

УДК 517.97:539.37

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В БЛОЧНЫХ СРЕДАХ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Е. В. Кучунова<sup>1</sup>, В. М. Садовский<sup>2</sup>

Разработан параллельный алгоритм для численного решения пространственных задач динамики упругих кусочно-однородных сред блочной структуры с криволинейными поверхностями раздела. Алгоритм основан на методе расщепления по пространственным переменным с применением монотонной ENO-схемы для решения одномерных гиперболических систем. Исследуются вопросы эффективной реализации алгоритма на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью. Приводятся результаты апробации комплекса параллельных программ при исследовании модельных задач сейсмологии. Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (шифр гранта 17G036), РФФИ (код проекта 08-01-00148) и Комплексной программы фундаментальных исследований президиума РАН № 14 “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий”. Статья подготовлена по материалам доклада авторов на международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии” (ПаВТ-2008; <http://agora.guru.ru/pavt>).

**Ключевые слова:** упругость, сейсмические волны, разностные методы, расщепление, параллельные алгоритмы, гиперболические системы, динамика.

**1. Введение.** Начиная с работ Релея и Лэмба, математическое моделирование распространения сейсмических волн проводится на основе системы уравнений динамической теории упругости. На практике важно проанализировать сейсмическое волновое поле с учетом всех типов волн, волн интерференционного характера и возникающих при этом “нелучевых” явлений. Совершенствование систем наблюдения и повышение детализации экспериментальной информации приводит к необходимости рассмотрения волновых полей с большей точностью и для все более возрастающих времен. Исключительное значение для исследования распространения сейсмических волн в сложнопостроенных средах имеет вычислительный эксперимент. Однако применение прямых методов численного анализа требует большого объема вычислительных ресурсов. Решение пространственных задач на современном персональном компьютере может оказаться невозможным из-за длительности времени счета. Кроме того, однопроцессорный компьютер зачастую не может обеспечить требуемый объем оперативной памяти для работы с многомиллионными массивами ячеек расчетных сеток, использование которых необходимо для достижения требуемой точности. Эффективным средством решения ресурсоемких пространственных задач является технология параллельных вычислений на распределенных системах кластерного типа.

В настоящее время не являются редкостью кластеры, состоящие из нескольких десятков и сотен вычислительных узлов и позволяющие значительно ускорить расчеты. Однако на пути перехода от персонального компьютера к суперкомпьютеру с параллельной архитектурой имеются определенные трудности, которые, с одной стороны, связаны с выбором конкретной технологии распараллеливания, а с другой стороны — с подбором таких численных методов, которые позволили бы успешно осуществить распределение данных и вычислений по процессорам. Эффективность параллельной программы существенно зависит от того, как в ней организован межпроцессорный обмен данными, который обычно является самой медленной частью алгоритма и может значительно снизить эффект от увеличения числа используемых процессоров.

В настоящей статье предлагается один из эффективных способов распараллеливания вычислительного алгоритма для исследования распространения упругих волн напряжений в кусочно-неоднородных (блочных) геофизических средах.

**2. Вычислительный алгоритм.** Задача динамики упругой среды состоит в восстановлении неизвестных полей вектора скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  и симметричного тензора напряжений  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  в некоторой области

<sup>1</sup> Сибирский федеральный университет, институт математики, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79; e-mail: vek@krasu.ru

<sup>2</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 660036, г. Красноярск; e-mail: sadov@icm.krasn.ru

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$  по заданным начальным данным и внешним воздействиям. Предполагается, что исходная среда имеет сложную структуру — содержит внутренние поверхности раздела материалов с существенно различающимися механическими свойствами, например жесткие включения небольшого размера. Структура среды известна и представлена набором из  $m$  разнородных блоков с криволинейными границами:  $\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k$ . Каждый блок  $\Omega_k$  характеризуется своим однородным материалом. Внутри блока выполняется замкнутая система уравнений линейной динамической теории упругости, имеющая следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \dot{\mathbf{v}} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})I + \mu(\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала,  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе, определяющие упругие свойства,  $\nabla$  — градиент по пространственным координатам и  $I$  — единичный тензор. Точка над символом, как обычно, означает производную по времени. Компоненты свертки градиента с тензором напряжений в декартовой системе координат задаются равенством  $(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_i = \sum_j \nabla_j \sigma_{ij}$ ;  $\otimes$  — оператор тензорного произведения:  $(\nabla \otimes \mathbf{v})_{ij} = \nabla_i v_j$ .

Предполагается, что в  $\Omega$  задано начальное распределение скоростей и напряжений:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Кроме того, известны внешние силы, действующие на части границы  $\Omega$  — на дневной поверхности:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}, \tag{3}$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали. На остальной части задаются неотражающие граничные условия, моделирующие беспрепятственное прохождение волн. Эти условия формулируются в некотором специальном виде на этапе построения вычислительного алгоритма. На внутренних границах раздела векторы скорости  $\mathbf{v}$  и векторы напряжений  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  предполагаются непрерывными, что соответствует жесткой склейке блоков.

При построении расчетной сетки в исходной области применяется алгебраический метод, состоящий в нахождении взаимнооднозначного отображения вычислительной области в виде единичного куба  $[0, 1]^3$  с равномерной сеткой на физическую область. Для аппроксимации граничных поверхностей и внутренних поверхностей раздела задается множество контрольных вершин, по которым область  $\Omega$  разбивается на регулярный набор блоков, состоящий из  $N_1$  слоев,  $N_2$  полос в слое и  $N_3$  блоков в полосе (рис. 1). В каждом блоке  $\Omega_k$  шаг сетки выбирается в зависимости от упругих свойств материала и характерной длины возбуждаемых волн. Отображение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ ,  $(\mathbf{x} \in \Omega_k, \boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^3)$  ищется в виде многомерного

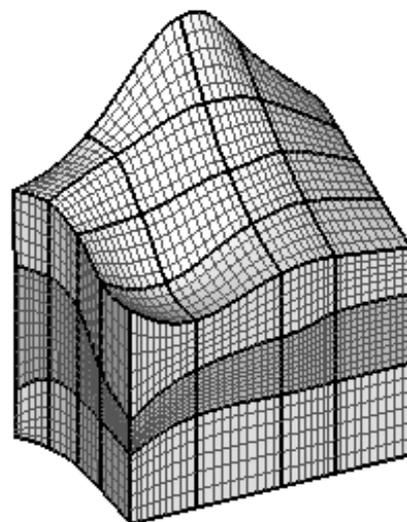


Рис. 1. Пример сетки в многоблочной области

кубического сплайна  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j,l=0}^3 c_{ijl} (\xi_1)^i (\xi_2)^j (\xi_3)^l$ . Векторные коэффициенты  $c_{ijl}$  находятся в явной форме из условий сопряжения в вершинах блоков: положения вершин заданы, а направления выхода координатных линий в вершинах определяются так, чтобы получаемая сетка была почти ортогональной.

