УДК 523.1

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ АНАЛИТИЧЕСКИМ И ЧИСЛЕННЫМ ПОДХОДАМИ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. А. Грачев[1]

Рассматриваются два простейших стохастических дифференциальных уравнения: уравнение Якоби $y'' + K(x)y = 0$ со случайным коэффициентом $K(x) = K(x, \omega)$ и уравнение $y' = a(x)y$ со случайным коэффициентом $a(x) = a(x, \omega)$. На примере этих модельных уравнений рассматривается вопрос о соотношении между аналитическим и численным подходами к исследованию решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Обсуждаются преимущества каждого из указанных подходов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07–02–00127).

Ключевые слова: уравнение со случайными коэффициентами, численное моделирование, стохастические дифференциальные уравнения

1. Введение. Стохастические дифференциальные уравнения представляют интерес в нескольких отношениях. В физике они описывают многие процессы и явления в случайных средах [1 – 3]. С точки зрения математики (в первую очередь, вычислительной математики) интересен вопрос о соотношении между аналитическим и численным подходами к исследованию подобных уравнений. Дело в том, что результаты аналитической теории, как правило, носят асимптотический характер и формулируются в виде некоторых предельных утверждений, из которых совершенно неясно, начиная с каких значений асимптотического параметра (например, объема выборки или времени, если речь идет об эволюционной задаче) они справедливы.

Стохастические дифференциальные уравнения обнаруживают многие неожиданные свойства. В частности, исследование линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами нередко усложняется так называемым явлением перемежаемости, заключающимся в появлении очень редких реализаций решения, поведение которых кардинально отличается от поведения типичной реализации, но которые при этом определяют поведение средних величин [1]. Появление таких аномальных реализаций приводит к тому, что различные статистические моменты решения могут расти с разной скоростью [2], при этом выборочно (с вероятностью 1) само решение в некоторой точке может даже убывать. Напомним, что в классической статистической физике средние разных порядков обычно приблизительно равны. Например, в молекулярно-кинетической теории газов такой макроскопический параметр состояния системы, как температура, отождествляется со средней квадратичной скоростью молекул — квадратным корнем из среднего квадрата. Однако можно связать температуру и с другими величинами, например, с $\left\langle |v|^3 \right\rangle^{1/3}$ или с $\left\langle v^4 \right\rangle^{1/4}$, произведя при этом небольшую перенормировку соответствующей шкалы.

Другими словами, статистические моменты разных порядков оказываются примерно равными следующим величинам: $\sqrt{\left\langle v^2 \right\rangle} \approx \sqrt[3]{\left\langle |v|^3 \right\rangle} \approx \sqrt[4]{\left\langle v^4 \right\rangle}$ и т.д.

Решения линейных уравнений со случайными коэффициентами имеют много общих свойств, мало зависящих от конкретного вида уравнения [4], поэтому с целью сравнения данных численного эксперимента с аналитическими результатами естественно выбрать простейшие модельные примеры таких уравнений, которые, тем не менее, отражали бы интересующий нас класс эффектов. В частности, полезно для начала рассмотреть обыкновенные дифференциальные уравнения, хотя в приложениях, как правило, приходится иметь дело с уравнениями в частных производных. В работах [5 – 7] в указанном контексте рассматривалась задача Коши для уравнения Якоби

$$y'' + K(x)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{1}$$

со случайным коэффициентом $K(x) = K(x, \omega)$, которое было предложено Я. Б. Зельдовичем [8] для описания распространения света во Вселенной с неоднородностями. В [9] было проведено численное модели-

[1] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, 119991, Ленинские горы, Москва; e-mail: qdmath@mail.ru

рование задачи Коши для более простого уравнения

$$y' = a(x)y, \quad y(0) = 1 \tag{2}$$

со случайным коэффициентом $a(x) = a(x, \omega)$, а результаты затем сравнивались с некоторыми аналитическими предсказаниями о свойствах его решения из [1].

Оказывается, что в некотором смысле решения уравнений (1) и (2) представляют собой два различных типа решений линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами, которые определяются коммутационными свойствами некоторых алгебраических операторов. У уравнения (1) ожидается экспоненциальный рост типичной реализации решения, тогда как типичная реализация решения уравнения (2) растет лишь субэкспоненциально. При этом уравнения (1) и (2) можно рассматривать как первые приближения в лагранжевом подходе при исследовании более сложных уравнений в частных производных со случайными коэффициентами [9].

Изучение простейших модельных уравнений (1) и (2) позволяет, с одной стороны, получить из численного эксперимента достаточно полную информацию о типичных реализациях и статистических моментах $\langle y^p \rangle$ их решений, а с другой — вывести явные формулы для этих моментов, что трудно сделать для более сложных задач. Цель настоящей работы — провести сопоставление возможностей прямого численного эксперимента с возможностями аналитической теории и сделать некоторые выводы о достоинствах и недостатках каждого из указанных подходов.

