

УДК 519.6

О ЯДРЕ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ГРАДИЕНТА

Е. А. Муравлева¹

При решении задачи Стокса на полуразнесенных сетках возникает дискретный аналог оператора градиента, обладающий нетривиальным ядром. Это может приводить к потере точности дискретного решения и трудностям итерационного решения задачи. Один из подходов к построению эффективных численных методов на полуразнесенных сетках предполагает, что структура ядра оператора градиента известна. В данной работе конструктивно построена система линейно независимых функций из ядра дискретного градиента для двумерного и трехмерного случаев. Результаты численных экспериментов позволяют предположить, что найденная система образует базис ядра.

Ключевые слова: задача Стокса, метод Узавы, дискретный аналог оператора градиента, нетривиальное ядро, полуразнесенные сетки.

1. Введение. Распространенным методом решения задачи Стокса, возникающей в гидродинамике, служат алгоритмы типа Узавы, основная идея которых заключается в разделении физических переменных. Одну из искоемых переменных (скорость) можно выразить через другую (давление). Таким образом, решение задачи сводится к решению вспомогательной подсистемы с последующим определением недостающей компоненты решения (скорости). При дискретизации дифференциальной задачи для оператора градиента, входящего в уравнение Стокса, может быть применен четырехточечный шаблон, использующий разности второго порядка. Такой подход обеспечивает высокую точность аппроксимации, но он же порождает ряд дополнительных трудностей. Если у дифференциального оператора градиента ядро одномерно (константа) и при использовании схем первого порядка точности оно так же остается одномерным, то в данном случае у дискретного оператора градиента размерность ядра возрастает. Это приводит к вырожденности матрицы вспомогательной подсистемы. Следовательно, применять традиционно используемые итерационные методы затруднительно, так как они рассчитаны на системы с невырожденными матрицами [4]. Отметим, что рассматриваемая в статье разностная схема имеет много общего с хорошо известным Q1-P0 методом конечных элементов для задачи Стокса — на равномерной сетке возникающие шаблоны операторов градиента совпадают с точностью до множителя. Структура ядра и остальных собственных функций оператора давления для Q1-P0 метода хорошо изучена в двумерном случае [5, 6]. Эта информация используется для построения дискретизаций на основе Q1-P0 конечных элементов и итерационных методов решения возникающих систем алгебраических уравнений [7]. В трехмерном случае о размерности и структуре ядра известно существенно меньше. Цель настоящей статьи — восполнить данный пробел. В качестве метода дискретизации в статье используются конечные разности.

Рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ стационарную первую краевую задачу для уравнений Стокса в безразмерных переменных скорость–давление:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \text{grad } p &= \mathbf{f} & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 & \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{f}(x, y)$ — заданный вектор массовых сил. Неизвестными в этой задаче являются вектор-функция $\mathbf{u} = (u(x, y), v(x, y))$ (скорость жидкости) и скалярная функция $p = p(x, y)$ (давление).

Перейдем к дискретной задаче. Определим следующие сеточные области:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) : i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ x_{ij} = \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h_1, \left(j + \frac{1}{2} \right) h_2 \right); i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1 \right\}. \end{aligned}$$

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: catmurav@gmail.com

Пусть U_h — линейное пространство вектор-функций, определенных на $\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1$ и удовлетворяющих на сеточных границах граничным условиям, P_h — пространство функций, определенных на Ω_2 . О дополнительных ограничениях на функции будет сказано ниже. В индексных обозначениях можно записать $U_h = V_{1,h} \times V_{2,h}$, где

$$\begin{aligned} V_{1,h} &= \{u_{ij} = u(x_{ij}), x_{ij} \in \bar{\Omega}_1, u_{0,j} = u_{N_1,j} = u_{i,0} = u_{i,N_2} = 0\}, \\ V_{2,h} &= \{v_{ij} = v(x_{ij}), x_{ij} \in \bar{\Omega}_1, v_{0,j} = v_{N_1,j} = v_{i,0} = v_{i,N_2} = 0\}, \\ P_h &= \left\{ p_{ij} = p(x_{ij}), x_{ij} \in \Omega_2, \sum_{\Omega_2} p_{ij} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Системе (1) поставим в соответствие следующую разностную задачу: найти функции $\mathbf{u} = (u, v)$ и p (дискретные аналоги вектора скорости и давления), принадлежащие, соответственно, пространствам U_h и P_h . Определим разностные аналоги дифференциальных операторов, а именно сеточные операторы градиента $\nabla_h : P_h \rightarrow U_h$ и дивергенции $\nabla_h \cdot : U_h^0 \rightarrow P_h$, следующим образом:

$$(\nabla_h p_h)_{i,j} = \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}}{2h_1}, \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1}}{2h_2} \right), \quad (2)$$