На рис. 1 приведен пример построенной таким способом сетки в многоблочной области. Вообще говоря, сетки в соседних блоках могут оказаться несогласованными. В этом случае при численной реализации модели применяется специальный алгоритм склейки решений.

Для численного исследования динамических задач механики деформируемых сред, описываемых гиперболическими системами уравнений, широко применяются сеточно-характеристические методы [1–3]. При построении разностной схемы в задаче (1)–(3) исходную систему (1) запишем в матричной форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Здесь  $\mathbf{u} = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}]^T = (v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T$  — вектор-функция, составленная из компонент вектора скорости и тензора напряжений,  $A_i$  — матрицы-коэффициенты размерности  $9 \times 9$ , произведение

которых на вектор  $\mathbf{u}$  задается равенством  $A_i \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_i \cdot \sigma \\ \lambda(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v})I + \mu(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{e}_i) \end{bmatrix}$ , где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — единичные взаимно-ортогональные векторы.

Для решения системы (4) используем схему интегрирования на основе метода двуциклического расщепления [4, 5], при этом расщепление будем производить не в физическом, а в параметрическом пространстве. Исходную систему преобразуем к виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \tilde{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i}, \quad \tilde{A}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} A_j. \quad (5)$$

С учетом обозначения  $\boldsymbol{\alpha}^i = \nabla \cdot \xi_i$ , получим следующую формулу для вычисления произведения матриц на вектор:  $\tilde{A}_i \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\alpha}^i \cdot \sigma \\ \lambda(\boldsymbol{\alpha}^i \cdot \mathbf{v})I + \mu(\boldsymbol{\alpha}^i \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\alpha}^i) \end{bmatrix}$ .

Применяя метод двуциклического расщепления по пространственным переменным к системе (5), приходим к серии из шести одномерных задач на интервале  $t \in [t_n, t_n + \tau]$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t} &= \tilde{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \xi_1}, & \mathbf{u}^{(1)}(t_n) &= \mathbf{u}(t_n), & t &\in (t_n, t_n + \tau/2); \\ \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t} &= \tilde{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \xi_2}, & \mathbf{u}^{(2)}(t_n) &= \mathbf{u}^{(1)}(t_n + \tau/2), & t &\in (t_n, t_n + \tau/2); \\ \frac{\partial \mathbf{u}^{(3)}}{\partial t} &= \tilde{A}_3 \frac{\partial \mathbf{u}^{(3)}}{\partial \xi_3}, & \mathbf{u}^{(3)}(t_n) &= \mathbf{u}^{(2)}(t_n + \tau/2), & t &\in (t_n, t_n + \tau/2); \\ \frac{\partial \mathbf{u}^{(4)}}{\partial t} &= \tilde{A}_3 \frac{\partial \mathbf{u}^{(4)}}{\partial \xi_3}, & \mathbf{u}^{(4)}(t_n + \tau/2) &= \mathbf{u}^{(3)}(t_n + \tau/2), & t &\in (t_n + \tau/2, t_n + \tau); \\ \frac{\partial \mathbf{u}^{(5)}}{\partial t} &= \tilde{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}^{(5)}}{\partial \xi_2}, & \mathbf{u}^{(5)}(t_n + \tau/2) &= \mathbf{u}^{(4)}(t_n + \tau), & t &\in (t_n + \tau/2, t_n + \tau); \\ \frac{\partial \mathbf{u}^{(6)}}{\partial t} &= \tilde{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}^{(6)}}{\partial \xi_1}, & \mathbf{u}^{(6)}(t_n + \tau/2) &= \mathbf{u}^{(5)}(t_n + \tau), & t &\in (t_n + \tau/2, t_n + \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

Вектор-функция  $\mathbf{u}^{(6)}(t_n + \tau)$  представляет собой искомого решение на временном слое  $t_n + \tau$ .

Одномерные системы (6) являются гиперболическими и обладают полным набором собственных векторов с действительными собственными значениями, поэтому каждую из таких систем можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = Q^{-1} \Lambda Q \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi}, \quad (7)$$

где  $Q$  — матрица, составленная из линейно-независимых собственных векторов, и  $\Lambda$  — диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения. Для направления  $\xi = \xi_i$  имеем

$$\Lambda = \text{diag} \left\{ c_p |\boldsymbol{\alpha}^i|, -c_p |\boldsymbol{\alpha}^i|, c_s |\boldsymbol{\alpha}^i|, c_s |\boldsymbol{\alpha}^i|, -c_s |\boldsymbol{\alpha}^i|, -c_s |\boldsymbol{\alpha}^i|, 0, 0, 0 \right\},$$

где  $|\boldsymbol{\alpha}^i| = \sqrt{(\alpha_1^i)^2 + (\alpha_2^i)^2 + (\alpha_3^i)^2}$ ,  $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  — скорость продольных волн и  $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  — скорость поперечных волн в среде.

К одномерным системам (7) применяется явная монотонная ENO-схема (Essentially Non-Oscillatory scheme) типа “предиктор–корректор” с предельной реконструкцией решения [3]. На шаге “предиктор”, исходя из характеристических соображений, по известным значениям на  $n$ -м временном слое вычисляются значения решения на границах ячеек. Система (7) после замены неизвестной вектор-функции по формуле  $\mathbf{w} \equiv Q\mathbf{u}$  распадается на девять независимых скалярных уравнений переноса  $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi}$ , для решения которых из узла  $(\xi_j, t_n + \tau/2)$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) опускаем характеристики на слой  $t = t_n$  (рис. 2). Координаты вектора  $\mathbf{w}$  постоянны вдоль характеристик, поэтому  $w_k^{n+1/2}(\xi_j) = w_k^n(\xi_j + \lambda_{k,j+1/2} \tau/2)$ , где  $\lambda_{k,j+1/2}$  — угловой коэффициент  $k$ -й характеристики в  $j$ -й ячейке.

