

УДК 519.633.6

## О МОДЕЛИРОВАНИИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕ

Л. М. Горбунов<sup>1</sup>, А. А. Фролов<sup>2</sup>, Е. В. Чижонков<sup>3</sup>

С целью исследования нерелятивистских цилиндрических плазменных колебаний сформулирована начально-краевая задача для системы нелинейных уравнений в частных производных. Построены ее приближенные решения на основе численного метода конечных разностей и численно-аналитического метода возмущений. Установлено, что процессы разрушения плазменных колебаний и плазменных кильватерных волн имеют качественное сходство. Для момента времени разрушения колебаний получены асимптотические оценки снизу и сверху, согласующиеся с известными результатами.

**Ключевые слова:** плазменные колебания, кильватерные волны, метод конечных разностей, метод возмущений, уравнения в частных производных.

**1. Введение.** Исследование нелинейных электронных колебаний в плазме имеет продолжительную историю. Наиболее известными на эту тему являются работы [1, 2], в которых в качестве основного объекта изучалась функция плотности электронов. В первой из них на основании одномерных гидродинамических уравнений строилось решение типа бегущей волны. Было показано, что такое решение в плоском случае существует неограниченно долго, если амплитуда колебаний не превышает критической величины. При увеличении амплитуды значения электронной плотности становятся бесконечно большими, т.е. происходит так называемое опрокидывание. Альтернативной возможностью разрушения решения является обращение электронной плотности в нуль, что обычно называют кавитацией. В обоих случаях это означает нарушение корректности гидродинамического описания плазмы. Принципиально другой (но также одномерный по происхождению) механизм разрушения регулярных плазменных колебаний рассматривался в [2]. Было показано, что в цилиндрическом или сферическом случаях со временем разрушаются колебания даже со сколь угодно малой амплитудой, а также предложена формула для оценки величины этого момента времени на основе критерия пересечения электронных траекторий. Оба подхода длительное время гармонично сосуществуют, так как взаимно дополняют и обогащают друг друга. Отметим, что исследования плазменных колебаний могут иметь важные приложения, такие, например, как проблема плазменного резонанса [3].

В данном случае интерес к моделированию цилиндрических электронных колебаний в плазме вызван следующим. При распространении в плазме ультракороткий мощный лазерный импульс возбуждает позади себя так называемые кильватерные волны — двухмерные возмущения (волны) функции плотности электронов. По мере удаления от импульса кильватерные волны изменяют свою форму (выгибаются в направлении распространения) и на некотором расстоянии разрушаются. Сам процесс разрушения в трехмерном аксиально симметричном сильно нелинейном случае носит сложный характер и не имеет пространственно одномерных аналогий. Результаты численного моделирования [4] наглядно иллюстрируют это. Поэтому представляется разумным детально рассмотреть более простую задачу о плазменных колебаниях с начальным возмущением, близким к порождаемому лазерным импульсом. В настоящей работе для ее изучения применены конечно-разностный численный метод и численно-аналитический метод возмущений (последний — для малых амплитуд колебаний). Установлено, что разрушение колебаний имеет качественное сходство с разрушением кильватерных волн. В первую очередь это касается возникновения внеосевого максимума электронной плотности, предшествующего разрушению решения в сильно нелинейном случае. Кроме того, на основе численного эксперимента была уточнена константа из работы [2] в асимптотическом выражении для момента времени разрушения.

<sup>1</sup> Физический институт РАН им. П. Н. Лебедева, Ленинский просп., 53, 119991, Москва; e-mail: gorbun@sci.lebedev.ru

<sup>2</sup> Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., 13/19, 125412, Москва; e-mail: frolov@ihed.ras.ru

<sup>3</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: chizhonk@mech.math.msu.ru

Статья организована следующим образом. Сначала формулируется начально-краевая задача, описывающая нерелятивистские цилиндрические плазменные колебания. Далее приводится вычислительная схема на основе метода конечных разностей и сравниваются результаты расчетов для процессов разрушения электронных колебаний и кильватерных волн в сильно нелинейном режиме. Затем исходная задача в случае колебаний малой амплитуды решается аналитически методом возмущений и полученная для электронной плотности формула изучается численно. Эти данные сравниваются с расчетами по разностной схеме на небольших временах и анализируются в асимптотической перспективе. В заключении систематизируются выводы проведенных исследований.

Отметим, что учет релятивистских эффектов приводит к существенному усложнению задачи и не дает возможности сопоставления с известными результатами. Моделированию такого случая предполагается посвятить отдельную публикацию.