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{u}_h)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2h_1} + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i,j+1} - v_{i,j}}{2h_2}. \quad (3)$$

В дискретной задаче первое и второе уравнения заданы на множестве

$$\Omega_1 = \bar{\Omega}_1 \setminus \partial\bar{\Omega}_1 = \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) : i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1\},$$

а третье уравнение — на множестве Ω_2 . Данная система сеточных уравнений может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} + Bp &= f, \\ B^T \mathbf{u} &= \varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

где $A = A^T > 0$ — квадратная матрица порядка N_u и B — прямоугольная матрица размера $N_u \times N_p$.

Одним из подходов к решению сформулированной задачи является построение алгоритмов типа Уза-вы. Рассмотрим для задачи (4) процедуру исключения Гаусса. Выделим компоненту решения \mathbf{u} из первого уравнения

$$\mathbf{u} = A^{-1}(f - Bp) \quad (5)$$

с последующей подстановкой во второе. В результате получим систему уравнений $S_0 p = b$ следующего вида:

$$S_0 p \equiv B^T A^{-1} B p = B^T A^{-1} f - \varphi \equiv b. \quad (6)$$

Если система (4) невырождена, то для нахождения решения $z = \{\mathbf{u}, p\}$ достаточно сначала решить систему (6) с симметричной положительно определенной матрицей S_0 , а затем определить недостающую компоненту \mathbf{u} по формуле (5). Предположим, что S_0 является вырожденной и потребуем выполнения условия $b \perp \ker B$. Тогда задача разрешима и нормальное решение должно быть ортогонально ядру $\ker B$. Для реализации данного подхода должны быть известны базисные векторы ядра $\ker B$. Целью данной работы является изучение ядра $\ker B$ для схемы (1)–(3).

2. Структура ядра. Сначала исследуем структуру ядра оператора B в плоском случае, т.е. найдем ненулевые векторы $p_{ij} \in \mathbb{R}^{N_p}$, удовлетворяющие уравнению $Bp = 0$:

$$p_{i,j} - p_{i-1,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1} = 0, \quad p_{i,j} - p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1} = 0. \quad (7)$$

Пусть операторы B_x и B_y соответствуют операторам $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$. Первое уравнение в (7) соответствует уравнению $B_x p = 0$, а второе — уравнению $B_y p = 0$. Будем использовать обозначения B, B_x, B_y как для операторов, так и для соответствующих им матриц (B — прямоугольная матрица размера $N_u \times N_p$). Каждая строка оператора B представляет собой запись разностного уравнения в точке с координатами (i, j) , при этом в уравнение будут входить четыре соседние точки p с соответствующими координатами. Для удобства в дальнейшем будем рассматривать дополнительную сетку с узлами в точках, в которых задано значение p . Мы можем рассмотреть квадрат с вершинами в этих точках, причем точка с координатами (i, j) будет являться центром квадрата. Назовем его клеткой.

Рассмотрим одну из клеток. Этой клетке соответствуют два уравнения (7). Пусть в узлах клетки стоят числа $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$. Для того чтобы набор чисел, стоящих в узлах сетки, принадлежал ядру оператора B , должны быть выполнены уравнения

$$b - a + d - c = 0, \quad a - c + b - d = 0. \tag{8}$$

Эти равенства накладывают следующие ограничения на числа a, b, c, d : $a = d, b = c$. Следовательно, клетка будет иметь вид $\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$. Каждая клетка должна иметь вид $\begin{matrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{matrix}$.