Характеристики, проведенные из узла  $(\xi_j, t_n + \tau/2)$ , могут не попасть точно в расчетные узлы  $(\xi_{j\pm 1/2}, t_n)$ , в которых определено решение, поэтому применяется процедура предельной реконструкции: сеточная функция  $w_k^n$  с узловыми значениями  $w_{k,j+1/2}^n$  на каждом из отрезков  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$  заменяется кусочно-линейным сплайном  $\tilde{w}_k^n(\xi) = a_{k,j+1/2}^n \xi + w_{k,j+1/2}^n$ , коэффициенты которого подбираются из условия минимума суммы модулей скачков сплайна на границах ячеек [3]. В итоге получаем вектор  $w_j^{n+1/2}$ :

$$w_{kj}^{n+1/2} = \begin{cases} w_{kj+1/2}^n - \frac{a_{kj+1/2}^n}{2} (\xi_{j+1} - \xi_j) + \frac{\tau}{2} \lambda_{kj+1/2} a_{kj+1/2}^n, & \text{если } \lambda_{kj+1/2} \geq 0, \\ w_{kj-1/2}^n + \frac{a_{kj-1/2}^n}{2} (\xi_j - \xi_{j-1}) + \frac{\tau}{2} \lambda_{kj-1/2} a_{kj-1/2}^n, & \text{если } \lambda_{kj-1/2} < 0. \end{cases}$$

После этого восстанавливается искомое решение:  $u_j^{n+1/2} = Q^{-1} w_j^{n+1/2}$ . Последнюю формулу нельзя использовать в приграничных ячейках, поскольку в нее входят величины  $w_{k,j\pm 1/2}^n$  в точках, которые находятся за пределами области интегрирования.

Корректное решение задачи на границе требует постановки граничных условий в количестве, равном числу уходящих характеристик [2]. Для левой границы области уходящими являются характеристики, отвечающие отрицательным собственным значениям, для правой границы — положительным (рис. 2). В качестве недостающих условий на дневной поверхности области  $\Omega$  выступают граничные условия (3). На остальной части поверхности ставим искусственные граничные условия, основываясь на принципе неотражения волн. Следуя этому принципу, полагаются равными нулю граничные значения характеристических переменных на уходящих характеристиках, что эквивалентно отсутствию отраженных волн в одномерной задаче.

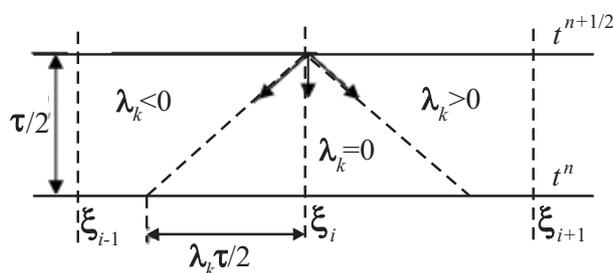


Рис. 2. Сеточно-характеристический метод расчета на шаге “предиктор”

Для сохранения свойств консервативности схемы на криволинейных сетках, когда матрицы-коэффициенты  $A_i$  зависят от координат, аппроксимация одномерных систем уравнений на шаге “корректор” производится с помощью интегро-интерполяционного метода. В результате интегрирования системы (5) по криволинейной ячейке в физической области с последующим применением формулы Грина получается равенство

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^6 \gamma^k (n_1^k A_1 + n_2^k A_2 + n_3^k A_3) u^k, \tag{8}$$

в котором  $n_i$  — направляющие косинусы внешней нормали,  $\omega$  — объем ячейки,  $\bar{u}$  — среднее интегральное значение вектора-решения, а индекс  $k$  относится к граням ячейки, в частности  $\gamma^k$  — площадь соответствующей грани. Далее сумма в правой части (8) разбивается на три пары слагаемых по противоположным граням, каждая из которых отвечает аппроксимации производных по пространственным переменным в одномерных системах (6). Например, слагаемые, относящиеся к координатным поверхностям  $\xi_2, \xi_3$ , дают аппроксимацию выражения  $\tilde{A}_1 \frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ .

Заметим, что применяемая схема решения одномерных задач является вариантом сеточно-характеристической схемы второго порядка точности. Метод двуциклического расщепления сохраняет второй порядок. Кроме того, двойной пересчет одной и той же системы уравнений на третьем и четвертом этапах расщепления гарантирует устойчивость метода при выполнении одномерного условия Куранта–Фридрихса–Леви.

**3. Программная реализация.** Применение многопроцессорных ЭВМ позволяет существенно уменьшить время вычислений за счет параллельной обработки данных. Сформулируем основные критерии качества параллельной реализации алгоритма: во-первых, ускорение расчетов с ростом числа процессоров, а во-вторых, адекватность воспроизведения моделируемых явлений. Ускорение алгоритма обычно определяют как отношение времени счета последовательного алгоритма ко времени счета параллельного. Будем также рассматривать понятие эффективности как отношение ускорения к количеству процессоров, на котором оно достигнуто [6, 7], в процентах. Стопроцентная эффективность соответствует идеальному ускорению. На практике обычно происходит снижение эффективности с ростом числа процессоров. Это связано с несколькими факторами: программы могут иметь последовательные фрагменты, может

иметь место разбалансировка вычислений в параллельных процессах, поэтому некоторое время уходит на синхронизацию, и, кроме того, время может тратиться на межпроцессорные обмены. Для сбалансированности вычислений и минимизации обменов ключевая роль отводится выбору способа распределения данных и вычислений по процессорам. Адекватность воспроизведения явлений понимается в том смысле, что результаты моделирования на двух и более процессорах должны совпадать с результатами моделирования на одном процессоре с некоторой точностью, определяемой постановкой задачи. Различие может объясняться ошибками округления или другими причинами. Важно чтобы численный алгоритм был устойчивым к подобного рода ошибкам.

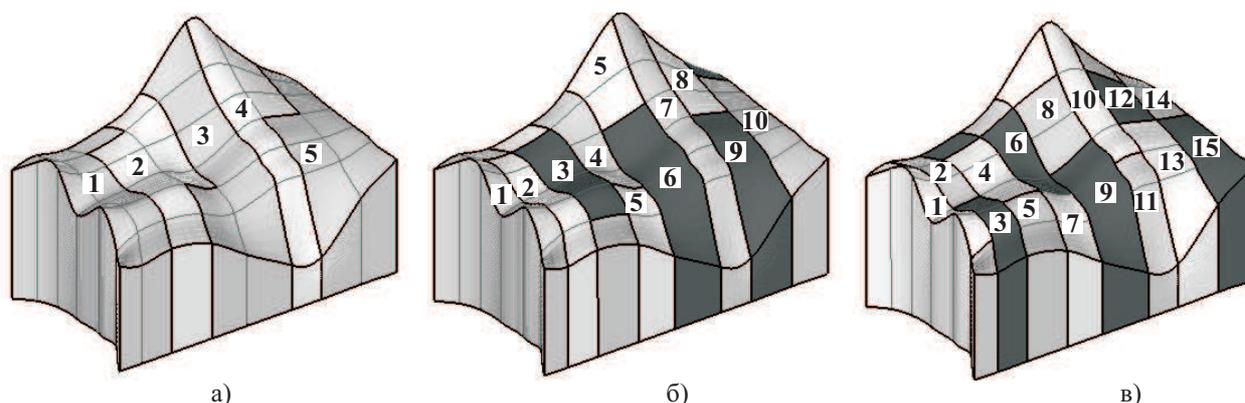


Рис. 3. Пример разбиения области из 48 блоков для 5 процессоров (а), 10 процессоров (б) и 15 процессоров (в)

