

УДК 517.955:517.444

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ВЕЙВЛЕТАМИ
ГАУССОВА СЕМЕЙСТВА СУПЕРПОЗИЦИЕЙ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ**

Е. Б. Постников¹

Рассматривается использование дифференциальных уравнений в частных производных для вычисления вейвлет-преобразования с действительными и комплексными вейвлетами, содержащими гауссиану и имеющими нулевые старшие моменты. Показано, что в этом случае, в отличие от рассмотренного ранее преобразования со стандартным вейвлетом Морле, искомое преобразование может быть найдено как суперпозиция решений нескольких задач Коши, отличающихся начальными условиями. Начальные условия представляют собой произведения преобразуемой функции со степенными функциями, причем показатель степени меняется от нуля до номера наибольшего исчезающего момента.

Ключевые слова: непрерывные вейвлет-преобразования, вейвлет Морле, гауссовы вейвлеты, уравнение диффузии, уравнения в частных производных.

Непрерывное вейвлет-преобразование является эффективным современным средством анализа сигналов [1]. Для этой цели наиболее удобна его запись

$$w(a, b) = C(a) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1)$$

в линейной (амплитудной) норме $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi)| d\xi = 1$, так как в такой форме эта запись отражает тесную взаимосвязь с алгоритмами сглаживания сигналов, выделения краев и т.п. [1].

Для того чтобы функция $\psi(\xi)$ была вейвлетом в строгом смысле, необходимо, чтобы выполнялось условие допустимости, которое может быть представлено как требование нулевого среднего:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) d\xi = 0. \quad (2)$$

В ряде приложений (например, кратномасштабное выделение контуров, анализ фрактальных и мультифрактальных сигналов [1–4]) условие (2) может быть дополнено требованием равенства нулю и старших моментов вплоть до номера n : $\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n \psi_n(\xi) d\xi = 0$. Некоторые часто используемые вейвлеты $\psi_n(\xi)$ могут быть построены путем нахождения последовательных производных заданной сглаживающей функции $\varphi(\xi)$:

$$\psi_n(\xi) = C_n (-1)^n \frac{d^n \varphi(\xi)}{d\xi^n}. \quad (3)$$

Важными для практических приложений являются гауссиана

$$\varphi(\xi) = e^{-\xi^2/2}, \quad (4)$$

¹ Курский государственный университет, физико-математический факультет, ул. Радищева, д. 33, 305000, г. Курск; e-mail: postnicov@gmail.com

на базе которой строятся действительнзначные вейвлеты, а также гауссиана, модулированная гармонической функцией (стандартный вейвлет Морле):

$$\varphi(\xi) = e^{i\omega_0\xi} e^{-\xi^2/2}. \quad (5)$$

Следует отметить, что функция (5) при достаточно большом ω_0 уже сама может рассматриваться как вейвлет (условие допустимости выполняется лишь приближенно).

Однако условию (2) можно удовлетворить, если использовать саму сглаживающую функцию с введением дополнительного вычитаемого, интеграл от которого равен интегралу по всей действительной оси от $\varphi(\xi)$. Таким образом строятся DoG-вейвлет (Difference of Gaussians)

$$\psi_0(\xi) = e^{-\xi^2/2} - \frac{1}{2} e^{-\xi^2/8} \quad (6)$$

и точный вейвлет Морле

$$\psi_0(\xi) = \left(e^{i\omega_0\xi} - e^{-\omega_0^2/2} \right) e^{-\xi^2/2}. \quad (7)$$

Так как результат вейвлет-преобразования с ядром (4) может быть представлен как разность двух диффузионно-сглаженных образов, в работе [5] была сконструирована двухслойная диффузионная оптическая сеть, реализующая этот вейвлет. Принцип ее работы заключается в следующем: каждый из слоев производит диффузионное сглаживание поступающего изображения, причем второй — с задержкой по “временной переменной” — масштабу; после этого находится разность промежуточных результатов.