**2. Постановка задачи.** Система гидродинамических уравнений для холодной идеальной релятивистской электронной жидкости совместно с уравнениями Максвелла имеет вид (см., например, [5, 6]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \mathbf{v}) &= 0, & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} &= e \mathbf{E} - m c^2 \nabla \gamma, & \gamma &= \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2} + \frac{|a|^2}{2}}, \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p}}{m \gamma}, & \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -4 \pi e n \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \mathbf{B}, & \mathbf{B} &= -\frac{c}{e} \operatorname{rot} \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона,  $c$  — скорость света,  $n$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{v}$  — концентрация, удельный импульс и скорость электронов,  $\gamma$  — лоренцевский фактор,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $a$  — безразмерная амплитуда лазерного поля (так называемая огибающая).

Система (1) является базовой для моделирования лазерно-плазменных взаимодействий в рамках гидродинамического приближения. Конкретные постановки задач, как правило, следуют из различных физических предположений, упрощающих (1). В частности, для нас представляют интерес аксиально симметричные колебания электронов, возбуждаемые остророфокусированным лазерным импульсом. В этом случае в плазме происходят преимущественно радиальные движения, поэтому справедливы следующие допущения:

- решение определяется только радиальными компонентами  $p_r$ ,  $v_r$ ,  $E_r$ ,
- зависимость от переменной  $z$  отсутствует.

При таких предположениях из (1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r) &= 0, & \frac{\partial p_r}{\partial t} &= e E_r - m c^2 \frac{\partial \gamma}{\partial r}, \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{p_r^2}{m^2 c^2} + \frac{|a|^2}{2}}, & v_r &= \frac{p_r}{m \gamma}, & \frac{\partial E_r}{\partial t} &= -4 \pi e n v_r. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем безразмерные величины  $\rho = k_p r$ ,  $\theta = \omega_p t$ ,  $V = \frac{v_r}{c}$ ,  $p = \frac{p_r}{m c}$ ,  $E = -\frac{e E_r}{m c \omega_p}$  и  $N = \frac{n}{n_0}$ , где  $\omega_p = \left( \frac{4 \pi e^2 n_0}{m} \right)^{1/2}$  — плазменная частота,  $n_0$  — значение невозмущенной электронной плотности и  $k_p = \frac{\omega_p}{c}$ . В новых переменных система (2) принимает вид

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho N V) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} + E + \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = 0, \quad \gamma = \sqrt{1 + p^2 + \frac{|a|^2}{2}}, \quad V = \frac{p}{\gamma}, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = N V. \quad (3)$$

Из первого и последнего уравнений (3) следует, что  $\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ N + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E) \right] = 0$ . Это соотношение справедливо как при отсутствии плазменных возмущений ( $N \equiv 1$ ,  $E \equiv 0$ ), так и при наличии лазерного импульса. Поэтому отсюда имеем более простое выражение для электронной плотности:

$$N = 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E). \quad (4)$$

Рассмотрим свободные колебания в нерелятивистском случае  $p \approx V$ ,  $\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right|_{a=0} \approx V \frac{\partial V}{\partial \rho}$ , которые описываются системой уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V \left[ 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E) \right] = 0 \quad (5)$$

и иницируются в некоторый момент времени (положим для удобства  $\theta = 0$ ) начальными данными

$$V = 0, \quad E = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp^2 \left\{ -\frac{\rho^2}{\rho_*^2} \right\}. \quad (6)$$

Требуется добавить краевые условия для однозначного определения искомых функций в области  $\Omega = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}\}$ . На оси (при  $\rho = 0$ ) в силу аксиальной симметрии задачи имеем

$$V(0, \theta) = E(0, \theta) = 0. \quad (7)$$

Кроме того, физическая постановка предусматривает, что поперечное сечение импульса существенно меньше поперечного размера области, занятой плазмой, т.е.  $\exp(-\rho_{\max}^2/\rho_*^2) \ll 1$ , поэтому при достаточно большом значении  $\rho_{\max}$  с хорошей точностью справедливы равенства

$$V(\rho_{\max}, \theta) = E(\rho_{\max}, \theta) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, без учета релятивистских эффектов задача о плазменных колебаниях формулируется так: найти в области  $\Omega$  функции  $V$  и  $E$ , удовлетворяющие уравнениям (5), начальным данным (6) и краевым условиям (7), (8). Отметим, что наиболее важным объектом исследования является функция электронной плотности, определяемая формулой (4).