Проблема адаптации математических моделей к многопроцессорным вычислительным комплексам может быть сформулирована как проблема наиболее эффективной реализации алгоритмов с сохранением точности результатов моделирования. Наиболее эффективным в настоящее время для многомерных задач механики сплошной среды на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью считается принцип геометрического параллелизма, который предполагает декомпозицию расчетной области на подобласти соответственно числу процессоров. Технология распараллеливания изложенного выше вычислительного алгоритма основана на разделении области по процессорам, исходя из требования равномерной загрузки. При этом разбиение области происходит строго по блокам. Если размерность сетки в блоке больше средней размерности в расчете на один процессор, то этот блок обслуживается несколькими процессорами, и, наоборот, один и тот же процессор обслуживает несколько соседних блоков, если их суммарная размерность не превышает средней. На рис. 3 представлен пример разбиения области из 48 блоков на различное количество процессоров, при этом отклонение нагрузки, приходящейся на один процессор, от средней не превышает 10%.

Для распределения одного блока между несколькими процессорами можно использовать 1D-, 2D- или 3D-разбиение. Сравнение различных способов разбиения показало, что 3D-разбиение имеет явные преимущества перед остальными. В этом случае число поверхностей, через которые будет происходить обмен данными, минимально. Однако ситуация может измениться, например, если один размер блока сильно отличается от других. Поэтому целесообразно выбирать способ разбиения из соображений минимума объема пересылок. Для минимизации количества пересылаемых ячеек решаем задачу целочисленной оптимизации функции

$$F(k_1, k_2, k_3) = N_2 N_3 (k_1 - 1) + N_1 N_3 (k_2 - 1) + N_1 N_2 (k_3 - 1), \quad k_1 k_2 k_3 = k, \quad 1 \leq k_i \leq k,$$

где  $k$  — количество процессоров в вычислительной системе и  $k_i$  — число разбиений блока по оси  $x_i$ . На рис. 4 приведен пример 1D- и 3D-разбиений при распараллеливании задачи на восьми процессорах. В первом случае имеется семь внутренних поверхностей, через которые будет производиться обмен данными, а во втором их только три.

Предлагаемый алгоритм реализован в виде комплекса программ на языке Fortran-90 с использованием библиотеки обмена сообщениями MPI (Message Passing Interface). Принципы параллельной реализации алгоритма изложены в [8]. Каждым процессором кластера выполняются одни и те же вычисления для части области, распределенной на этот процессор. Производимые вычисления сводятся к взаимно согласованной поэтапной реализации метода расщепления по пространственным переменным. Исключение составляют процессоры, которые дополнительно выполняют склейку решений на внутренних границах.

Условия склейки реализуются на каждом шаге по времени по следующему правилу. Процессоры, обслуживающие соседние блоки, передают необходимую информацию одному из таких процессоров, имеющему наименьший номер. Последний производит автономный расчет всей границы в целом и рассылает результаты в обратном направлении. Это происходит практически параллельно по всем блокам массива, незначительная задержка может возникать только из-за необходимости передачи данных исполняющим процессором для склейки решений на противоположной границе своего блока. Однако при этом все процессоры, кроме исполняющих, находятся в состоянии ожидания.

**4. Результаты расчетов.** Далее представлены результаты численных тестов для двух различных задач. В этих задачах исходная нагрузка действует на верхнюю грань области в некоторой точке  $\mathbf{x}_0$ . Функция источника (синусообразный импульс) имеет вид  $P(t) = P_0 \sin \omega t$ , где  $t \leq T$ ,  $P_0$  — амплитуда и  $\omega$  — частота генерируемых волн в среде. Верхняя грань области, за исключением зоны приложения импульсной нагрузки, считается свободной от напряжений. На остальных гранях поставлены неотражающие условия, которые соответствуют бесконечной протяженности массива и формулируются для одномерных систем с помощью уравнений на характеристиках.

**Задача 1.** Изотропная упругая среда занимает прямоугольную область

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq H, -H \leq x_2 \leq H, -H \leq x_3 \leq H \}$$

в декартовой системе координат. Параметры среды:  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_p = 6000$  и  $c_s = 3210 \text{ м/с}$ . В точке  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$  приложена точечная импульсная нагрузка, действующая перпендикулярно к плоскости  $x_1 = 0$ . Размеры расчетной области:  $200 \times 400 \times 400 \text{ м}$ . Расчеты проводились на сетке из  $200 \times 400 \times 400$  узлов. Шаг по времени выбирался в соответствии с условием Куранта–Фридрихса–Леви и составил  $0.0016 \text{ с}$ . Время действия нагрузки  $T = 0.005 \text{ с}$ , т.е. около трех шагов по времени. Амплитуда колебаний  $P_0 = 250 \text{ МПа}$ , частота  $\omega = 2\pi/T$ . Среднее время расчета одного шага по времени на 32-х вычислительных узлах кластера МВС-1000 составляет две минуты.

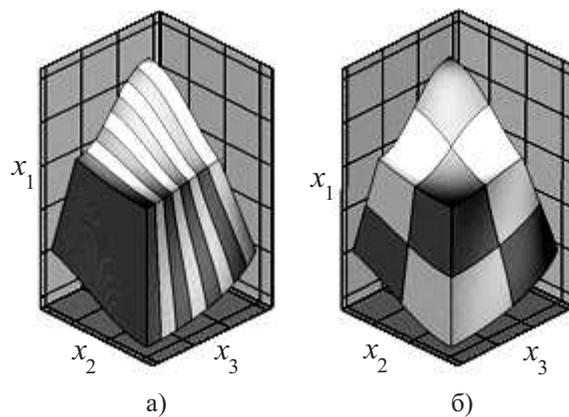


Рис. 4. Варианты декомпозиции области: 1D-разбиение (а) и 3D-разбиение (б)

