

УДК 532.517.4:537.84

РОСТ КОРРЕЛЯЦИЙ В СВОБОДНО РАСПАДАЮЩЕЙСЯ МГД ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Т. Ю. Антонов¹, П. Г. Фрик¹, Д. Д. Соколов²

С помощью каскадных моделей турбулентности исследовалась долговременная эволюция магнитного поля и поля скорости в условиях магнитогидродинамической турбулентности с различными типами начального состояния. Для каждого типа моделировались 24 реализации процесса со случайным шумом в начальных условиях. Вычисления производились на кластере НИВЦ МГУ, состоящем из 24 параллельных процессоров. В большинстве случаев развивалось когерентное состояние с высоким уровнем корреляции между магнитным полем и полем скорости, для которого характерен низкий уровень диссипации энергии. В то же время несколько реализаций вели себя по-другому, показывая низкий уровень перекрестной спиральности и, как следствие, быстрое вырождение процесса.

Ключевые слова: каскадные модели турбулентности, магнитогидродинамическая турбулентность, число Рейнольдса, диссипация энергии, математическое моделирование, параллельные процессоры.

1. Введение. Турбулентные потоки электропроводящей жидкости с большим магнитным числом Рейнольдса Rm генерируют случайное магнитное поле. Этот процесс, известный как мелкомасштабное динамо, наряду с крупномасштабным динамо, основанном на действии спиральности и дифференциального вращения, вызывает образование и эволюцию магнитных полей небесных тел. Под действием мелкомасштабного динамо магнитные поля растут с характерным временем порядка времени оборота турбулентного вихря l/v (здесь l — энергонесущий масштаб турбулентности, а v — соответствующая скорость) от малого начального значения до значения, соответствующего равномерному распределению магнитной и кинетической энергии, после чего на временах, много больших l/v , наступает статистическое равновесие. Последнее характеризуется спектрами кинетической и магнитной энергии, потоком по спектру и другими средними характеристиками, причем наличие трех невязких интегралов движения позволяет сконструировать целый ряд масштабных законов. В частности, представление о постоянстве потока энергии по спектру ведет к колмогоровскому спектральному индексу “ $-5/3$ ” [1], а представление о турбулентности альфеновских волн приводит к спектру Крейчнана–Ирошникова “ $-3/2$ ” [2, 3]. Третья возможность была предложена Добровольным и др. [4] и развита Пуке и др. [5]. Она сводится к тому, что в рамках статистического равновесия эволюция турбулентности продолжается, что приводит к образованию когерентного состояния с высоким уровнем корреляций магнитного поля и поля скорости и прекращению потока энергии по спектру (*κ запертию турбулентного каскада*). В этом состоянии диссипация энергии связана только с молекулярными механизмами, так что ее скорость сильно падает. Количественной мерой развития когерентного состояния может служить коэффициент корреляции $C = \frac{H_C}{(E_B + E_U)}$, где $H_C = \int \mathbf{u} \mathbf{B} \, d\mathbf{r}$ — перекрестная спиральность, а E_U и E_B — кинетическая и магнитная энергии. Поскольку, в отличие от динамо средних полей, мелкомасштабное динамо не связано со спиральностью и может работать в отражательно-инвариантной турбулентности, возникновение когерентного состояния в потоке с первоначально слабой корреляцией магнитного поля и поля скорости требует значительного времени и может происходить только на поздних стадиях развития турбулентности.

Идея о возможности когерентного состояния в турбулентности отчасти мотивирована наблюдениями заметных корреляций между скоростью и магнитным полем в солнечном ветре и базируется на определенных указаниях на рост коэффициента корреляции C , полученных в ходе прямого численного моделирования МГД турбулентности [5]. Однако, даже несмотря на прогресс вычислительной техники, возможности прямого численного моделирования на больших временах в подобных задачах остаются крайне ограниченными, и представляется заманчивым воспользоваться менее прямолинейным подходом. Такая возможность открывается в рамках каскадной модели МГД турбулентности, введенной в [6]. Эта модель содержит все интегралы движения магнитной гидродинамики и правильно описывает даже тонкие детали мелкомасштабного динамо.