Так как каждое ребро клетки (i, j) входит в соседние клетки, то, присоединяя соседние клетки, получим $\begin{matrix} b & a \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ a & b \end{matrix}$. Двигаясь в горизонтальном и вертикальном направлениях, получим, что в зависимости

от четности клетки могут иметь только такой вид: $\begin{matrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{matrix}$ или $\begin{matrix} a & b & a & b & a \\ b & a & b & a & b \\ a & b & a & b & a \\ b & a & b & a & b \\ a & b & a & b & a \end{matrix}$, где a, b — произвольные числа.

Таким образом, ядру оператора B принадлежат векторы указанного вида, где a, b — произвольные числа.

Следовательно, размерность ядра равна двум и базисом могут быть векторы $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$.

Эти векторы могут быть записаны в виде

$$p_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} ((-1)^{i+j} - 1), \quad p_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} ((-1)^{i+j+1} - 1). \tag{9}$$

Численное построение сингулярного разложения матрицы (SVD-разложение) подтвердило данное утверждение: для матриц различной размерности и четности числа узлов размерность ядра была одинаковой и равнялась двум.

Перейдем к трехмерному случаю. В пространственном случае узлу (i, j, k) соответствуют три уравнения (для u, v, w). В каждое уравнение входит значение p в вершинах “кубика”, центром которого является точка (i, j, k) :

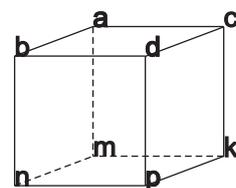


Рис. 1

$$\begin{aligned} p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} + p_{i,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k} + p_{i,j,k-1} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i,j-1,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} &= 0, \\ p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j-1,k} + p_{i,j,k-1} - p_{i,j-1,k-1} + p_{i-1,j,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} &= 0, \\ p_{i,j,k} - p_{i,j,k-1} + p_{i,j-1,k} - p_{i,j-1,k-1} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i-1,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k-1} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично двумерному (плоскому) случаю введем дополнительную (трехмерную) сетку для узлов p (рис. 1). Должны быть выполнены уравнения

$$\begin{aligned} b - a + d - c + n - m + p - k &= 0, \\ c - a + d - b + k - m + p - n &= 0, \\ a - m + b - n + c - k + d - p &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Определить общий вид ядра для трехмерного случая намного сложнее. Можно попытаться построить несколько “частных” решений, воспользовавшись полученным решением для плоского случая. В качестве верхней грани кубика возьмем клетку $\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$. Тогда для нижней сетки из первых двух уравнений следует, что $n - m + p - k = 0$ и $k - m + p - n = 0$, а это приводит к клетке вида $\begin{matrix} m & n \\ n & m \end{matrix}$. Построенный кубик иллюстрируется на рис. 2.

Из третьего условия следует, что $a - m + b - n = 0$. Для выполнения этого уравнения достаточно взять соответствующие значения в вершинах кубика (см. рис. 3 или 4). Это подсказывает способ построения элементов ядра, состоящих из нулей и единиц, — по аналогии с базисом в двумерном случае. Рассмотрим две

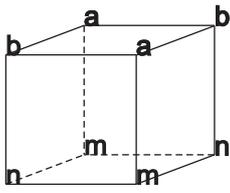


Рис. 2

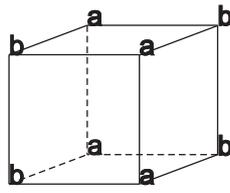


Рис. 3

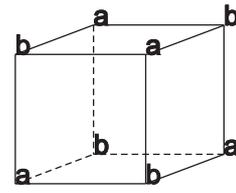
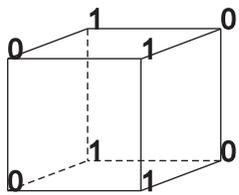


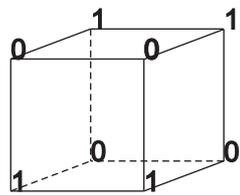
Рис. 4

плоские сетки в направлении xy вида $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$. Чередую эти сетки в разной последовательности,

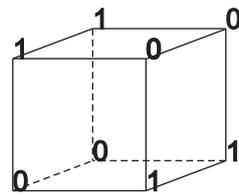
будем получать элементы ядра. Элементы каждой из этих сеток удовлетворяют “плоским” уравнениям $B_x p = 0$ и $B_y p = 0$ (см. (8)), поэтому первые два уравнения в (10) выполняются, поскольку в каждое уравнение входят элементы двух соседних слоев, а для каждого слоя эти уравнения выполняются автоматически. Третье уравнение будет выполняться, если сетки повторяются или чередуются (под единицей в верхнем слое стоит нуль в нижнем слое, и наоборот). Аналогично можно чередовать плоские сетки в направлениях yz и xz .