**2. Метод конечных разностей.** Введем в области  $\Omega$  равномерную сетку с шагами  $h$  и  $\tau$  так, что  $\rho_m = mh$ ,  $0 \leq m \leq M$ ,  $Mh = \rho_{\max}$  и  $\theta_k = k\tau$ ,  $0 \leq k \leq K$ ,  $K\tau = \theta_{\max}$ . Запишем дискретный аналог уравнений (5). Используя для сеточных функций обозначения  $f_m^k = f(\rho_m, \theta_k)$ , получим разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{v_m^{k+1} - v_m^k}{\tau} + E_m^k + \frac{v_{m+1}^k + v_{m-1}^k}{2} \frac{v_{m+1}^k - v_{m-1}^k}{2h} &= 0, \quad 1 \leq m \leq M-1, \\ v_0^{k+1} = v_M^{k+1} = 0, \quad E_0^{k+1} = E_M^{k+1} = 0, \\ \frac{E_m^{k+1} - E_m^k}{\tau} - v_m^{k+1} \left[ 1 - \frac{1}{\rho_m} \frac{\rho_{m+1} E_{m+1}^{k+1} - \rho_{m-1} E_{m-1}^{k+1}}{2h} \right] &= 0, \quad 1 \leq m \leq M-1, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k \geq 0$ . Разностные начальные условия определяются естественным образом как проекции соотношений (6) на сетку.

Исходные уравнения имеют нелинейные слагаемые, однако выбранная схема является безытерационной: скорость  $V$  вычисляется по явной формуле, а электрическое поле  $E$  требует применения метода прогонки [7]. Любопытными являются свойства аппроксимации и устойчивости. В нелинейном случае для гладких решений рассматриваемая схема имеет порядок аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ , а принцип замороженных коэффициентов [8] приводит к условию устойчивости  $\tau = O(h^2)$ . Для линеаризованной задачи порядок аппроксимации по времени повышается до второго, и схема становится безусловно устойчивой.

Сеточный аналог электронной плотности  $N$  вычисляется следующим образом:

$$N_m^k = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\rho_m} \frac{\rho_{m+1} E_{m+1}^k - \rho_{m-1} E_{m-1}^k}{2h} & \text{при } 1 \leq m \leq M-1, \\ 1 - 2 \frac{E_1^k}{h} & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m = M. \end{cases}$$

Рассмотрим типичный расчетный вариант по схеме (9): ему соответствуют изображения на рис. 1 и 2 функции электронной плотности  $N(\rho, \theta)$  в подобласти  $0 \leq \rho \leq 0.1$ ,  $0 \leq \theta \leq 35$ . Остальные параметры варианта определены так:  $a_* = 0.365$ ,  $\rho_* = 0.6$ ,  $\rho_{\max} = 2.7$ ,  $h = 1/1600$ ,  $\tau = 1/32000$ . При увеличении  $h$  в два раза и  $\tau$  в четыре раза изменения в численных значениях осевых максимумов не превышают пяти процентов.

На рисунках отчетливо виден весь процесс изменения формы колебаний. Весьма удачной представляется здесь аналогия с горным рельефом, когда пик находится на хребте. Расположенные на оси  $\rho = 0$  пикообразные возмущения плотности вместе с "хребтом" сначала просто поворачиваются против часовой стрелки (если смотреть в направлении их распространения), а затем к повороту добавляется выгибание