¹ Институт механики сплошных сред, ул. Королева, 1, 614061, г. Пермь

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119899, Москва; e-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.ru

Появление когерентного состояния в рамках каскадной модели было уже отмечено для вынужденной турбулентности [7]. Однако долговременное поведение такой модели существенно зависит от вида вынуждающей силы. В частности, эта эволюция может приобрести характер случайно чередующихся эпох с $C = 1$ и $C = -1$, причем эти инверсии не универсальны и связаны с деталями механизма возбуждения турбулентности. Свободно вырождающиеся модели не приводят к такой драматической эволюции. В частности, полная энергия со временем затухает и не наблюдается инверсий коэффициента корреляции [7]. Однако ниже мы покажем, что когерентное состояние возникает и в случае свободного вырождения.

2. Каскадные модели. Основная идея каскадных моделей развитой турбулентности состоит в том, чтобы сохранить для каждого интервала волновых чисел $k_n < |\mathbf{k}| < k_{n+1}$, $k_n = 2^n$, только одну действительную или комплексную переменную (в нашем случае это комплексные переменные U_n и B_n , соответствующие скорости и магнитному полю), отвечающую за пульсации поля в данном интервале масштабов, и свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в определенном смысле воспроизводят свойства исходной системы нелинейных уравнений в частных производных (о каскадных моделях см. более подробно в [8]).

Мы используем каскадную модель МГД, введенную в [6]. Для трехмерного случая она приобретает вид

$$(d_t + \text{Re}^{-1} k_n^2) U_n = ik_n \left\{ (U_{n+1}^* U_{n+2}^* - B_{n+1}^* B_{n+2}^*) - \frac{1}{4} (U_{n-1}^* U_{n+1}^* - B_{n-1}^* B_{n+1}^*) + \frac{1}{8} (U_{n-2}^* U_{n-1}^* - B_{n-2}^* B_{n-1}^*) \right\}, \quad (1)$$

$$(d_t + \text{Rm}^{-1} k_n^2) B_n = \frac{ik_n}{6} \left\{ (U_{n+1}^* B_{n+2}^* - B_{n+1}^* U_{n+2}^*) + (U_{n-1}^* B_{n+1}^* - B_{n-1}^* U_{n+1}^*) + (U_{n-2}^* B_{n-1}^* - B_{n-2}^* U_{n-1}^*) \right\}. \quad (2)$$

Здесь Re — число Рейнольдса, Rm — магнитное число Рейнольдса. Если $B_n = 0$, то модель сводится к так называемой каскадной модели GOY [8–10], которая широко используется для моделирования уравнений Навье–Стокса.

В пределе $\text{Re}, \text{Rm} \rightarrow \infty$ уравнения (1)–(2) сохраняют три квадратичные величины, соответствующие трем невязким квадратичным инвариантам МГД потоков: полную энергию $E = E_U + E_B$, перекрестную спиральность H_C и магнитную спиральность H_B [6]:

$$E_U = \sum_n |U_n|^2, \quad E_B = \sum_n |B_n|^2, \quad H_C = \sum_n (U_n B_n^* + U_n^* B_n), \quad H_B = \sum_n (-1)^n k_n^{-1} |B_n|^2.$$

Отметим, что при $U_n = \pm B_n$ нелинейные члены уравнений (1)–(2) и поток энергии по спектру обращаются в нуль (так называемая альфеновская точка покоя).

3. Вычислительный эксперимент. Вычисления были проведены на кластере параллельных процессоров в НИВЦ МГУ. Кластер содержит 24 процессора Intel PIII-550. Уравнения (1)–(2) интегрировались методом Рунге–Кутты 4-го порядка для $\text{Re} = \text{Rm} = 10^{-9}$ с шагом по времени $2 \cdot 10^{-6}$.