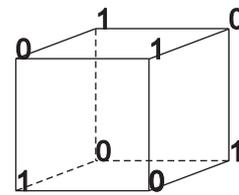
(e1)



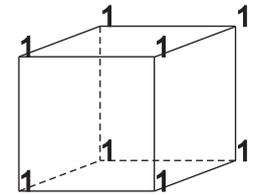
(e3)



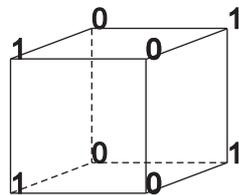
(e5)



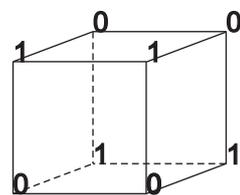
(e7)



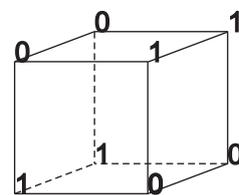
(e9)



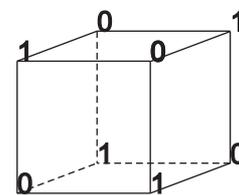
(e2)



(e4)



(e6)



(e8)

Рис. 5

Построим базис для числа узлов $N = 2^3$ (два узла по каждому направлению). Мы должны найти значения неизвестных в узлах. Для восьми неизвестных должны выполняться три уравнения (10). Ранг этой системы равен трем; следовательно, размерность ядра равна пяти. На рис. 5 представлены возможные “кубики”.

В первых шести случаях плоские сетки повторяются по одному из направлений, в следующих двух — чередуются. Сумма векторов в каждой паре равна единичному вектору (e_9), поэтому в базис может входить только один вектор из пары, что составляет четыре вектора. В качестве пятого вектора достаточно взять второй вектор из любой пары или единичный вектор e_9 . Например, можно взять векторы $(e_1, e_3, e_5, e_7, e_8)$. Таким образом, мы нашли базис. Численное построение сингулярного разложения матрицы дает тот же результат: $\dim \ker B = 5$.

В случае $N = 3^3$ применение SVD-разложения показывает, что размерность ядра равна восьми.

Берем для верхнего уровня значения в узлах сетки $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$. Для любого из двух следующих уровней мож-

но взять значения в узлах сетки $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$. Для идентификации вида слоя достаточно следить за одним из ее элементов, например, за a_{11} . Тогда кубик, состоящий из горизонтальных слоев, будет полностью определяться вертикальным “столбцом” из элементов a_{11} сеток. Возникают наборы столбцов