Для вейвлет-преобразования со стандартным вейвлетом Морле (5) в статье [6] было показано, что оно может быть сведено к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных, причем начальное условие выражается через преобразуемую функцию. Используя подход, аналогичный [5], несложно выразить вейвлет-преобразование с точным вейвлетом Морле (7) как разность решений задач Коши. Для этого отметим, что функция (7) может быть переписана в виде

$$\psi_0(\xi) = e^{-\omega_0^2/2} \left(e^{-(\xi-i\omega_0)^2/2} - e^{-\xi^2/2} \right). \quad (8)$$

Тогда искомый вейвлет-образ запишется как

$$w(a, b) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega_0^2/2} (W_1(a, b) - W_2(a, b)),$$

где $W_1(a, b)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial W_1}{\partial a} = a \frac{\partial^2 W_1}{\partial b^2} - i\omega_0 \frac{\partial W_1}{\partial b}, \quad (9)$$

поскольку первое слагаемое в скобках в (8) аналогично стандартному вейвлету Морле в специальной норме, использованной в [6], а $W_2(a, b)$ — решение уравнения диффузии $\frac{\partial W_2}{\partial a} = a \frac{\partial^2 W_2}{\partial b^2}$. Начальным условием в обоих случаях выступает сама преобразуемая функция $W_1(0, b) = W_2(0, b) = f(b)$.

При использовании квадратичной (энергетической) нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi)|^2 d\xi = 1$, т.е. преобразования в форме $w(a, b) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) \frac{dt}{\sqrt{a}}$, решение (9) просто умножается на $\sqrt[4]{\pi a^2}$.

Дифференциальные уравнения, полученные в работах [3, 4], которым удовлетворяет вейвлет-преобразование (1) с вейвлетами, построенными методом (3) на основе (4) и (5), записываются в форме

$$\frac{\partial w_n}{\partial a} = a \frac{\partial^2 w_n}{\partial b^2} - i\omega_0 \frac{\partial w_n}{\partial b} + \frac{n}{a} w_n,$$

причем случай действительных вейвлетов (4) получается при $\omega_0 = 0$. Эти уравнения не могут быть непосредственно использованы для расчета путем решения задачи Коши методом, предложенным в [6], так как при $a \rightarrow 0$ дифференциальные уравнения имеют расходящийся член. Кроме того, в качестве начального условия должна выступать производная анализируемой функции n -го порядка, а не сама функция.

Таким образом, можно ввести систему вспомогательных дифференциальных уравнений в частных производных, суперпозиция решений задач Коши для которых будет искомым вейвлет-преобразованием.

Заметим, что выражение (5) может быть переписано в виде $\varphi(\xi) = e^{-\omega_0^2/2} e^{-(\xi - i\omega_0)^2/2}$. Первый сомножитель является константой и может быть учтен в нормировочном множителе, второй же имеет тот же вид, что и (4), но с заменой действительного аргумента на комплексный, сдвинутый на постоянную мнимую величину, поэтому ряд дальнейших преобразований можно проделать с функцией $\varphi(\zeta) = \exp(-\zeta^2/2)$. Применим формулу Родрига [7]

$$(-1)^n \frac{d^n}{d\zeta^n} e^{-\zeta^2/2} = H_n e^{-\zeta^2/2},$$

где $H_n(\zeta) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n!}{m! 2^m (n-2m)!} \zeta^{n-2m}$ — полиномы Эрмита (квадратные скобки означают целую часть числа), и получим представление преобразования с данным классом вейвлетов в виде суммы

$$w_n(a, b) = C_n e^{-\omega_0^2/2} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n!}{m! 2^m (n-2m)!} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (t - (b + i\omega_0 a))^{n-2m} e^{-(t - (b + i\omega_0 a))^2 / (2a^2)} \frac{dt}{a^{n-2m+1} \sqrt{2\pi}}.$$

Очевидно, что второй сомножитель в подынтегральном выражении может быть разложен по формуле бинома Ньютона:

$$(t - (b + i\omega_0 a))^{n-2m} = \sum_{l=0}^{n-2m} \binom{n-2m}{l} (-1)^{n+l-2m} (b + i\omega_0 a)^{n-2m-l} t^l.$$