Рассматриваемая задача очень удобна для параллельных вычислений, поскольку мы заинтересованы в воспроизведении многих независимых индивидуальных эволюций системы, отвечающих сходным начальным условиям. Поэтому мы подготовили 24 набора случайных начальных условий для U_n и B_n с одинаковыми начальными интегральными и спектральными характеристиками, а обмен данных между процессами свелся к статистическому сравнению полученных траекторий. Достоинством подобного подхода является то, что сбой в одной из 24 реализаций грозит только ее потерей и не приводит к более ощутимым последствиям.

Вычисления до времени $t = 9600$ времен оборота вихря заняло примерно 50 часов процессорного времени.

4. Результаты. В первом вычислительном эксперименте мы рассматривали состояние с изначально предписанным равномерным распределением ($E_B \approx E_U$) и высоким уровнем корреляций ($C \approx 0,9$). На рис. 1, где показана временная эволюция коэффициента корреляции, видно, что за несколько десятков времен оборота вихря все решения притягиваются к когерентному состоянию ($C \rightarrow 1$).

Наш второй вычислительный эксперимент касался задачи динамо в свободно распадающейся турбулентности, т.е. мы рассматривали в качестве начального состояние с хорошо развитым кинетическим спектром и малой магнитной энергией ($E_B \ll E_U$). Такое приближение совместимо с постановкой задачи динамо, поскольку время диссипации энергии намного меньше характерного времени усиления магнитного поля механизмом динамо. В такой задаче за несколько десятков времен оборота вихря наступает состояние равномерного распределения кинетической и магнитной энергии [6].

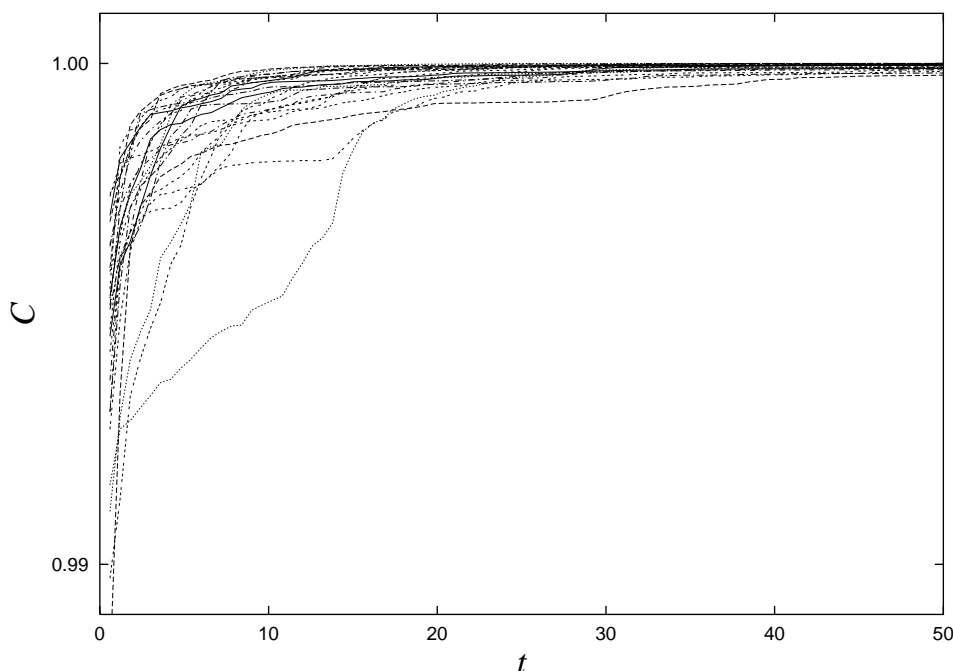


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции от времени при начальном состоянии ($E_B \approx E_U$)

В этом численном эксперименте, охватывающем тысячи времен оборота вихря, мы обнаружили, что решения со сходными начальными условиями обнаруживают разнообразное поведение. На рис. 2 видно, что для большей части траекторий коэффициент корреляции C приближается к одному из предельных значений $C = \pm 1$. Поведение траекторий для коэффициента C можно сравнить с траекториями броуновской частицы, поскольку увеличение дисперсии траекторий со временем хорошо заметно. Число траекторий со значительным C растет со временем, однако популяция траекторий с малым C остается заметной.