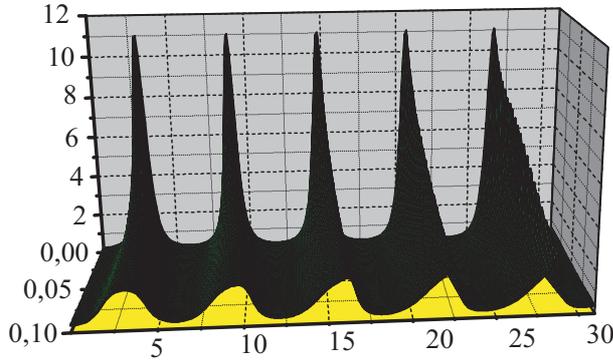


Рис. 1

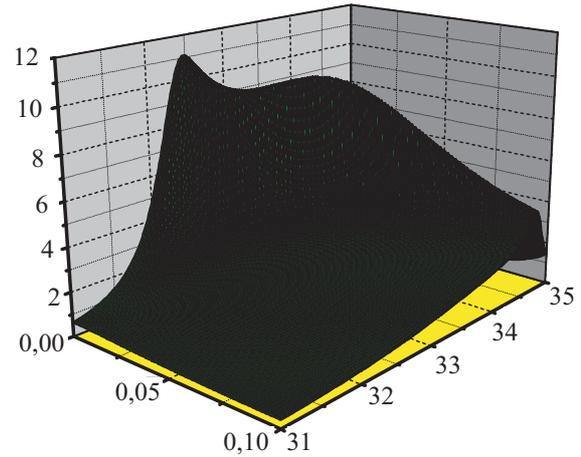


Рис. 2

“хребтов” в окрестности регулярных максимумов. Этому этапу соответствует рис. 1. Наконец, у электронной плотности появляется внеосевой максимум, сравнимый по абсолютной величине с осевыми. Здесь угол разворота и величина изгиба настолько велики, что на общем плане возмущений описываемый эффект отразить затруднительно (требуется более высокий уровень разрешения). Поэтому “хребет” с двумя максимумами вынесен отдельно на рис. 2, причем для наглядности несколько изменен угол наблюдения.

Этот момент является принципиальным: дальнейшее продолжение счета по времени, как правило, не приводит к успеху даже ценой многократного дробления шагов сетки. От периода к периоду гладкость функции  $N(\rho, \theta)$  ухудшается столь значительно, что в лучшем случае удается продвинуться вперед на один или два периода. Напомним, что уменьшение вдвое шага сетки по радиусу приводит на практике к увеличению времени счета примерно в десять раз на том же расчетном интервале. Поэтому утилизация вычислительных ресурсов такого рода представляется неоправданной.

Остановка вычислений происходит из-за появления отрицательных значений плотности, что сопровождается быстрым разрушением регулярной структуры функций скорости  $V$  и электрического поля  $E$ . Такое поведение присуще, в первую очередь, развитой нелинейности. Например, если уменьшать параметр  $a_*$  (при фиксированных остальных), то временные интервалы как до появления первого внеосевого максимума, так и последующего разрушения решения резко увеличиваются.

Рассмотренный процесс имеет ярко выраженный аналог в поведении кильватерных волн, возбуждаемых в плазме ультракоротким мощным лазерным импульсом. Динамика кильватерной волны моделируется другой системой уравнений (детали ее вывода из (1) имеются в [9]):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial p}{\partial \eta} = \Delta \gamma - \varphi \gamma + 1,$$

$$p \varphi + \frac{\partial \beta}{\partial \rho} = 0, \quad \varphi \psi - \Delta \psi + 1 = 0, \quad \gamma \psi + \frac{1}{2} \left[ \psi^2 + p^2 + 1 + \frac{|a|^2}{2} \right] = 0.$$

Здесь искомыми являются функции  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\psi = \frac{p_z}{mc} - \gamma$ ,  $\varphi = \frac{N}{\gamma}$  и  $p = \frac{p_r}{mc}$ , а обозначение  $\Delta$  используется для радиальной части оператора Лапласа в цилиндрических координатах. В этой постановке система координат связана с импульсом: продольная переменная не совпадает со временем, а определена как  $\eta = k_p(z - ct)$ . Инициализация процесса происходит возмущением однородной плазмы лазерным импульсом, имеющим локальную по обоим независимым переменным форму  $a = a_0 \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{\rho_*^2} - \frac{\eta^2}{l_*^2} \right\}$ .

Численный анализ разрушения плазменных кильватерных волн на основе двух принципиально различных подходов проводился в [4]: алгоритм расчета на основе метода конечных разностей проявил себя более эффективным по сравнению с проекционным алгоритмом. На рис. 3 и 4 приведено изменение формы электронной плотности, рассчитанное по схеме метода конечных разностей. Параметры задачи и шаги сетки выбирались максимально близкими для корректного сопоставления с приведенным выше экспериментом:  $a_0 = 0.360$ ,  $\rho_* = 0.6$ ,  $\rho_{\max} = 2.7$ ,  $l_* = 3.5$ ,  $h = 1/800$ ,  $\tau = 1/8000$ . Электронная плотность изменяется по такому же качественному сценарию, но чуть более плавно. На рис. 3 видно, что осевые

