , что значительно меньше, чем в экспериментах, где возмущение располагалось в углу или покрывало собой всю фоновую синограмму.

Однако восстановленное скрытое изображение Lena (рис. 6 г), в силу своей малой размерности, имеет размытую структуру и слабую контрастность. Для улучшения качества реконструкции был проделан следующий эксперимент.

Расположим скрываемое возмущение в центре фонового изображения ( $x_0 = 90$ ,  $y_0 = 60$ ) и увеличим его размерность до  $N_p = 128$ ,  $K = 180$ . Фоновое изображение при этом оставлено с размерностями  $N_p = 256$ ,  $K = 360$ . Амплитуда добавляемого возмущения  $h_{\text{dist}} = 0.1$ . Теперь возмущение находится в центре фонового изображения. Разделение двух изображений дало улучшенный результат: восстановленное возмущение в виде изображения Lena (рис. 7 е) является более качественным ( $\Delta_W = 28\%$ , рис. 8)

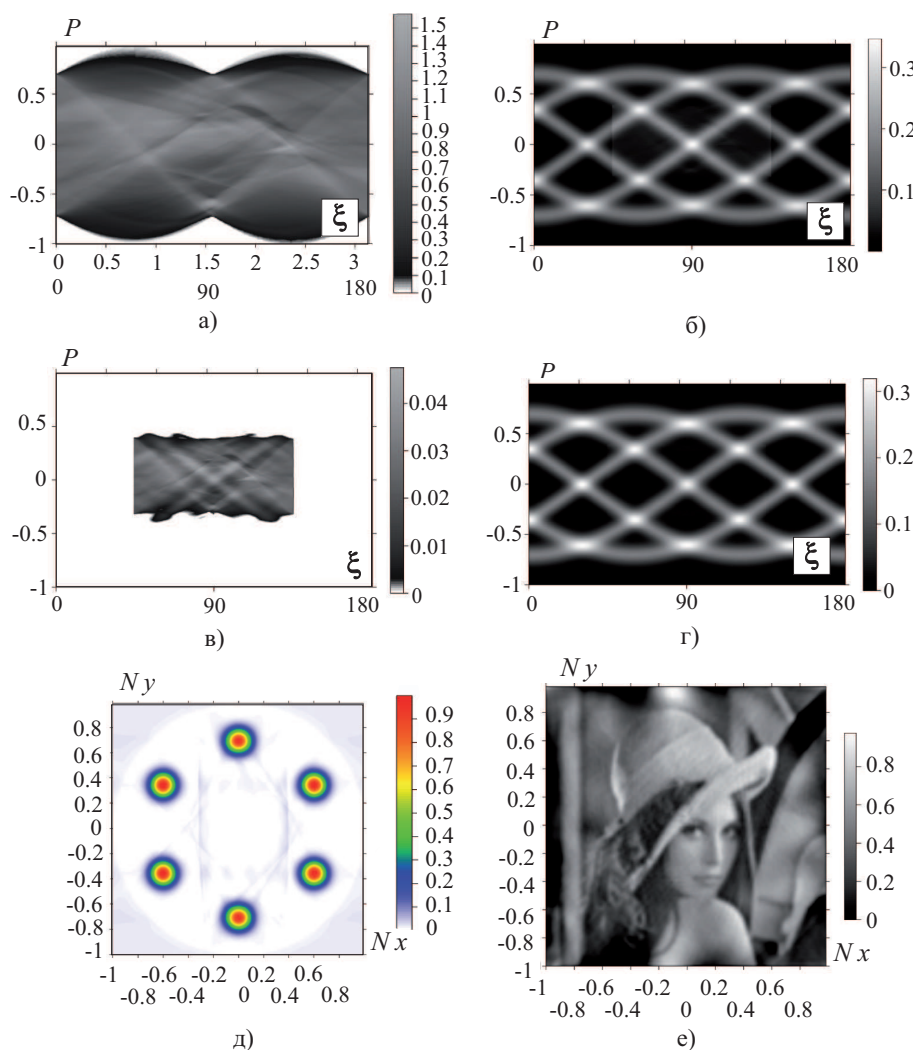


Рис. 7. а) Возмущение в виде синогаммы от изображения Lena,  $N_p = 128$ ,  $K = 180$ ; б) суммарное изображение,  $h_{\text{dist}} = 0.1$ ; в) восстановленное возмущение; г) восстановленный фон; д) восстановленная томограмма; е) результат обратного преобразования Радона от синогаммы, вырезанной из восстановленного возмущения (в),  $N_x = N_y = 128$

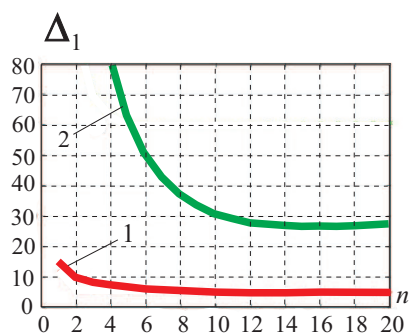


Рис. 8. Зависимость погрешности реконструкции от числа итераций для фона (1) и (2) возмущения при отделении возмущения с размерностью  $N_p = 128$ ,  $K = 180$

и обладает лучшей четкостью из-за увеличения размерности. Восстановленная томограмма на рис. 7 д также свидетельствует о качественном разделении с низким уровнем амплитуды артефактов.