Знак корреляции определяется начальным условием. Если данная реализация долгое время сохраняет малый коэффициент корреляции, то он иногда может менять знак, но мы не наблюдали смены знака коэффициента корреляции в когерентном состоянии.

Отметим, что когерентное состояние отвечает точному решению уравнений (1)–(2) с $U_n = B_n$. Это решение затухает со временем, однако поскольку поток энергии по спектру в когерентном состоянии обращается в нуль, так что кинетическая и магнитная энергии рассеиваются только механизмами молекулярной диффузии, эта скорость затухания намного меньше, чем для состояний с низкими корреляциями. На рис. 3 показаны энергетические спектры, соответствующие обоим состояниям. Белые кружки отвечают кинетической энергии E_U , а черные кружки — магнитной энергии E_B . Спектр с большими кружками отвечает некоррелированному состоянию и имеет хорошо развитый инерциальный интервал со спектральным индексом, близким к колмогоровскому закону “ $-5/3$ ”. Другой спектр — с маленькими кружками — отвечает когерентному состоянию. В этом случае большая часть энергии сконцентрирована в трех самых больших масштабах, но диссипационному интервалу предшествует сравнительно короткий степенной участок с наклоном, близким к закону Крейчнана–Ирошниковца “ $-3/2$ ”. Подчеркнем, что на втором спектре диссипативный масштаб много больше диссипативного масштаба первого спектра, хотя полная энергия когерентного состояния на два порядка больше полной энергии некоррелированного состояния.

На рис. 4 в двойных логарифмических координатах, удобных для выявления степенных зависимостей, для всех реализаций показана временная эволюция полной энергии. Видно, что общий закон затухания на рассматриваемых масштабах отсутствует, хотя большая часть реализаций обнаруживает степенное поведение на промежуточном этапе эволюции. Этот этап короче для реализаций с быстро нарастающими корреляциями и наклон кривой в этом случае близок к “ $-0,5$ ” (этот наклон показан на рис. 4 жирной сплошной прямой). Для реализаций с низким уровнем корреляций этот этап длиннее и его наклон близок к “ -1 ”. Оба асимптотических закона известны из прямого численного моделирования МГД турбулентности [11]. Степенное затухание энергии сменяется режимом с практически постоянной энергией (горизонтальные хвосты на рис. 4), что отражает наступление когерентного состояния.

5. Обсуждение. Свободная эволюция развитой турбулентности электропроводящей жидкости с первоначально слабым магнитным полем проходит через несколько различных этапов. Она начинается с ки-