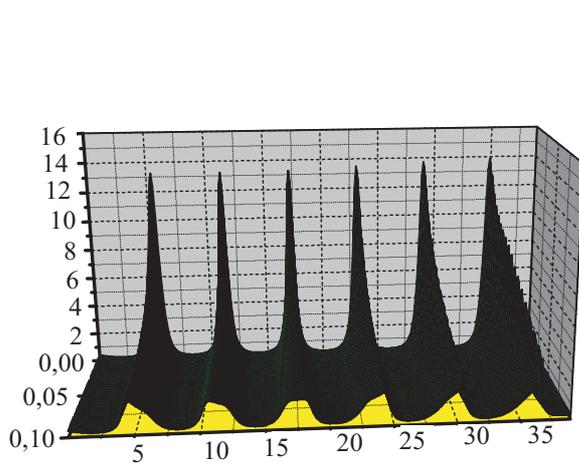


Рис. 3

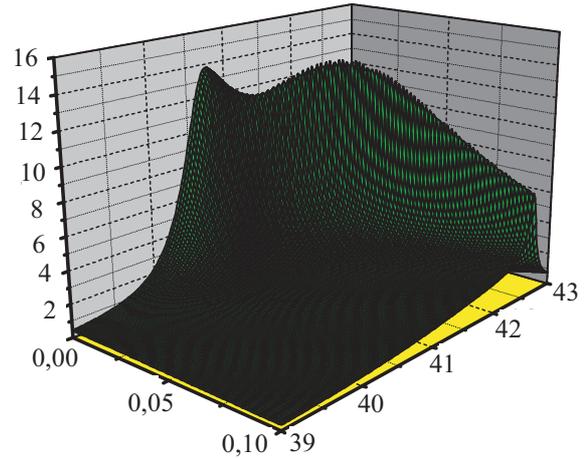


Рис. 4

пики дольше сохраняют свою форму и, соответственно, “хребты” медленнее разворачиваются. Момент появления внеосевого максимума расположен от центра импульса на один период дальше по сравнению с развитием колебаний, а сама его абсолютная величина несколько больше ближайшего регулярного максимума. Однако и здесь появление внеосевого максимума сигнализирует о скором разрушении кильватерной волны. Его внешние признаки полностью аналогичны рассмотренным выше: сначала в приосевой зоне появляются отрицательные значения плотности, которые быстро меняют регулярную структуру потенциала, скорости и т.д. Измельчение сеточных параметров очень ненадолго, как и выше, продлевает время существования отыскиваемого решения.

Такое совпадение решений представляется неслучайным. Видимо, качественное сходство в поведении главной характеристики (электронной плотности) означает подобие самих физических явлений, а это может помочь разобраться в причинах и механизмах разрушения обоих процессов. Хотя следует отметить, что моделирование трехмерных аксиально симметричных кильватерных волн в плазме является существенно более сложной проблемой, чем изучение фактически одномерных плазменных колебаний.

**3. Метод возмущений.** Если предположить, что амплитуда колебаний достаточно мала, то уравнения (5) становятся слабо-нелинейными и их приближенные решения можно построить, используя методику теории возмущений [10]. Приведем здесь краткий вывод соответствующих аналитических формул.

Исключая электрическое поле  $E$  из системы (5), получим следующее уравнение для скорости  $V_p$ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1\right)V_p + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_p \frac{\partial V_p}{\partial \rho}\right) + V_p \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V_p}{\partial \theta}\right) + V_p \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho V_p \frac{\partial V_p}{\partial \rho}\right) = 0. \quad (10)$$

Здесь и далее нижний индекс  $p$  будет указывать на приближения, отыскиваемые в соответствии с теорией возмущений.

Уравнение (10) будем решать, считая нелинейные слагаемые малыми. Подставляя скорость электронов в виде разложения по степеням нелинейности  $V_p = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$ , находим, что первое приближение, удовлетворяющее начальным условиям  $V_1|_{\theta=0} = 0$  и  $\frac{\partial V_1}{\partial \theta}|_{\theta=0} = A(\rho)$ , имеет вид

$$V_1 = A \sin \theta, \quad (11)$$

где  $A = A(\rho)$  — амплитуда колебаний скорости электронов, зависящая от радиуса.

Для второго и третьего членов асимптотического разложения решения (10) последовательно получим уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1\right)V_2 + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \rho}\right) + V_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V_1}{\partial \theta}\right) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1\right)V_3 - 2\omega_2 V_1 + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_1 \frac{\partial V_2}{\partial \rho} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial \rho}\right) + V_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V_2}{\partial \theta}\right) + \\ + V_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V_1}{\partial \theta}\right) + V_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \rho}\right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что частное решение уравнения (12) с учетом (11) имеет вид

$$V_2 = \frac{1}{2} \left( A \frac{dA}{d\rho} + \frac{A^2}{3\rho} \right) \sin 2\theta. \tag{14}$$