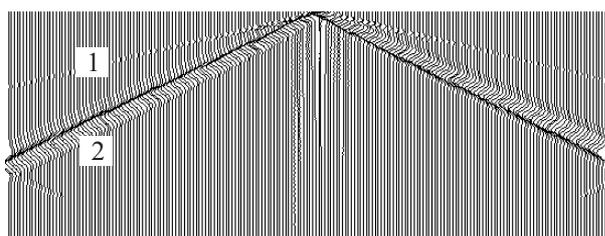


Рис. 5. Сейсмограмма вертикального перемещения

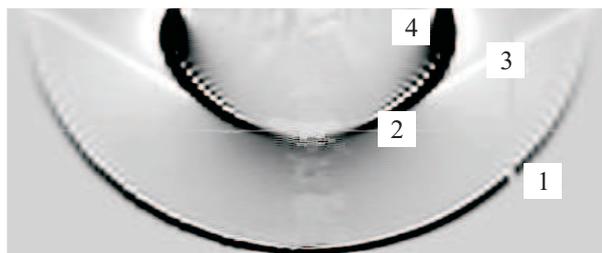


Рис. 6. Визуализация вертикальной компоненты вектора перемещения

Рассмотрим полученную волновую картину в вертикальном сечении области, проходящем через точку приложения нагрузки  $\mathbf{x}_0$ . На рис. 5 приведена сейсмограмма вертикальной компоненты вектора перемещения  $u_1$ . На рис. 6 представлена визуализация  $u_1$  в фиксированный момент времени  $0.016 \text{ с}$ . Здесь введены следующие цифровые обозначения: 1 — продольная волна, 2 — поперечная волна, 3 — головная поперечная волна, 4 — поверхностная волна Релея.

Результаты согласуются с точным решением задачи для случая плоского деформированного состояния: видны продольная и поперечная волны, менее интенсивные головные волны и волны Релея, которым на рисунках соответствуют движущиеся точки на поверхности  $x_1 = 0$ . На рис. 7 иллюстрируется волновое поле нормального напряжения.

**Задача 2.** Рассмотрим модель двухслойной среды с однородным изотропным верхним слоем и скачком акустической жесткости на границе с подстилающим полупространством. Под однородной покрывающей средой с параметрами  $\rho = 500 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_p = 500$  и  $c_s = 300 \text{ м/с}$  расположена вторая среда с параметрами

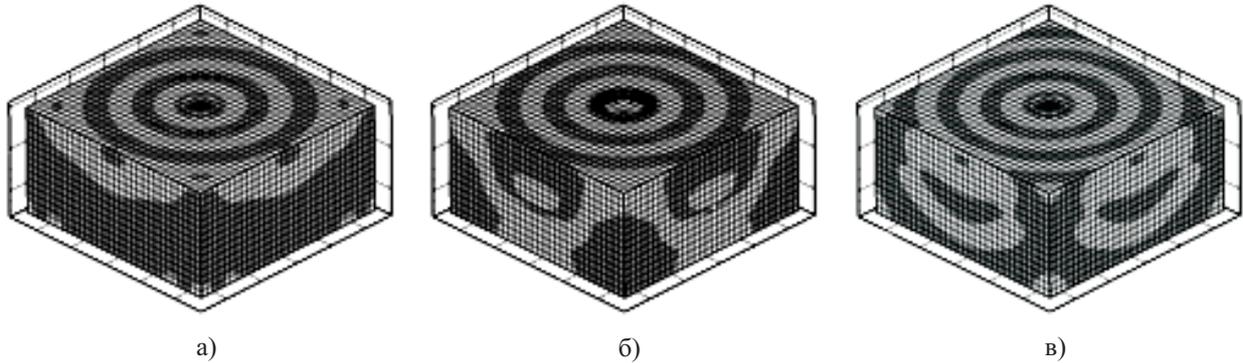


Рис. 7. Поверхности уровня напряжения  $\sigma_{11}$  в моменты времени 0.02 с (а), 0.03 с (б) и 0.04 с (в)

$\rho_0 = 750 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_p^0 = 750$  и  $c_s^0 = 450 \text{ м/с}$  (рис. 8). Горизонт, разделяющий две среды, представляет собой плоскость, наклоненную по линии  $AC$  под углом  $\varphi_1 = 5^\circ$ , а по линии  $DB$  — под углом  $\varphi_2 = 7^\circ$ . Заметим, что на границе раздела сред выполняются условия  $\rho_{c_p} \neq \rho_0 c_p^0$  и  $\rho_{c_s} \neq \rho_0 c_s^0$ , гарантирующие образование отраженных волн.

Размеры расчетной области:  $AB = AD = 600$ ,  $AA_2 = 400 \text{ м}$ . Глубина залегания наклонного горизонта:  $AA_1 = 175$ ,  $BB_1 = 87.5$ ,  $CC_1 = 100$ ,  $DD_1 = 187.5 \text{ м}$ . Внешний импульс на среду действует в точке  $O$ . Глубина залегания границы раздела в точке  $O$  составляет  $OO_1 = H = 156.25 \text{ м}$ . Величина приложенной нагрузки  $P_0 = 250 \text{ МПа}$ , время действия 0.01 с, радиус действия 3.5 м. Число узлов сетки  $200 \times 200 \times 200$ , временной шаг  $\tau = 0.002 \text{ с}$ . Число используемых процессоров:  $8 = 2 \times 2 \times 2$ , количество расчетных ячеек, приходящихся на один процессор, равно  $10^6$ . Число шагов по времени 1000, среднее время расчета одного шага составляет 2.63 минуты.

На рис. 9 представлены сейсмограммы вертикальной составляющей вектора перемещения вдоль профилей  $OC$  и  $DB$ . Здесь введены следующие обозначения: 1 — падающая Р-волна; 2 — падающая S-волна; 3 — отраженная РР-волна; 4 — отраженная PS-волна; 5 — преломленная РР-волна; 6 — преломленная PS-волна; 7 — головная волна, образованная РР-волной; 8 — отраженная SS-волна; 9 — отраженная SP-волна.

В соответствии с законами геометрической оптики, годограф прямой Р-волны вдоль профиля  $AC$ , проходящего через источник импульса, представляет собой прямую линию  $t(r) = \frac{r}{c_p}$ , где  $r$  — расстояние от точки на профиле до источника волн.

Годограф Р-волны вдоль профиля  $DB$ , не проходящего через источник импульса, описывается уравнением параболы  $t(r) = \frac{1}{c_p} \sqrt{l^2 + r^2}$ , где  $r$  — расстояние от точки профиля до центра и  $l$  — расстояние от центра профиля до источника импульса.

Картина распространения падающей поперечной волны (S-волны) полностью эквивалентна картине продольной волны и отличается только скоростью. Годограф S-волны вдоль профиля  $AC$  имеет вид  $t(r) = \frac{r}{c_s}$ , а вдоль профиля  $DB$  имеет вид  $t(r) = \frac{1}{c_s} \sqrt{l^2 + r^2}$ .