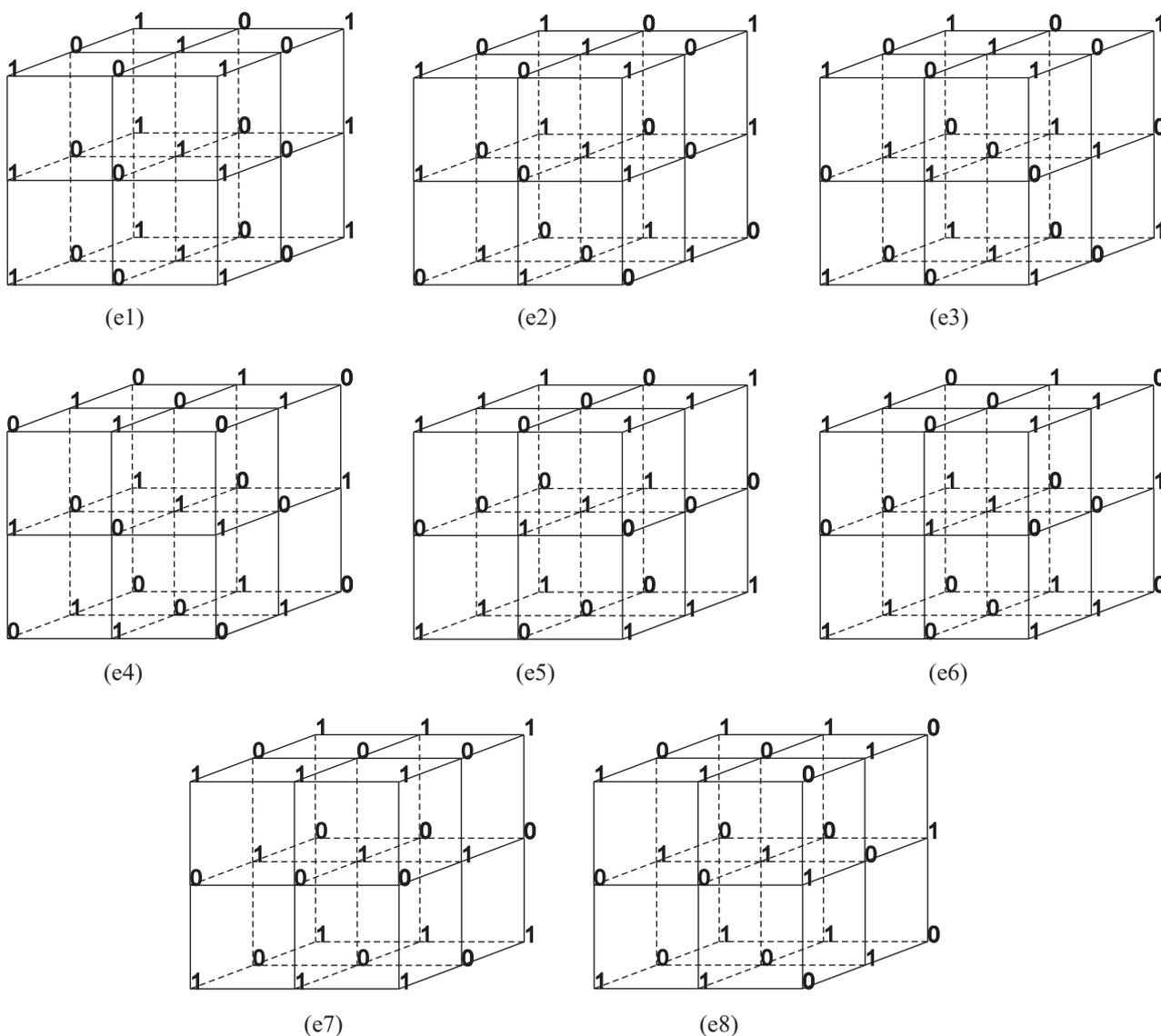


Рис. 6

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Из них любые три являются линейно независимыми. Можно добавить еще че-

тыре вектора, если в e_1, e_2, e_3, e_4 заменить 1 на 0 и 0 на 1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Каждый из этих векторов в сумме с векторами e_1, e_2, e_3, e_4 дает единичный вектор. Таким способом мы переберем все возможные (2^3) наборы чередующихся в направлении x_3 сеток (рис. 6).

Из этих восьми векторов независимыми будут четыре вектора, причем три вектора можно взять, например, из первой четверки, а последний — из второй. В частности, можно взять e_1, e_2, e_3, e_5 (e_5 — вектор, дополняющий e_3).

Аналогично можно построить наборы векторов (“кубики”), чередуя сетки в двух оставшихся направлениях. Каждый раз мы будем получать четверку линейно независимых векторов. При этом векторы e_3, e_5 (со “строго чередующимися” сетками) будут входить во все четверки. Полученные восемь векторов будут линейно независимы и образовывать базис. Этот результат также согласуется с результатом SVD-разложения.

Полученные результаты для $N = 2^3$ и $N = 3^3$ подсказывают способ построения ядра для произвольного $N = n^3$, где n — количество узлов по p по каждому направлению сетки.

Утверждение [3]. *Размерность ядра оператора B не меньше, чем $3n - 1$ (т.е. $\dim \ker B \geq 3n - 1$).*

Докажем данное утверждение. Для оценки размерности ядра B в трехмерном случае будем опираться на знание ядра оператора B в плоском случае.