Теперь для устранения резонансных слагаемых в уравнении (13), которые приводят к нарастающим по времени решениям, следует учесть изменение частоты в формуле (11):

$$V_1 = A \sin \omega \theta, \quad \omega = 1 + \omega_2, \tag{15}$$

где  $\omega_2$  — квадратичная по амплитуде поправка к основной частоте. Воспользуемся явными формулами для  $V_1$ ,  $V_2$  и приравняем к нулю коэффициент при  $\sin \omega \theta$  в (13). В результате получим

$$\omega_2 = \frac{A^2}{12\rho^2}. \tag{16}$$

Это выражение не является новым, поскольку уже встречалось в [2]. В данном случае больший интерес представляет формула для электронной плотности

$$N_p = 1 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A) \cos \omega \theta - \theta \frac{d\omega}{d\rho} A \sin \omega \theta, \tag{17}$$

следующая из выражения (15) и приближения  $V_p \approx V_1$ . Эта формула означает, что из асимптотического представления скорости удерживается только первое слагаемое, хотя нелинейный сдвиг по частоте (16) следует из регулярного поведения трех слагаемых в разложении по малому параметру амплитуды колебаний.

Так как в первом приближении  $E_p = -A \cos \omega \theta$ , то для согласования с начальными условиями (6) зададим амплитуду скорости в виде  $A(\rho) = -\frac{A_0}{R} \rho \exp\left\{-\frac{\rho^2}{R^2}\right\}$ , где  $\frac{A_0}{R} = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2$ ,  $R = \frac{\rho_*}{\sqrt{2}}$  и величина  $A_0$  связана с максимальной амплитудой колебаний  $A_{\max}$  соотношением  $A_0 = \sqrt{2e} A_{\max}$ . Отметим, что для остросфокусированного лазерного импульса имеется следующее соотношение между его параметрами и величиной  $A_0$ :  $A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\tau_l}{R} a_0^2 \exp\left\{-\frac{\tau_l^2}{4}\right\}$ , где  $\tau_l = \frac{l_*}{\sqrt{2}}$ ,  $R$  и  $a_0$  — безразмерные значения соответственно длительности, радиуса фокального пятна и максимальной амплитуды в центре лазерного импульса.

**4. Численные эксперименты.** Наличие быстрого численного алгоритма (9) и аналитической формулы (17) позволяет сравнить два подхода к решению задачи (5)–(8). В первую очередь для этого требуется подобрать корректные значения двух параметров  $a_*$  и  $\rho_*$ . Отметим, что зная  $\rho_*$ , величину  $\rho_{\max}$  можно определить по формуле  $\rho_{\max} = 4.5\rho_*$ , гарантирующей выполнение краевых условий (8) с достаточной точностью.

Отметим специфическое свойство инвариантности для функции электронной плотности  $N(\rho, \theta)$ , которым обладает задача (5)–(8). Обозначим ее решение через  $V = \alpha U$ ,  $E = \alpha G$  и сделаем замену независимой переменной  $\rho = \alpha x$ , где  $\alpha$  — вещественный параметр. Несложно проверить, что функции  $U$  и  $G$  также удовлетворяют уравнениям (5), но уже в переменных  $\theta, x$ . Кроме того, если в начальном условии (6) при том же преобразовании поперечной координаты заменить  $a_*$  на  $\alpha a_*$  и  $\rho_*$  на  $\alpha \rho_*$ , то будем иметь равенство  $E(\rho, 0) = \alpha G(x, 0)$ . Это означает, что одновременное пропорциональное изменение независимой переменной  $\rho$  и параметров  $a_*$ ,  $\rho_*$  влечет аналогичное изменение решения  $V, E$ . С другой стороны, преобразования  $\rho = \alpha x$ ,  $E = \alpha G$  не меняют значений электронной плотности  $N$  в переменных  $\theta, x$ , что следует из формулы (4). Таким же свойством инвариантности обладает формула (17). Из вышесказанного следует, что за счет подбора параметров задачи фиксированные по амплитуде значения плотности могут достигаться при сколь угодно малых амплитудах колебаний скорости и электрического поля.