Эксперимент по изучению влияния амплитуды возмущения на характер разделения двух изображений показан на рис. 9. Синогамма от скрываемого изображения также расположена в центре фонового изображения ( $x_0 = 90, y_0 = 60$ ), ее размерности  $N_p = 128, K = 180$ . Фоновое изображение оставлено с

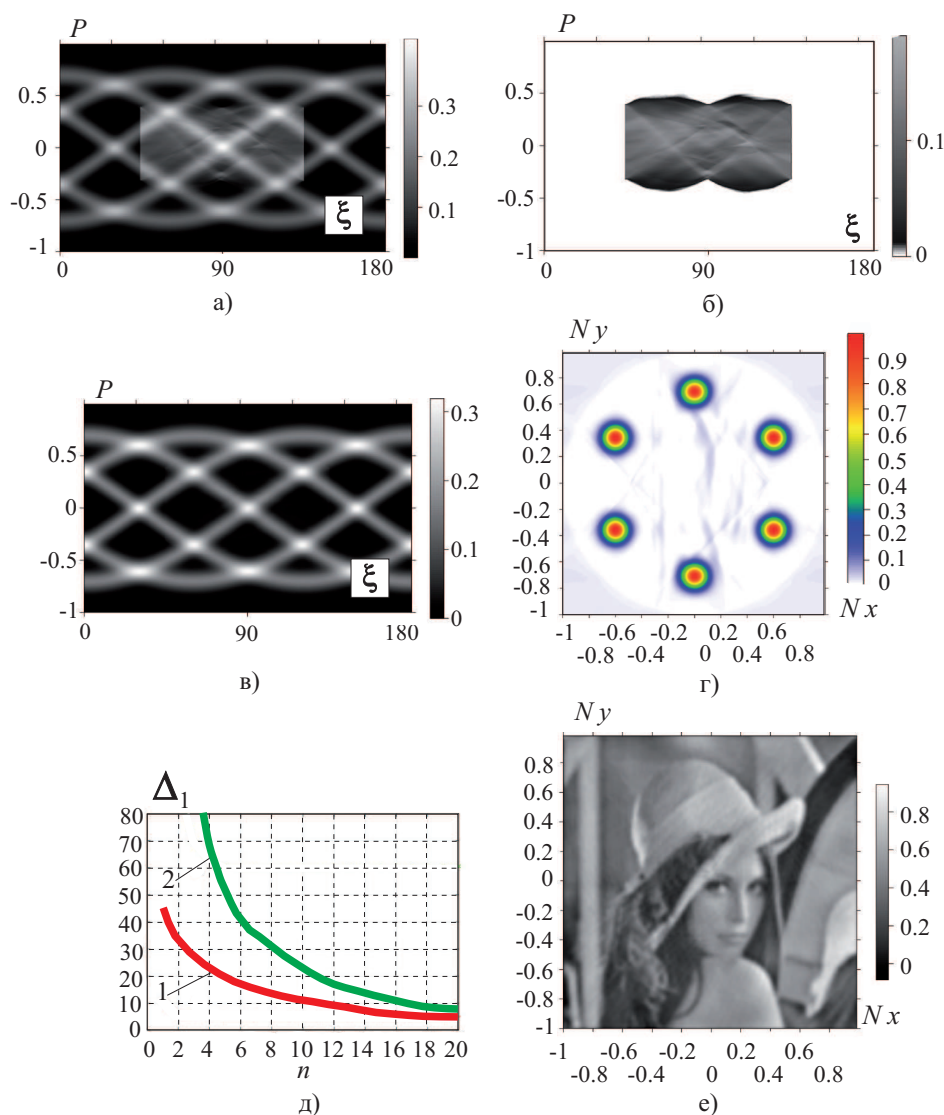


Рис. 9. а) Изображение с фоном в виде синограммы от модели и наложенным на него возмущением (синограммы от изображения Lena)  $N_p = 128$ ,  $K = 180$ ,  $h_{\text{dist}} = 0.4$ ; б) восстановленное возмущение; в) восстановленный фон; г) восстановленная томограмма; д) зависимость погрешностей реконструкции от числа итераций для фона (1) и возмущения (2); е) результат обратного преобразования Радона от синограммы, вырезанной из восстановленного возмущения (б),  $N_x = N_y = 128$

прежними размерностями  $N_p = 256$ ,  $K = 360$ . Амплитуда возмущения была увеличена до  $h_{\text{dist}} = 0.4$ , возмущение находится в центре фонового изображения. Параметры итерационного процесса (1):  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ . Разделение двух изображений дало более точный результат, чем эксперимент с  $h_{\text{dist}} = 0.1$ . Восстановленное скрытое изображение Lena (рис. 9 е) является наиболее качественным и не обладает артефактами по краям изображения, которые были на рис. 7 е. Достаточно точно восстановлена и томограмма (рис. 9 г), а итоговая погрешность реконструкции возмущения составила  $\Delta_W = 9\%$ , что существенно меньше погрешности предыдущего эксперимента.