Можно представить ядро $\ker B$ в виде $\ker B_x^3 \cap \ker B_y^3 \cap \ker B_z^3$, где $\ker B_x^3$ — набор векторов $p_{i,j,k}$, удовлетворяющих уравнению

$$p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} + p_{i,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k} + p_{i,j,k-1} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i,j-1,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} = 0, \quad (11)$$

т.е. трехмерному разностному аналогу уравнения $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Чтобы вектор $p_{i,j,k}$ принадлежал $\ker B_y^3$ и $\ker B_z^3$, для набора $p_{i,j,k}$ должны выполняться уравнения

$$p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j-1,k} + p_{i,j,k-1} - p_{i,j-1,k-1} + p_{i-1,j,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} = 0, \quad (12)$$

$$p_{i,j,k} - p_{i,j,k-1} + p_{i,j-1,k} - p_{i,j-1,k-1} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i-1,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k-1} = 0. \quad (13)$$

Пусть $\ker B_x^2$ — набор векторов $p_{i,j,k}$, удовлетворяющих двумерному разностному уравнению $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$:

$$p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} + p_{i,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k} = 0. \quad (14)$$

Уравнение

$$p_{i,j,k-1} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i,j-1,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} = 0 \quad (15)$$

аналогично первому уравнению в (7); оно также является двумерным разностным уравнением $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, но в другой точке. Из (14) и (15) следует (11), т.е. $B_x^3 p = 0$; следовательно, $\ker B_x^2 \subset \ker B_x^3$.

Аналогично имеем $\ker B_y^2 \subset \ker B_y^3$ и $\ker B_z^2 \subset \ker B_z^3$. Следовательно, $\ker B_x^2 \cap \ker B_y^2 \subset \ker B_x^3 \cap \ker B_y^3$, и $\ker B_x^2 \cap \ker B_y^2 \cap \ker B_z^2 \subset \ker B_x^3 \cap \ker B_y^3 \cap \ker B_z^3 = \ker B$.

Рассмотрим $\ker B_{xy}^2 = \ker B_x^2 \cap \ker B_y^2$. Набор векторов $p_{i,j,k}$ удовлетворяет “укороченным” уравнениям (11) и (12), т.е. уравнению (14) и уравнению

$$p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j-1,k} = 0, \quad (16)$$

где $i, j, k = 1, \dots, n$.

Для каждого фиксированного k получаем независимую подсистему из n^2 уравнений для нахождения набора $p_{i,j,k}$, $i, j = 1, \dots, n$. При этом уравнения (14) и (16) соответствуют оператору B в плоском случае, для которого $\ker B = \text{span} (p_{i,j}^{(1)}, p_{i,j}^{(2)})$, т.е. $p_{i,j,k} = \alpha_k p_{i,j}^{(1)} + \beta_k p_{i,j}^{(2)}$, где $i, j = 1, \dots, n$ и k фиксировано. Следовательно, $p \in \ker B_{xy}$ можно представить как $p = (\alpha_1 p^{(1)} + \beta_1 p^{(2)}, \alpha_2 p^{(1)} + \beta_2 p^{(2)}, \dots, \alpha_n p^{(1)} + \beta_n p^{(2)}) \in \mathbb{R}^n$ (каждая компонента имеет размерность n^2).

Можно дать следующую геометрическую интерпретацию: вектор $p = (p_{i,j,k})$, $i, j, k = 1, \dots, n$, можно представить как последовательность “слоев”, где каждый слой — матрица размером $n \times n$.

Векторы $p_{i,j}^{(1)}$ и $p_{i,j}^{(2)}$ представимы в виде $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$. При фиксированном k “слой” $p_{i,j,k}$ приобретает вид

$\begin{matrix} \alpha_k & \beta_k & \alpha_k & & & \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & & & \end{matrix}$. Весь вектор $p_{i,j,k}$, представленный своими значениями по “слоям”, имеет вид $\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 \end{matrix}$,

$\begin{matrix} \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2 & & \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix}$. Теперь построим $\ker B_{xy}^2 \cap \ker B_z^3$. Среди векторов $\ker B_{xy}^2$ нужно найти такие, которые удовлетворяют уравнению $B_z^3 p = 0$ (т.е. уравнению (13)). Для векторов $p_{i,j,k} \in \ker B_{xy}^2$ система приобретает вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2 &= 0, \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \beta_2 - \beta_3 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1} - \alpha_n + \beta_{n-1} - \beta_n &= 0. \end{aligned}$$

Мы получаем систему из $n - 1$ уравнений для $2n$ неизвестных. Ей соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что первые $(n - 1)$ столбцов матрицы линейно независимы, т.е. ранг системы равен $(n - 1)$. Таким образом, размерность равна $\ker B_{xy}^2 \cap \ker B_z^3$, т.е. размерность пространства решения системы равна $2n - (n - 1) = n + 1$.