Таким образом, выбор параметров  $a_*$ ,  $\rho_*$  должен производиться в два этапа: сначала из физических соображений, связанных с пригодностью модели, фиксируется параметр  $\rho_*$ , а затем величина  $a_*$  подбирается так, чтобы обеспечить корректность применения метода возмущений. Остросфокусированному лазерному импульсу и пренебрежению релятивистскими эффектами вполне соответствует  $\rho_* = 0.6$ . В идеале должно выполняться неравенство  $\rho_* \ll 1$ , но следует также учитывать соразмерность масштабов по обоим независимым переменным. Напомним, что задача отнормирована так, что период решения по  $\theta$  составляет в первом приближении  $2\pi$ . При выбранном  $\rho_*$  задача становится близкой к линейной, если положить  $a_* = 0.12$ . В частности, если увеличить или уменьшить это значение в  $\sqrt{2}$  раз, то границы

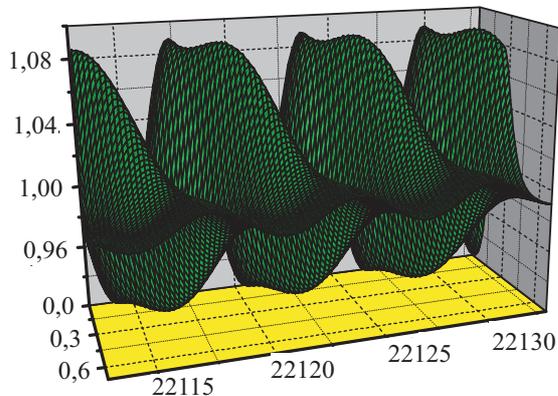


Рис. 5

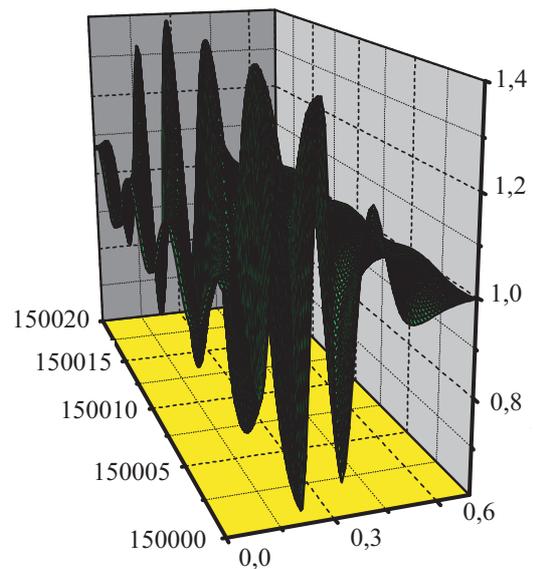


Рис. 6

значений плотности на первых трех периодах меняются соответствующим образом в два раза (с большой степенью точности).

Рассмотрим теперь момент возникновения внеосевого максимума у электронной плотности, изображенный на рис. 5. Это — результат расчета по схеме (9) при следующих параметрах:  $a_* = 0.12$ ,  $\rho_* = 0.6$ ,  $\rho_{\max} = 2.7$ ,  $h = 1/800$ ,  $\tau = 1/8000$ . Численно определенные координаты первого по времени внеосевого максимума таковы:  $\theta_{1,n} \approx 22119$ ,  $\rho_{1,n} \approx 1.8$ . На “хребте”, расположенном ранее по времени, внутренних экстремумов нет. Формула (17) дает следующие значения:  $\theta_{1,a} \approx 22901$ ,  $\rho_{1,a} \approx 1.8$ . Само изображение здесь не приводится ввиду полного визуального совпадения с рис. 5. Полученное расхождение (около 3.5 процентов) по временной координате означает хорошее качество как выбора параметров, так и численного и аналитического решений.

Заметим, что второй максимум (на “хребте”) обнаруживается только тогда, когда функция электронной плотности достигает значения регулярного осевого максимума, т.е. когда максимумы становятся равновеликими. Из формулы (17) следует асимптотическое выражение для времени этого события:  $\theta_{1,a} \approx C_1(\rho_*/a_*)^4$ , где вычисленное значение постоянной  $C_1 \approx 35.4$ . Эта формула представляет интерес в качестве оценки снизу для интервала регулярности решения задачи (5)–(8), так как разрушение колебаний (как и кильватерных волн) до этого момента гарантированно не происходит.

Дальнейшая динамика процесса выглядит следующим образом. Прежний осевой максимум плотности перестает быть таковым, зато появившийся внеосевой от периода к периоду постепенно растет, приобретая пикообразную форму. Соответствующие “хребты” сужаются, вытягиваются и разворачиваются, становясь почти параллельными оси, поэтому их количество в приосевой зоне увеличивается. Это хорошо иллюстрирует рис. 6. Отметим, что приведенная картина значений плотности построена на основе формулы (17), по которой одновременно с ростом максимума происходит углубление минимума между соседними “хребтами”. Такое решение теряет физический смысл в результате кавитации, т.е. обращения плотности в нуль (максимум при этом равен двум). Формула (17) дает асимптотическое выражение для времени разрушения:  $\theta_{2,a} \approx C_2(\rho_*/a_*)^6$ , где численно определенное значение постоянной  $C_2 \approx 24.5$ . Полученное выражение может служить оценкой сверху для интервала времени существования колебаний.