**5. Заключение.** На основе анализа полученных результатов можно сделать вывод о том, что разделение двух изображений в пространстве Радона может быть выполнено наилучшим образом с помощью алгоритма (1), если выполнены следующие условия:

- 1) возмущение в виде синограммы для скрываемого изображения должно иметь меньшую размерность, чем фоновое изображение: необходимо, чтобы не все фоновые проекции были испорчены налагаемым возмущением (систематической ошибкой);
- 2) возмущение располагается в центре фонового изображения;
- 3) амплитуда возмущения составляет не менее 10–20% от максимума фонового изображения.



Соблюдая перечисленные условия, можно решать разнообразные задачи стеганографии предложенным итерационным методом. В настоящей статье было рассмотрено скрывание изображения в виде преобразования Радона от него, однако существует большое количество методов, позволяющих “спрятать” изображение. Например, одним из способов может служить скрывание изображения на нескольких масштабах вэйвлет-преобразования фоновой синограммы, при этом номера масштабов служат дополнительными управляющими параметрами процессов кодирования и декодирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
2. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Вычислительная томография и физический эксперимент // Успехи физических наук. 1983. **141**, № 3. 469–498.
3. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987.
4. Пикалов В.В., Мельникова Т.С. Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995.
5. Хаммерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
6. Smith P.R., Peters T.M., Bates R.H.T. Image reconstruction from finite numbers of projections // J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. 1973. **6**, N 3. 361–382.
7. Louis A.K., Rieder A. Incomplete data problems in X-ray computerized tomography II. Truncated projections and region-of-interest tomography // Numerische Mathematik. 1989. **56**, N 4. 371–383.
8. Glover G.H., Noll D.C. Consistent projection reconstruction (CPR) techniques for MRI // Magn. Reson. Med. 1993. **29**, N 3. 345–351.
9. Milanfar P., Karl W.C., Willsky A.S. A moment-based variational approach to tomographic reconstruction // IEEE Trans. Image Process. 1996. **5**, N 3. 459–470.
10. Ingesson L.C., Pickalov V.V. An iterative projection-space reconstruction algorithm for tomography systems with irregular coverage // J. Phys. D: Appl. Phys. 1996. **29**, N 12. 3009–3016.
11. Welch A., Hallett W., Marsden P., Bromiley A. Accurate attenuation correction in PET using short transmission scans and consistency information // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2003. **50**, N 3. 427–432.
12. Chen G.-H., Leng S. A new data consistency condition for fan-beam projection data // Medical Physics. 2005. **32**, N 4. 961–967.
13. Yu H., Wang G. Data consistency based rigid motion artifact reduction in fan-beam CT // IEEE Trans. Med. Imag. 2007. **26**, N 2. 249–260.
14. Лихачев А.В., Пикалов В.В. Трехмерная эмиссионная томография оптически плотной плазмы при известном поглощении // Опт. спектр. 2000. **88**, № 5. 740–749.
15. Лихачев А.В., Пикалов В.В. Трехмерная эмиссионная томография рассеивающей плазмы // Опт. спектр. 2002. **92**, № 6. 988–999.
16. Лихачев А.В., Пикалов В.В. Новый метод определения неизвестного аддитивного фона в проекционных данных в задаче трехмерной томографии // Журн. выч. матем. и матем. физики. 2002. **42**, № 3. 85–97.
17. Pickalov V.V., Likhachov A.V. Iteration algorithm to correct absorption in PET // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2001. **48**, N 1. Part I. 82–88.
18. Kak A.C., Slaney M. Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988.
19. Пикалов В.В., Непомнящий А.В. Итерационный алгоритм с вэйвлет-фильтрацией в задаче двумерной томографии // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 2. 75–84.
20. Shepp L.A., Logan B.F. The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. **21**, N 3. 21–43.
21. Грибунин В.Г., Оков И.Н., Туринцев И.В. Цифровая стеганография. М.: СОЛОН-Пресс, 2002.
22. Конахович Г.Ф., Пузыренко А.Ю. Компьютерная стеганография. Теория и практика. Киев: МК-Пресс, 2006.
23. Wu M.-Y., Ho Y.-K., Lee J.-H. An iterative method of palette-based image steganography // Pattern Recognition Letters. 2004. **25**, N 3. 301–309.
24. Zhang T., Ping X. A new approach to reliable detection of LSB steganography in natural images // Signal Processing. 2003. **83**, N 10. 2085–2093.

Поступила в редакцию  
02.12.2007