Годограф отраженной РР-волны вдоль профиля  $AC$ :  $t(r) = \frac{\sqrt{r^2 - 2Hr \sin 2\varphi_1 + 4H^2 \cos^2 \varphi_1}}{c_p}$  — парабола, сдвинутая относительно центра сейсмограммы в сторону подъема горизонта на расстояние  $r_1 = H \sin 2\varphi_1 = 27 \text{ м}$ , время прихода отраженной волны  $t_1 = \frac{2H}{c_p} \cos \varphi_1 = 0.623 \text{ с}$ . Эта точка отмечена на сейсмограммах как  $P_1$ . Вдоль профиля  $DB$  уравнение годографа отраженной волны усложняется тем, что угол горизонта зависит от  $r$ , т.е. от расстояния до центра сейсмограммы:

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\text{tg} \varphi_1 + (r/l) \text{tg} \varphi_2}{\sqrt{1 + r^2/l^2}}. \quad (9)$$

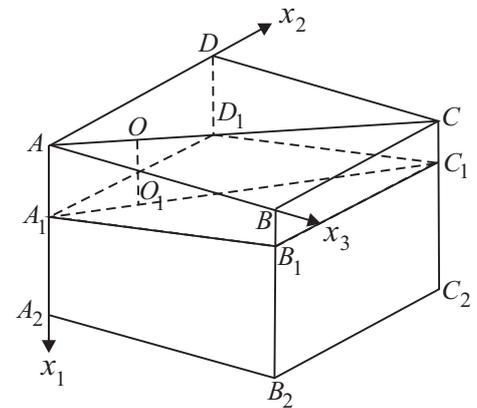


Рис. 8. Модель области с наклонным горизонтом раздела двух сред

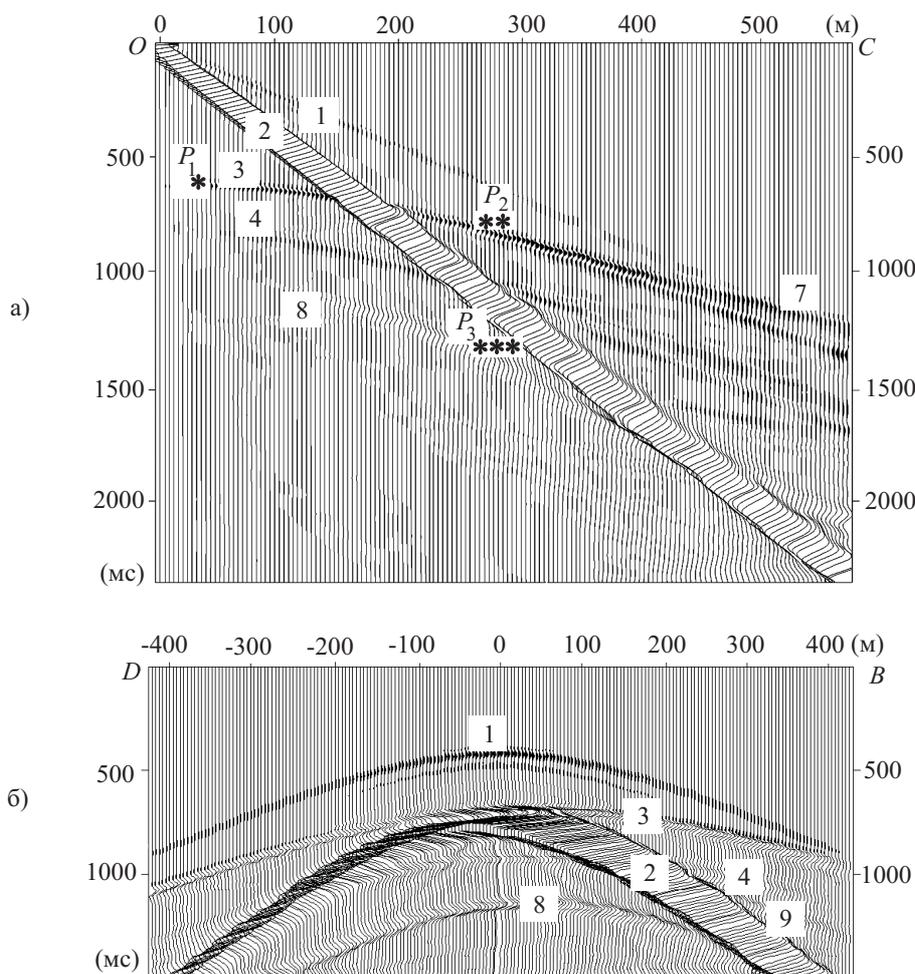


Рис. 9. Сейсмограммы вертикального перемещения вдоль трассы  $OC$  (а) и  $DB$  (б)

Годограф отраженной волны вдоль профиля  $DB$ :  $t(r) = \frac{1}{c_p} \sqrt{r^2 + l^2 - 2H\sqrt{l^2 + r^2} \sin 2\varphi + 4H^2 \cos^2 \varphi}$ .

Годограф отраженной  $SS$ -волны вдоль линии  $AC$ :  $t(r) = \frac{1}{c_s} \sqrt{r^2 - 2Hr \sin 2\varphi_1 + 4H^2 \cos^2 \varphi_1}$ .

Годограф отраженной  $SS$ -волны вдоль профиля  $DB$ :  $t(r) = \frac{1}{c_s} \sqrt{r^2 + l^2 - 2H\sqrt{l^2 + r^2} \sin 2\varphi + 4H^2 \cos^2 \varphi}$ .

При переходе продольной  $P$ -волны через границу раздела двух сред кроме отраженной продольной волны образуется вторая отраженная волна — поперечная  $PS$ -волна. Аналогично при прохождении поперечной  $S$ -волны кроме отраженной поперечной  $SS$ -волны образуется отраженная продольная  $SP$ -волна. Эти волны обозначены на сейсмограммах цифрами 4 и 9 соответственно.