К сожалению, решение на таких временах ( $\theta_{2,a} \approx 383\,001$ ) практически недоступно для численного анализа как с точки зрения теории (от приближенного решения требуется сходимость к точному примерно на 61 000 периодов), так и с точки зрения затрат вычислительных ресурсов. Однако здесь возможно сопоставление с другими аналитическими результатами. В работе [2] был предложен критерий опрокидывания радиальных цилиндрических колебаний, основанный на пересечении электронных траекторий; при этом предполагалось, что траектории двух электронов, отстоящих друг от друга по радиусу на расстояние, равное удвоенной амплитуде смещения, пересекутся, когда разность фаз колебаний из-за нелинейного сдвига частоты станет равной  $\pi$ . В соответствии с [2] это произойдет за время  $\theta_{2,D} \approx 38.5(\rho_*/a_*)^6$  на расстоянии от оси  $\rho_{2,D} \approx \rho_*/\sqrt{6}$ . Посчитанная нами радиальная координата разрушения совпадает с вы-

сокой точностью с  $\rho_{2,D}$ , а постоянная во временной асимптотике меньше примерно в 1.6 раза, что для таких больших времен представляется существенным. Здесь также интересно, что кавитация (по нашей оценке) предшествует пересечению характеристик (по оценке [2]). Это согласуется с многочисленными расчетами по разрушению как колебаний, так и волн, в которых никогда не наблюдались стремящиеся к бесконечности значения функции электронной плотности.

**5. Заключение.** Для изучения механизма разрушения кильватерных волн в плазме, возбуждаемых ультракоротким лазерным импульсом, сформулирована модельная задача о нерелятивистских цилиндрических плазменных колебаниях. Решение полученной системы нелинейных уравнений в частных производных методом конечных разностей выявило принципиальное сходство с поведением кильватерной волны: накануне разрушения возникает внеосевой максимум электронной плотности, сравнимый по амплитуде с регулярным осевым.

Для колебаний малой амплитуды построено аналитическое решение по методу возмущений, отражающее появление внеосевого максимума и постепенность разрушения колебаний во времени. Расчеты по схеме конечных разностей хорошо согласуются с найденной формулой для электронной плотности, которая является наиболее чувствительной характеристикой решения задачи. Получены асимптотические оценки снизу и сверху для времени разрушения малых колебаний, согласующиеся с известными результатами.

Тем не менее, остался открытым вопрос: опрокидыванием, кавитацией или чем-то иным прекращается процесс колебаний? Аналитическое решение как в первом, так и во втором приближении по амплитуде прогнозирует кавитацию. Однако в этом решении имеются недостатки: не отслеживается изгиб хребтообразных возмущений (а только плавный разворот) и величина максимума плотности ограничена двойкой (в расчетах бывает существенно больше). С другой стороны, в силу указанных выше причин рассмотренный численный алгоритм на основе разностной схемы не позволяет изучать решение на очень больших требуемых временах. Для построения альтернативных подходов необходимо привлечение новых идей и более глубокое изучение свойств задачи (5)–(8). Все это означает перспективность дальнейших исследований с целью получения адекватного описания механизмов разрушений колебаний и волн.

Авторы выражают благодарность А. А. Корневу, полезные замечания которого способствовали улучшению текста статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А.И., Половин Р.В. К теории волновых движений электронной плазмы // Ж. эксперим. и теор. физики. 1956. **30**, N 5. 915–928.
2. Dawson J.M. Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Phys. Review. 1959. **113**, N 2. 383–387.
3. Albritton J., Koch P. Cold plasma wavebreaking: propagating of energetic electrones // Phys. Fluids. 1975. **18**. 1136–1139.
4. Chizhonkov E.V., Gorbunov L.M. Calculation of a 3D axial symmetric nonlinear wakefield // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. **22**, N 6. 531–541.
5. Esarey E., Sprangle P., Krall J., Ting A. Overview of plasma-based acceleration concepts // IEEE Trans. on Plasma Science. 1996. **24**. 252–288.
6. Mora P., Antonsen T.M. Kinetic modelling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas // Phys. of Plasmas. 1997. **4**. 217–229.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
9. Andreev N.E., Chizhonkov E.V., Gorbunov L.M. Numerical modelling of the 3D nonlinear wakefield excited by a short laser pulse in a plasma channel // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. **13**, N 1. 1–11.
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию  
20.02.2008