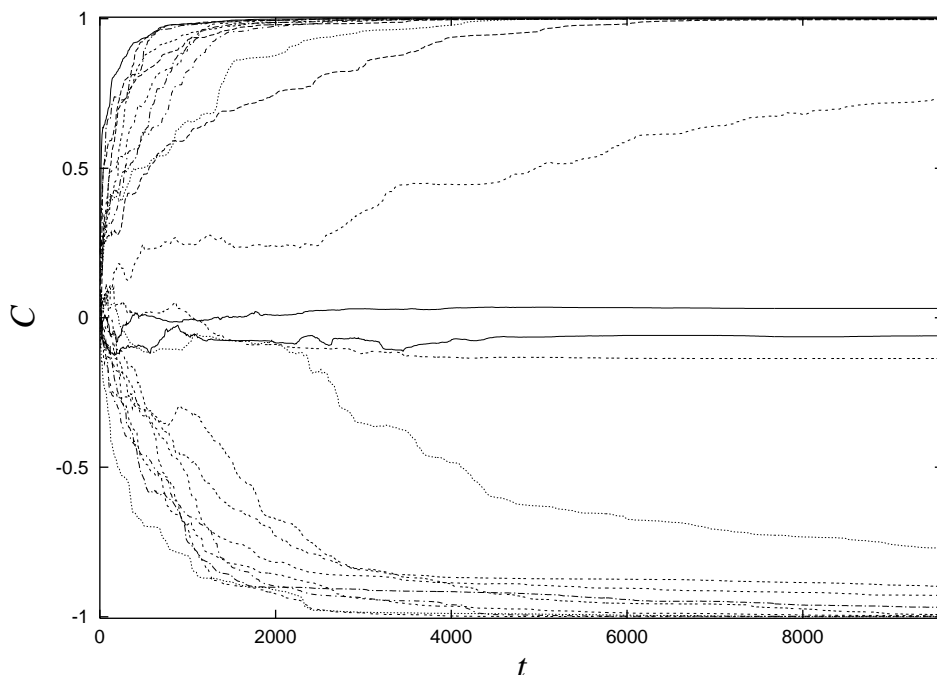


Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции при начальном слабом магнитном поле ($E_B \ll E_U$)

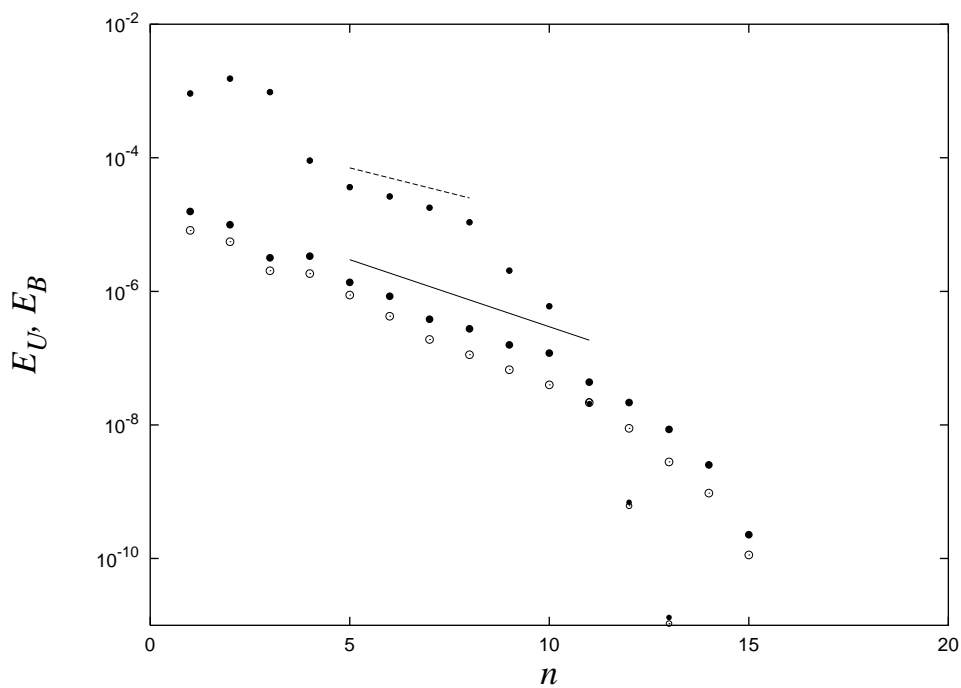


Рис. 3. Спектральное распределение энергии для некоррелированного (большие кружки) и коррелированного (маленькие кружки) состояний. Сплошная и пунктирная линии обозначают колмогоровский спектр “ $-5/3$ ” и спектр Крейчнана-Ирошникова “ $-3/2$ ” соответственно