2. Случайный процесс с обновлением. Очевидно, что как численное, так и аналитическое изучение уравнений (1) и (2) требует конструктивного описания случайных процессов $K(x)$ и $a(x)$. Мы выбираем это описание, ориентируясь на удобные для этих целей модели случайных процессов с обновлением.

Пусть полупрямая $x \geqslant 0$ разбита на равные отрезки длины δ (корреляционная длина, которая используется в качестве единицы длины, сам же отрезок принято называть интервалом обновления). Далее, пусть процесс $K(x)$ (соответственно, $a(x)$) теряет память точно в точках $x_n = n\,\delta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Это означает, что величины $K_n(x)$ на полусегментах $[0; \delta), \ldots, \big[n\delta; (n+1)\delta\big)$ предполагаются статистически независимыми и имеющими одинаковые статистические характеристики (среднее значение, дисперсию, корреляционную функцию и др.). Кроме того, предполагается статистическая независимость точек обновления от всех процессов $K_n(x)$. Это и есть модель процесса с обновлением. Из-за фиксированных точек обновления такой случайный процесс статистически неоднороден (в масштабах, сопоставимых с δ), а корреляционная функция $\big\langle K(x_1), K(x_2)\big\rangle$ зависит от обеих точек x_1 и x_2.

При численном моделировании решений уравнения Якоби и уравнения (2) ради определенности считалось, что случайные процессы $K(x)$ и $a(x)$ кусочно-постоянны на интервалах обновления, т.е. K_n и a_n являются равномерно распределенными случайными величинами на отрезке $[-1; 1]$ [6, 9]. При этом типичные реализации и статистические моменты решений этих уравнений вычислялись в точках обновления $x_n = n\delta$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Аналитическое исследование уравнений (1) и (2) удобно проводить на основе представления случайных процессов $K(x)$ и $a(x)$ в виде $K(x) = \overline{K} + k(x)$ и $a(x) = \overline{a} + \alpha(x)$, где $\overline{K}$ и $\overline{a}$ — их средние значения, а члены $k(x)$ и $\alpha(x)$ описывают случайные флуктуации. Вывод моментных уравнений осуществляется в рамках так называемой короткокоррелированной модели, когда корреляционная длина δ для случайных коэффициентов считается малой и детали поведения решения на соответствующих масштабах игнорируются. Такой прием общепринят в физической литературе, поскольку лишь при $\delta \to 0$ для $\langle y^p \rangle$ удается получить дифференциальные уравнения, в то время как учет эффектов памяти делает моментные уравнения либо интегральными, либо разностными (алгебраическими) [10], чего хотелось бы избежать. При использовании короткокоррелированных моделей приходится выполнять перенормировку, т.е. считать, что средние $\langle k^2\delta^2 \rangle$ и $\langle \alpha^2\delta \rangle$ при $\delta \to 0$ имеют конечные пределы $\mathcal{K}$ и a_{eff} соответственно. По сути, это означает, что флуктуации $k(x)$ и $\alpha(x)$ остаются значительными, когда $\delta \to 0$, при этом величины $\mathcal{K}$ и a_{eff} можно понимать как эффективные значения случайных процессов $K(x)$ и $a(x)$ [3].

3. Сопоставление численных и аналитических результатов для уравнения (1). Поведение типичной реализации решения уравнения Якоби аналитически исследовано в [11], где доказана теорема о том, что с вероятностью 1 решение уравнения (1), вычисляемое в точках обновления, экспоненциально растет, причем скорость роста (показатель Ляпунова) оказывается неслучайной константой. Аналитически найти показатель Ляпунова не удается, поскольку для этого нужно решить некоторое интегральное уравнение. Оказалось, что численный подход позволяет не только продемонстрировать экспоненциальный рост типичной реализации, но и вычислить показатель Ляпунова, а также оценить время выхода на асимптотику, которое соответствует примерно 50 интервалам обновления, после которых экспоненциальный рост типичной реализации решения уравнения (1) становится устойчивым [6].

Явление перемежаемости, о котором уже говорилось выше, существенно ограничивает возможности прямого численного моделирования моментов решения уравнения Якоби. Дело в том, что ввиду колоссальных объемов выборки, которые приходится использовать в численном эксперименте для демонстрации предсказанного теорией поведения статистических моментов, изучение $\langle y^p \rangle$ при $p > 3$ практически невозможно. Это связано с тем, что прогрессивный рост моментов определяется чрезвычайно редкими, но очень большими значениями реализаций решения $y(x)$. Как показано в [6], чтобы обнаружить прогрессивный рост нормированных моментов $\langle y^p \rangle^{1/p}$, $p = 1, 2, 3$, требуется усреднять порядка 10^5 реализаций решения уравнения (1), и для моделирования моментов с номером выше 3 потребовалось бы чересчур большое количество реализаций, явно недостижимое в прямом численном эксперименте.