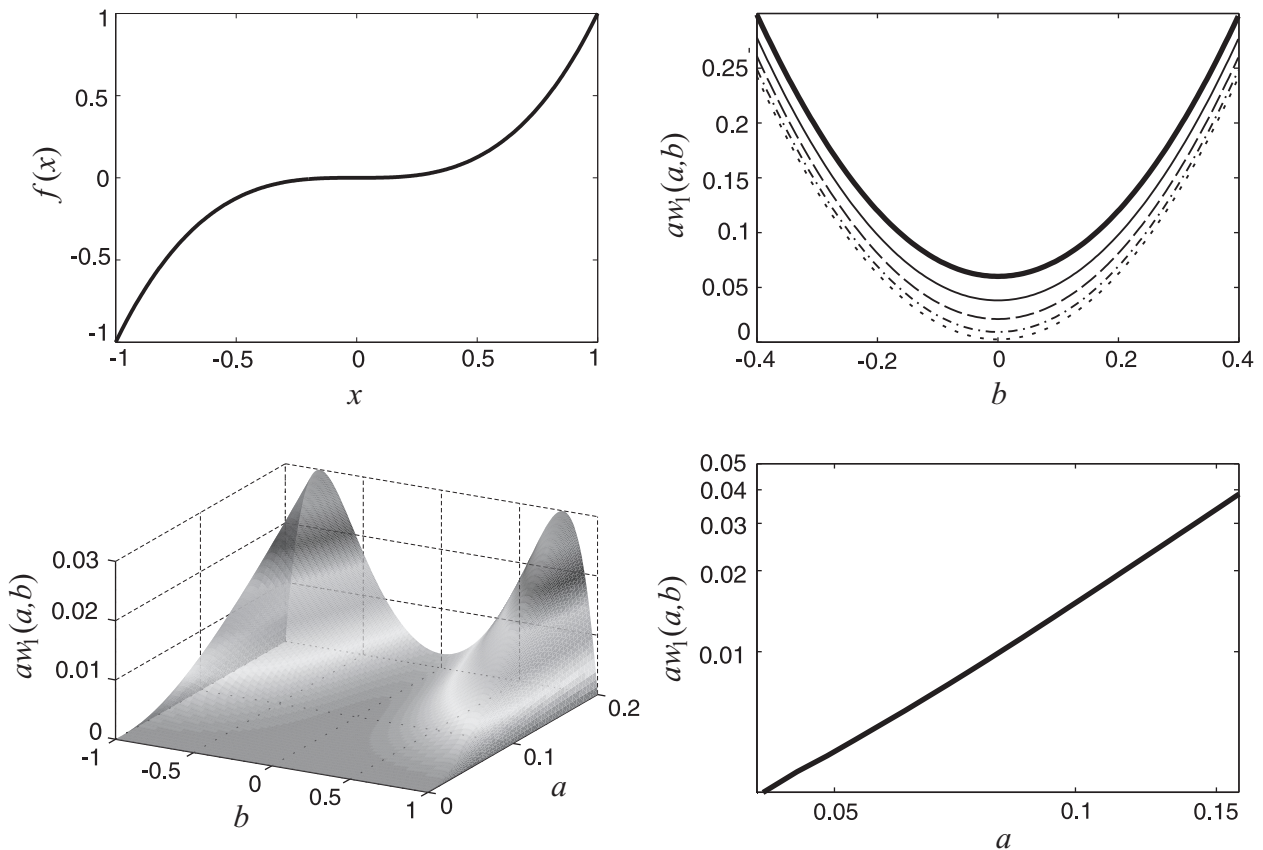


Рис. 1

В результате преобразование $w_n(a, b)$ представляется как суперпозиция интегралов вида

$$W_l(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) t^l e^{-(t - (b + i\omega_0 a))^2 / (2a^2)} \frac{dt}{a \sqrt{2\pi}},$$

каждый из которых является решением задачи Коши с начальным условием $W_l(0, b) = f(t)t^l$ для дифференциального уравнения $\frac{\partial W_l}{\partial a} = a \frac{\partial^2 W_l}{\partial b^2} - i\omega_0 \frac{\partial W_l}{\partial b}$.

Выпишем в явном виде выражения для вейвлет-преобразования с двумя первыми членами $\psi_1(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta e^{-\zeta^2/2}$ и $\psi_2(\zeta) = \frac{\sqrt{e}}{4}(1 - \zeta^2)e^{-\zeta^2/2}$ семейства (3) (использована амплитудная норма):

$$w_1(a, b) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\omega_0^2/2}}{a} (W_1(a, b) - (b + i\omega_0 a)W_0(a, b)), \quad (10)$$

$$w_2(a, b) = \sqrt{\frac{\pi e}{8}} \frac{e^{-\omega_0^2/2}}{a^2} \left((a^2 - (b + i\omega_0 a)^2)W_0(a, b) + 2(b - i\omega_0 a)W_1(a, b) - W_2(a, b) \right). \quad (11)$$