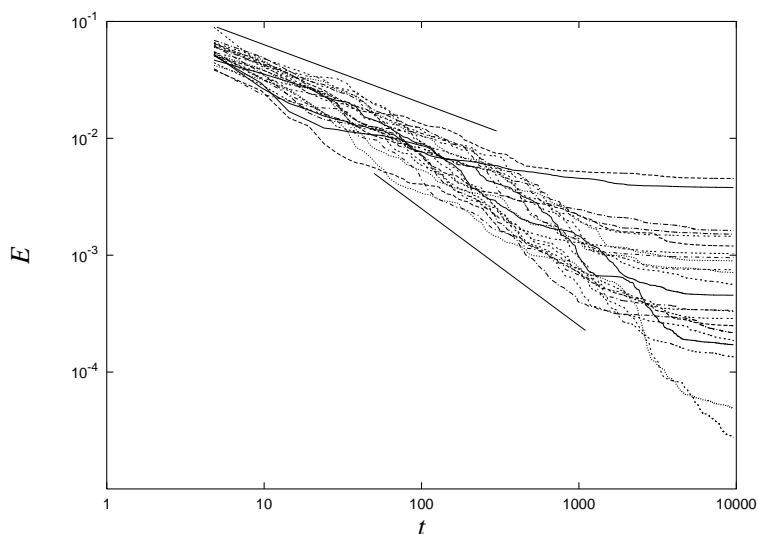


Рис. 4. Временная эволюция полной энергии

нематического роста магнитного поля и достигает состояния, характеризующегося равномерным распределением магнитной и кинетической энергий с развитым потоком энергии по спектру по направлению к малым масштабам и умеренным уровнем корреляций между магнитным полем и полем скорости. Далее медленный рост этих корреляций приводит к когерентному состоянию, в котором отсутствует энергетический каскад, а спектры становятся очень крутыми.

Наше изучение долговременной эволюции семейства свободно распадающихся каскадных моделей МГД турбулентности обнаруживает большое разнообразие видов их индивидуального поведения. Для реальной турбулентности этот факт естественно понимать как указание на сильную пространственную неоднородность, т.е. перемежаемость. Поэтому усредненные характеристики МГД турбулентности на поздней стадии эволюции вряд ли дают адекватное описание турбулентности. Физической причиной сильной перемежаемости МГД турбулентности на последней стадии ее эволюции является сильная корреляция магнитного поля и поля скорости.

Благодарности. Данная работа была выполнена в НИВЦ МГУ по инициативе и при доброжелательной поддержке А. В. Тихонравова, Вл. В. Воеводина и А. А. Куликовского и частично поддержана грантом РФФИ № 99-01-00362.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голицын Г.С.* Принципы скорейшей реакции в гидродинамике, геофизике, астрофизике // Докл. РАН. 1997. **356**, № 3. 321–324.
2. *Kraichnan R.H.* Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence // Phys. Fluids. 1965. **8**, 1385–1387.
3. *Ирошников Р.С.* Турбулентность проводящей жидкости в сильном магнитном поле // Советская астрономия. 1963. **40**. 742–750.
4. *Dobrowolny M., Mangeney A., Veltri P.-L.* Fully developed anisotropic hydromagnetic turbulence in interplanetary space // Phys. Rev. Letters. 1980. **45**, N 2. 144–147.
5. *Pouquet A., Menneguzzi M., Frisch U.* Growth of correlations in magnetohydrodynamic turbulence // Phys. Rev. A. 1986. **33**, N 6. 4266–4276.
6. *Frick P., Sokoloff D.* Cascade and dynamo action in a shell model of magnetohydrodynamic turbulence // Phys. Rev. E. 1998. **57**, N 4. 4155–4164.
7. *Boffetta G., Frick P., Giuliani P., Lozhkin S., Sokoloff D.* Submitted to Europhys. Letters.
8. *Bohr T., Jensen J., Paladin G., Vulpiani A.* Dynamical Systems Approach to Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
9. *Biferale L., Lambert A., Lima R., Paladin G.* Transition to chaos in a shell model of turbulence // Physica D. 1995. **80**, N 1–2. 105.
10. *Frick P., Dubrulle B., Babiano A.* Scaling properties of a class of shell models // Phys. Rev. E. 1995. **51**, N 6. 5582–5592.
11. *Biskamp D., Müller W.-C.* Decay laws for three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence // Phys. Rev. Letters. 1999. **33**, N 11. 2195–2198.

Поступила в редакцию
15.06.2000