Необходимо построить базис для $\ker B_{xy}^2 \cap \ker B_z^3$. Векторы $p \in B_{xy}^2$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 p^{(1)} + \beta_1 p^{(2)}, \alpha_2 p^{(1)} + \beta_2 p^{(2)}, \dots, \alpha_n p^{(1)} + \beta_n p^{(2)}) = \\ & = \text{span} \left\{ (p^{(1)}, \alpha_2 p^{(1)} + \beta_2 p^{(2)}, \dots, \alpha_n p^{(1)} + \beta_n p^{(2)}), (p^{(2)}, \alpha_2 p^{(1)} + \beta_2 p^{(2)}, \dots, \alpha_n p^{(1)} + \beta_n p^{(2)}) \right\} = \\ & = \text{span} \left\{ (p^{(1)}, p^{(1)}, \alpha_3 p^{(1)} + \beta_3 p^{(2)}, \dots), (p^{(1)}, p^{(2)}, \alpha_3 p^{(1)} + \beta_3 p^{(2)}, \dots), \right. \\ & \quad \left. (p^{(2)}, p^{(1)}, \alpha_3 p^{(1)} + \beta_3 p^{(2)}, \dots), (p^{(2)}, p^{(2)}, \alpha_3 p^{(1)} + \beta_3 p^{(2)}, \dots) \right\} \end{aligned}$$

и т.д., т.е. B_{xy}^2 является линейной оболочкой системы векторов вида $(p^{(\alpha_1)}, p^{(\alpha_2)}, \dots, p^{(\alpha_n)})$, $\alpha_i \in \{1, 2\}$. Уравнение (13) для таких векторов выполняется тождественно. Количество этих векторов равно 2^n . Постараемся найти минимальную подсистему векторов, линейная оболочка которых совпадает с линейной оболочкой всей системы. Совокупность этих векторов (база данной системы векторов) и будет базисом ядра.

Поставим вектору $\bar{p} = (p^{(\alpha_1)}, p^{(\alpha_2)}, \dots, p^{(\alpha_n)})$ в соответствие вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i = 1, 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Надо добавить нулевой столбец, поскольку он не может быть получен

из этих n столбцов. Можно исключить любые два вектора из базиса и добавить векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}$,

где 0 и 1 строго чередуются. Получаем два кубика $e1$ и $e2$ регулярной структуры (рис. 7). Аналогичные рассуждения можно провести для B_{xz}^2 и B_{yz}^2 .

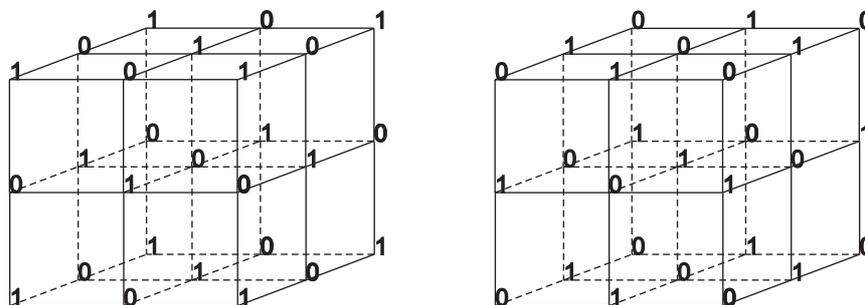


Рис. 7

Введем следующие обозначения:

$$M_{xy} = \ker B_x^2 \cap \ker B_y^2 \cap \ker B_z^3, \quad M_{xz} = \ker B_x^2 \cap \ker B_z^2 \cap \ker B_y^3, \quad M_{yz} = \ker B_y^2 \cap \ker B_z^2 \cap \ker B_x^3.$$

Вектор p будет принадлежать базису пространства M_{xy} , если только в направлениях x и y строго чередуются 0 и 1, т.е. в направлениях x и y этот вектор имеет “регулярную” структуру. Аналогично, вектор p принадлежит базису M_{xz} , если он обладает регулярной структурой в направлениях x и z .