В качестве первого примера расчета с применением предлагаемого алгоритма рассмотрим использование действительного вейвлет-преобразования гауссова семейства как сглаженного варианта производных. Для этого применим (10), (11) с $\omega_0 = 0$ к степенной функции $f(t) = t^3$. Соответствующие аналитические выражения имеют вид

$$w_1(a, b) = a^3 \sqrt{\frac{9\pi}{2}} + 3b^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} a, \quad (12)$$

$$w_2(a, b) = -6b \sqrt{\frac{\pi e}{8}} a. \quad (13)$$

Рис. 1 представляет результат расчета преобразования кубической функции (рис. 1 а) с использованием (10) на отрезке $[-1, 1]$. В силу конечности преобразования, задача Коши заменена граничной с нулевыми граничными условиями. На рис. 1 b приведен график функции $aw_1(a, b)$, т.е. разности в скобках в (10), умноженной на нормировочный коэффициент; видно, что в области вне влияния граничных эффектов функция, как ей и следует, растет от нулевого значения, причем в сечениях при $a = \text{const} > 0$ она является параболой. Ряд сечений вейвлет-преобразования $aw_1(a, b)$ при различных масштабах от $a = 0.32$ с таким же шагом изображены на рис. 1 с. Видно, что они представляют собой параболы постоянной формы, неравномерно сдвинутые по оси ординат (влияние первого члена в (12)). То, что этот сдвиг представляет собой квадратичную функцию, продемонстрировано на рис. 1 d, где построена зависимость $aw_1(a, 0)$ на логарифмической сетке, являющаяся линейной в этом представлении с соответствующим угловым коэффициентом. Аналогичный расчет функции $a^2w_2(a, b)$ по формуле (11) дает функцию, представленную на рис. 2. Видно, что ее сечения при заданном масштабе действительно являются прямыми с углом наклона, зависящим от масштаба.

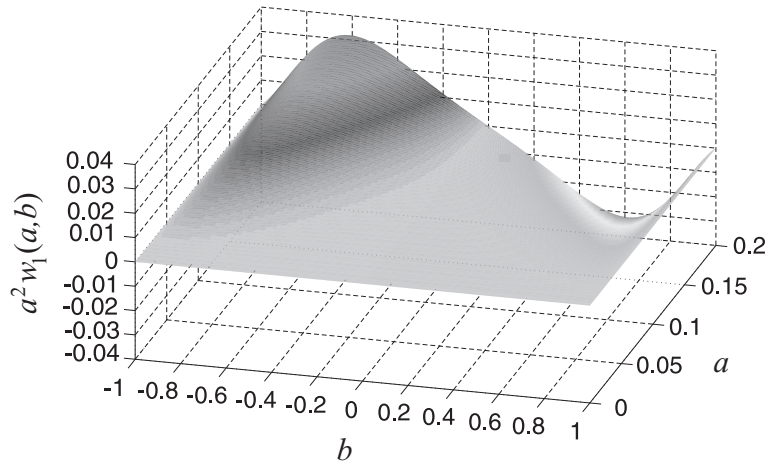


Рис. 2

В качестве следующего примера рассмотрим как действительное, так и комплексное преобразования функции, содержащей на разных участках различные частоты, а также их наложение (рис. 3 e):

$$f(t) = \begin{cases} \sin(16\pi t), & 0 \leq t < \frac{1}{3}, \\ \sin(16\pi t) + \sin(64\pi t), & \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}, \\ \sin(64\pi t), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Было выполнено действительное и комплексное с $\omega_0 = \pi$ вейвлет-преобразования по формулам (10), (11), результаты которых (умноженные на a или a^2 для первой и второй производной гауссианы соответственно) приведены на рис. 3 а–3 d. Рис. 3 с и 3 d представляют собой сглаженные первую и вторую

производные гармонического сигнала (с точностью до амплитуды, определяемой масштабом). Отчетливо видны интервалы масштабов, соответствующие двум периодам, присутствующим на различных участках, а также их суперпозиция. Для комплексного вейвлет-преобразования изображены только графики модуля, позволяющие выделить периоды составляющих сигнала на различных участках. Более темные области соответствуют большему значению функций. В качестве граничных условий использовались

$$w(0, a) = f(0) \exp(-t^2/\omega_0^2), \quad \partial_b(0, a) = \pm \frac{af(0)}{\varepsilon^2 + a^2}, \quad \varepsilon \sim 10^{-4}.$$

Аналогичные условия брались на другой границе. Их подбор осуществлялся эмпирически, так как точная замена задачи Коши граничной невозможна, а приведенные условия являются точными при нулевом и бесконечном масштабах и успешно обеспечивают подавление краевых эффектов.