Критический угол  $i$ , при падении под которым луч продольной  $P$ -волны преломляется под углом в  $90^\circ$  к нормали, определяется по закону Снеллиуса:  $\sin i = c_p/c_p^0$ . При этом преломленная продольная волна начинает распространяться вдоль границы раздела сред. Фронт проходящей продольной  $PP$ -волны, скользя вдоль границы раздела, возбуждает в верхнем слое колебания, которые вызывают появление головной преломленной волны. Одной стороной фронт головной волны касается фронта отраженной из критической точки волны, другой примыкает к фронту скользящей преломленной волны. На рис. 10 представлены фрагменты визуализации вертикальной компоненты вектора перемещения для случаев падения продольной  $P$ -волны под углом, меньшим критического угла  $i$  (рис. 10а) и большим критического (рис. 10б). При этом на рис. 10б прослеживается образование головной продольной волны. Годограф этой волны для профиля  $AC$  имеет вид

$$t(r) = \frac{1}{c_p} (r \sin (i \mp \varphi_1) + 2H \cos \varphi_1 \cos i), \tag{10}$$

где знак “-” берется для поднимающегося горизонта, а знак “+” — для опускающегося. Точка выхода

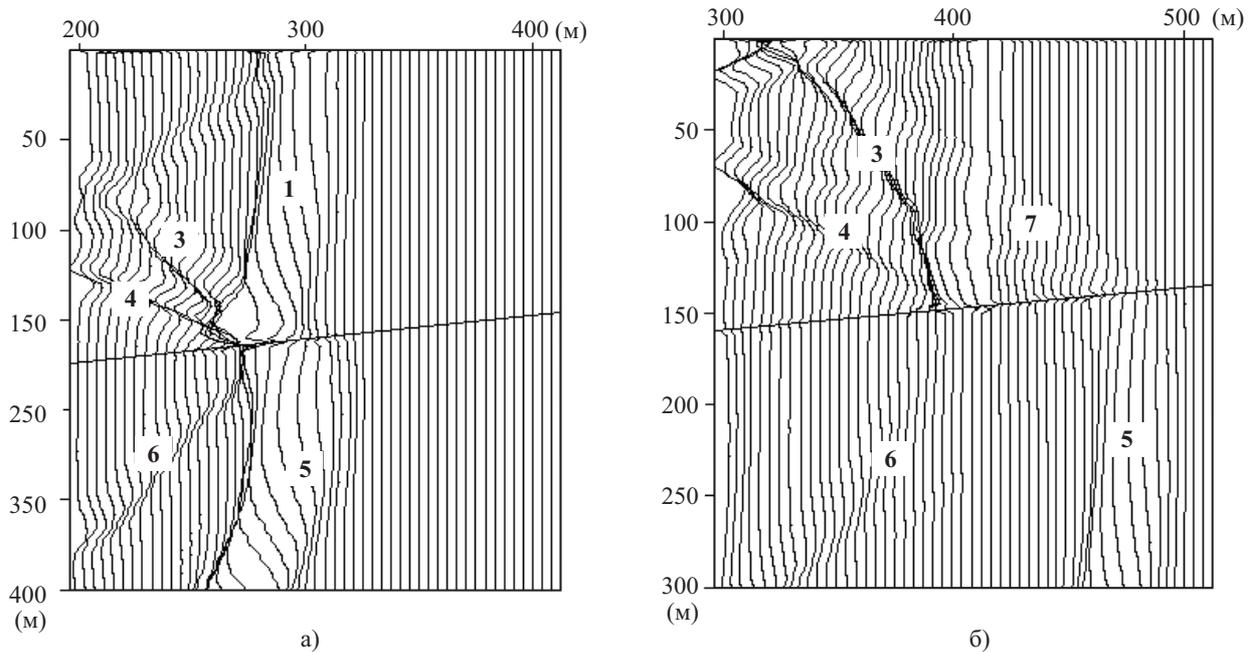


Рис. 10. Визуализация вертикального перемещения в моменты времени 0.7 с (а) и 0.9 с (б)

головной волны на поверхность (точка  $P_2$  на сейсмограмме) расположена от источника на расстоянии  $r_2 = \frac{2H \cos \varphi_1 \sin i}{\cos(i - \varphi_1)}$ , время выхода головной волны на поверхность составляет  $t_2 = \frac{2H \cos^2 \varphi_1}{c_p \cos(i - \varphi)}$ . Для линии  $AC$  имеем  $r_2 = 261$  м и  $t_2 = 0.776$  с. Для линии  $DB$  годограф продольной головной волны аналогичен (10) с заменой  $r$  на  $\sqrt{l^2 + r^2}$  и  $\varphi_1$  — на  $\varphi$  по формуле (9):

$$t(r) = \frac{1}{c_p} \left( \sqrt{l^2 + r^2} \sin(i \mp \varphi) + 2H \cos \varphi \cos i \right).$$

Из этого уравнения заключаем, что головная волна вдоль линии  $DB$  выходит на поверхность в двух точках: на расстоянии 84 м слева от центра сейсмограммы и на расстоянии 45 м справа.

Картина распространения головной поперечной  $SS$ -волны аналогична. Уравнение годографа поперечной головной волны имеет вид  $t(r) = \frac{1}{c_s} (r \sin(i \mp \varphi_1) + 2H \cos \varphi_1 \cos i)$ . Точка выхода (точка  $P_3$  на сейсмограмме) на поверхность расположена от источника на расстоянии  $r_3 = \frac{2H \cos \varphi_1 \sin i}{\cos(i - \varphi_1)} = 261$  м, вре-

мя выхода составляет  $t_3 = 2H \frac{\cos^2 \varphi_1}{c_s \cos(i - \varphi)} = 1.475$  с. Головная поперечная волна выходит на поверхность в тех же точках, что и головная продольная волна, отличается только время.

Таким образом, результаты расчетов полностью соответствуют волновой картине, полученной по законам геометрической оптики.

**5. Эффективность распараллеливания.** На примере расчета упругих волн в однородном блоке производились измерения времени выполнения программы при разном количестве процессоров. Был рассмотрен случай крупной сетки, общая размерность которой составила 250 тысяч узлов, и случай мелкой сетки размерности 8 миллионов узлов. При каждом запуске программы вычислялось 10 шагов по времени.

Время работы программы фиксировалось при помощи вызова в начале и в конце программы специальной функции библиотеки MPI. Эффективность распараллеливания вычислялась по формуле  $E_n = \frac{T_1}{T_n n} \times 100\%$ , где  $T_1$  — время работы программы на одном процессоре, а  $T_n$  — время работы на  $n$  процессорах.