Следовательно, $M_{xy} \cap M_{xz} = \{e1, e2\}$, $M_{xz} \cap M_{yz} = \{e1, e2\} \implies M_{xy} \cap M_{xz} \cap M_{yz} = \{e1, e2\}$ и

$$\dim (M_{xy} \cup M_{xz} \cup M_{yz}) = \dim (M_{xy}) + \dim (M_{xz}) + \dim (M_{yz}) - \dim (M_{xy} \cap M_{xz}) - \dim (M_{xz} \cap M_{yz}) - \dim (M_{xy} \cap M_{yz}) + \dim (M_{xy} \cap M_{xz} \cap M_{yz}) = 3(n+1) - 3 \cdot 2 + 2 = 3n - 1.$$

Так как $(M_{xy} \cup M_{xz} \cup M_{yz}) \subset \ker B$, получаем

$$\dim \ker B \geq \dim (M_{xy} \cup M_{xz} \cup M_{yz}) = 3n - 1. \quad (17)$$

Следовательно, в трехмерном случае ядро $\ker B$ содержит по меньшей мере $3n - 1$ линейно независимых векторов. Утверждение доказано.

3. Численные результаты. Найдем размерность ядра оператора B численно в двух и трехмерном случаях. Для этого воспользуемся сингулярным разложением (SVD) матрицы.

SVD-разложение является наиболее надежным методом, позволяющим вычислить размерности и определить базисы образа и ядра линейного оператора [1, 2]. Сингулярным разложением действительной матрицы A размерности $m \times k$ называется всякая ее факторизация вида $A = V\Sigma W^*$, где V — ортогональная ($m \times m$)-матрица, W — ортогональная ($k \times k$)-матрица, а Σ — диагональная ($m \times k$)-матрица с неотрицательными диагональными элементами σ_i , которые называются сингулярными числами матрицы A . Ранг произвольной матрицы A равен рангу диагональной матрицы Σ в ее сингулярном разложении.

С помощью численного построения SVD-разложения нами было проведено исследование ядра оператора B . Для плоского случая размерность ядра была равна 2. Для трехмерного случая численно получена следующая зависимость: $\dim \ker B = 3n - 1$, где n — число узлов для давления по каждому из направлений. Расчеты были проведены для $n = 2, \dots, 6$. Сравнивая результаты расчетов с оценкой (17), мы можем предположить, что в данном случае вместо неравенства имеет место равенство $\dim \ker B = 3n - 1$, и, следовательно, нами был найден базис в $\ker B$.

4. Заключение. Для разностной аппроксимации задачи Стокса на полуразнесенных сетках в работе найдена структура ядра дискретного аналога оператора градиента в плоском и трехмерном случаях. В отличие от двумерного случая, в трехмерном случае размерность ядра растет при уменьшении шага сетки с порядком $O(h^{-1})$. Результаты численных экспериментов позволяют предположить, что полученная оценка размерности ядра является точной. Рост размерности ядра делает численные методы, основанные на ортогонализации к ядру, менее пригодными для решения задачи Стокса на полуразнесенных сетках в трехмерном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голуб Д. Матричные вычисления. М.: Мир, 2001.
2. Каханер Д., Молер К., Нэш С. Численные методы и математическое программное обеспечение. М.: Мир, 1998.
3. Муравлева Е.А. Исследование вырожденной схемы для задачи Стокса // Тр. XXVIII конф. молодых ученых механико-математического факультета МГУ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006.
4. Чижонков Е.В. Релаксационные методы решения седловых задач. М.: ИВМ РАН, 2002.
5. Boland J.M., Nicolaidides R.A. On the stability of bilinear-constant velocity-pressure finite elements // Numer. Math. 1984. **44**. 219–222.
6. Vincent C., Baret G. On the stability of the Stokes operator discretized by the Q1-P0 finite element method // Commun. Numer. Meth. Eng. 1998. **14**. 959–961.
7. Dai X., Cheng X. The iterative penalty method for Stokes equations using Q1-P0 element // Appl. Math. Comput. 2008 (doi: 10.1016/j.amc.2007.11.041).

Поступила в редакцию
27.03.2008