Полезным свойством комплексного преобразования с вейвлетами из рассматриваемого семейства является то, что результат преобразования гармонической функции является произведением полинома и гауссианы. Более того, это свойство выполняется также и для используемых для расчетов вспомогательных комбинаций, например

$$W_1(a, b) - (b - i\omega_0)aW_0(a, b) = i\omega\sqrt{2\pi}a^2 \exp^{-(\omega_0 - a\omega)^2/2}. \quad (14)$$

В результате при сохранении условия допустимости связь между частотой гармонического сигнала и масштабом, на котором наблюдается линия максимума модуля вейвлет-преобразования, может быть найдена (во всяком случае, для вейвлетов с малым числом нулевых старших моментов) в виде конечного выражения. Например, для (14) имеем

$$a_{\max} = \frac{\omega_0}{2\omega} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\omega_0^2}} \right),$$

в отличие от случая точного базиса Морле (7), для которого максимум будет решением трансцендентного уравнения. На рис. 3а и 3б заметно, что линии максимума выражены достаточно отчетливо и позволяют провести идентификацию частот исследуемого сигнала и их локализацию.

Как было рассмотрено в [6], при практическом применении метод проведения вейвлет-преобразования, базирующийся на решении системы дифференциальных уравнений в частных производных, имеет определенные преимущества в случае выборки, представленной на существенно неоднородной сетке. Кроме того, такое представление позволяет проследить взаимосвязь вейвлет-преобразования и алгоритмов диффузионного сглаживания изображений. Следует отметить, что в отличие от метода кратномасштабного выделения контуров, предложенного Малла [1] и требующего дифференцирования диффузионно-сглаженного сигнала, в данном подходе для нахождения максимумов преобразования достаточно вычислить конечные разности функций-решений (что даст перемасштабированный вариант вида $a^n w_n(q, b)$, достаточный для целей выделения особенностей сигнала). При этом погрешность численного расчета ниже, чем при делении двух малых величин при численном дифференцировании в методе Малла.

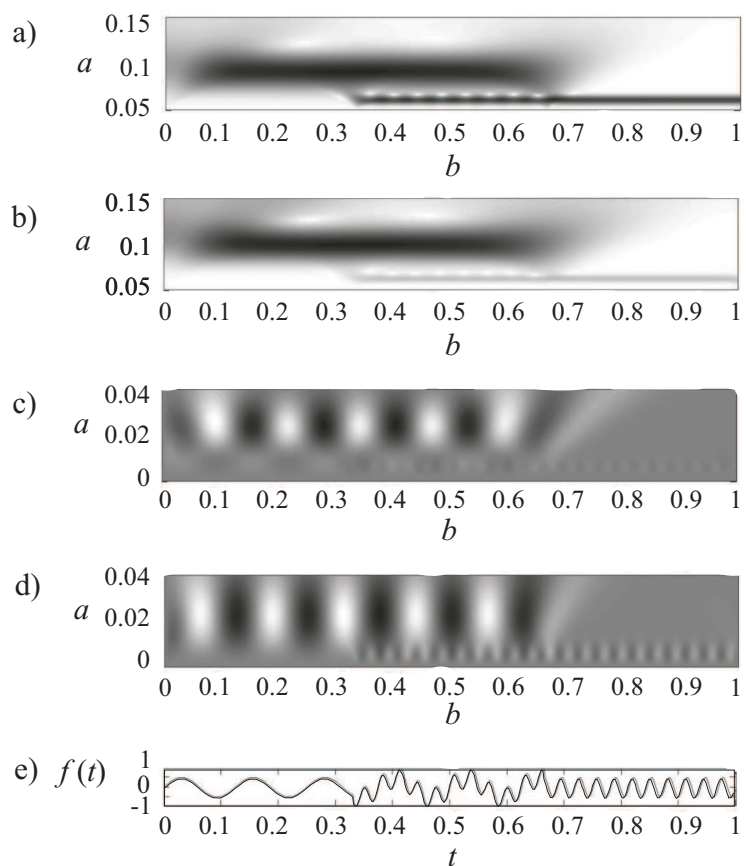


Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
2. *Bacry E., Muzy J.F., Arneodo A.* Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis: exact results // J. Stat. Phys. 1993. **70**. 635–674.
3. *Haase M., Lehle B.* Tracing the skeleton of wavelet transform maxima lines for the characterization of fractal distributions // Fractals and Beyond. Singapore: World Scient., 1998. 241–250.
4. *Haase M., Widjajakusuma J., Bader R.* Scaling laws and frequency decomposition from wavelet transform maxima lines and ridges // Emergent Nature. Singapore: World Scient., 2001. 365–374.
5. *Cho C.S., Ha S.-W., Kim J.H., Yon T.-H., Nam K.G.* Optoelectronic difference-of-Gaussian wavelet transform system // Opt. Eng. 1997. **36**, N 12. 3471–3475.
6. *Постников Е.Б.* Вычисление непрерывного вейвлет-преобразования как решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2006. **46**, № 1. 77–82.
7. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
22.02.2008