На рис. 11 представлены графики зависимости  $E_n$  от числа процессоров для крупной (а) и мелкой (б) сетки. По графикам видно, что эффективность распараллеливания падает с увеличением количества используемых процессоров. Это связано с ростом времени, затраченного на пересылку данных. Так, в случае крупной сетки количество процессоров не эффективно увеличивать свыше 12, а в случае мелкой сетки — свыше 20. Применение 1D-разбиения блока, когда количество процессоров — простое число, значительно

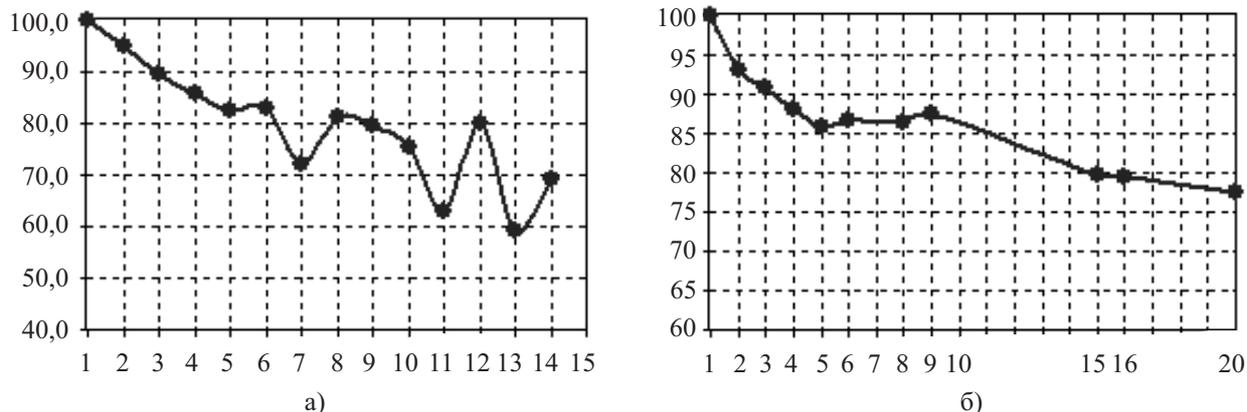


Рис. 11. Эффективности распараллеливания в зависимости от количества процессоров для крупной (а) и мелкой сетки (б)

снижает эффективность. Этим объясняются спады на графиках в случае 7, 11 и 13 процессоров.

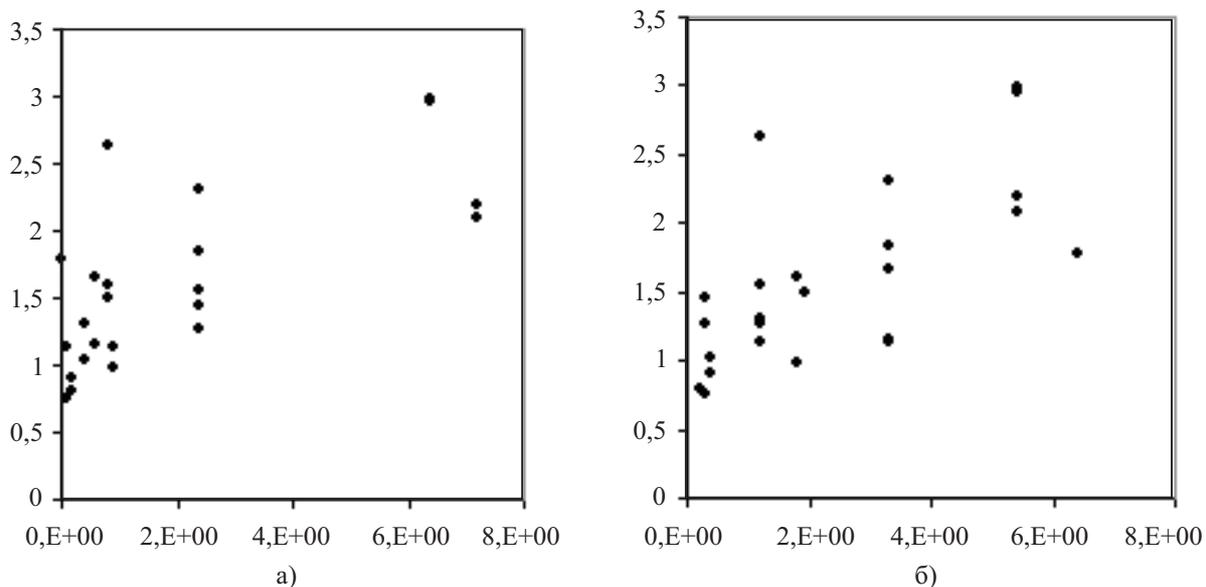


Рис. 12. Время счета одного шага в зависимости от объема пересылок (а) и от количества записей в файлы (б)

На рис. 12 изображены обобщенные статистические данные по времени счета одного шага в зависимости от объема пересылок (а) и от количества ячеек, в которых значения искомых величин записываются в двоичные файлы (б). Под объемом пересылок понимается число граничных ячеек сеточной области, через которые осуществляются межпроцессорные обмены. Данные собраны на основании расчетов серии модельных задач на разном количестве процессоров (от 2 до 32) при вычислительной нагрузке на один процессор в  $10^6$  ячеек. Результаты показывают, что время счета одного шага колеблется от 1 до 3 минут в зависимости от объема пересылок и количества записей в файл. Увеличение последних естественным образом ведет к увеличению времени счета.

**6. Заключение.** В работе предложен параллельный вычислительный алгоритм для численного решения задачи восстановления полей напряжений и деформаций в пространственных средах при заданных внешних воздействиях. Алгоритм разработан для многоблочных сред, состоящих из разнородных криволинейных блоков, или сред, имеющих слоистую структуру. Для дискретизации исходной области используется метод построения независимых (несогласованных) сеток с последующей склейкой решения в узлах на поверхностях раздела сред.

Алгоритм реализован в виде программного комплекса на языке программирования Fortran-90 с использованием функций библиотеки передачи сообщений MPI. Технология распараллеливания вычислений основана на разделении исходной области по процессорам исходя из требований равномерной загрузки. Разработанный программный комплекс позволяет получать результаты, которые могут быть использованы в прикладных геофизических программах, таких как Promax или SeisView для анализа синтетических сейсмограмм. Проведенные численные расчеты на многопроцессорной вычислительной системе МВС-1000 Института вычислительного моделирования СО РАН показали адекватную работу алгоритма и продемонстрировали его эффективность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров И.Б., Холодов А.С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1984. **24**, № 5. 722–739.
2. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
3. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
4. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
5. *Садовская О.В.* Метод сквозного счета для исследования упругопластических волн в сыпучей среде // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики.* 2004. **44**, № 10. 1909–1920.
6. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
7. *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991.
8. *Кучунова Е.В., Садовская О.В., Садовский В.М.* Комплекс прикладных программ для численного решения пространственных задач динамической теории упругости на многопроцессорных вычислительных системах // *Избранные материалы IV школы-семинара “Распределенные и кластерные вычисления”.* Красноярск: ИВМ СО РАН, 2005. 159–172.

Поступила в редакцию  
20.02.2008

---