В рамках аналитического подхода удается исследовать статистические моменты произвольного натурального порядка p (см. [12]). Приведем соответствующие уравнения для $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ и $p = 4$:

$$\langle y \rangle'' + \left(\overline{K} - \frac{1}{6}\mathcal{K}\right)\langle y \rangle = 0, \tag{3}$$

$$\langle y^2 \rangle'' + 4\left(\overline{K} - \frac{1}{3}\mathcal{K}\right)\langle y^2 \rangle = 0, \tag{4}$$

$$\langle y^3 \rangle'''' + 10\left(\overline{K} - \frac{1}{2}\mathcal{K}\right)\langle y^3 \rangle'' + 9\left(\overline{K} - \frac{1}{2}\mathcal{K}\right)^2\langle y^3 \rangle = 0, \tag{5}$$

$$\langle y^4 \rangle'''' + 20\left(\overline{K} - \frac{2}{3}\mathcal{K}\right)\langle y^4 \rangle'' + 64\left(\overline{K} - \frac{2}{3}\mathcal{K}\right)^2\langle y^4 \rangle = 0. \tag{6}$$

Уравнение (3) было получено в [3]; о выводе (4) – (6) см. [12]. Как можно видеть, статистические моменты даже при $\overline{K} = 0$ экспоненциально растут, причем скорость роста γ_p момента $\langle y^p \rangle^{1/p}$ тем больше, чем больше его порядок p.

Сравним теперь скорости роста статистических моментов, полученные аналитически, с соответствующими скоростями роста, полученными из численного эксперимента. Трудность состоит в том, что фигурирующий в аналитической теории случайный процесс является обобщенной случайной функцией, а фигурирующий в численном эксперименте процесс является кусочно-постоянной случайной функцией с конечным (хотя и малым) временем обновления. Чтобы обойти эту трудность, поступим следующим образом. Положив $\overline{K} = 0$, составим и решим характеристические уравнения, соответствующие уравнениям (3) – (6), после чего рассмотрим отношения показателей скоростей роста $\dfrac{\gamma_p}{\gamma_{p+1}}$ двух следующих друг за другом моментов. Относительная величина $\dfrac{\gamma_p}{\gamma_{p+1}}$ уже не зависит от $\mathcal{K}$, и ее можно сравнивать с отношением соответствующих показателей, полученных из численного эксперимента. Численные значения для показателей скоростей роста взяты из [6], где они были получены усреднением 10^5 реализаций решения уравнения (1). Сопоставление результатов численного и аналитического подходов отражено в табл. 1.

Таблица 1

Основные характеристики роста статистических моментов $\langle y^p \rangle^{1/p}$ решения уравнения Якоби при $p = 1, 2, 3, 4$

Способ получения	Скорости роста моментов				Отношения скоростей		
	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_1/γ_2	γ_2/γ_3	γ_3/γ_4
Аналитический	$\sqrt{\frac{1}{6}\mathcal{K}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}\mathcal{K}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{K}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}\mathcal{K}}$	0.71	0.82	0.87
Численный	0.0395	0.0516	0.0611	—	0.76	0.84	—

Видно, что в тех пределах, в которых прямой численный эксперимент позволяет исследовать моменты решения уравнения (1), его результаты с хорошей точностью совпадают с результатами, полученными аналитически. Вместе с тем, напомним, что в численном и аналитическом подходах используются принципиально разные модели с обновлением: при выводе уравнений (3) – (6) используется короткокоррелированное приближение, когда корреляционная длина δ устремляется к нулю, тогда как в численном эксперименте ее величина остается постоянной, т.е. $\delta = \text{const}$. Поэтому детальное количественное совпадение результатов теории и численного эксперимента может и не достигаться.

4. Сопоставление численных и аналитических результатов для уравнения (2). Обратимся теперь к уравнению (2). Нетрудно заметить, что в силу кусочного постоянства a решение в n-й точке обновления можно найти как произведение случайных чисел, а именно экспонент от a_n. Как следует из центральной предельной теоремы, такая конструкция при обращении в нуль среднего значения a растет как $\exp \zeta\sqrt{n}$, где ζ — гауссовская случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. В работе [9] субэкспоненциальный рост типичной реализации решения уравнения (2) был подтвержден численным экспериментом.

Получим теперь уравнения для статистических средних $\langle y^p \rangle$ решения уравнения (2). Умножим левую и правую части этого уравнения на $py^{p-1} \not\equiv 0$:

$$py^{p-1}\,\frac{dy}{dx} = pay^p \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d(y^p)}{dx} = pay^p,$$

откуда получаем $\dfrac{d}{dx}\Big[\ln\big(y^p\big)\Big] = pa$. Считая, что x — точка обновления, проинтегрируем последнее уравнение от x до $x+\delta$:

$$\ln\big(y^p\big)\Big|_x^{x+\delta} = pa\delta \quad \Longleftrightarrow \quad y^p(x+\delta) = y^p(x)\exp\,(pa\delta).$$

Разлагая экспоненту в ряд с точностью до первых неисчезающих членов, получим

$$y^p(x+\delta) = y^p(x)\bigg(1 + pa\delta + \frac{1}{2}\,p^2a^2\delta^2 + \ldots\bigg), \quad \text{или} \quad \frac{y^p(x+\delta) - y^p(x)}{\delta} = y^p(x)\bigg(pa + \frac{1}{2}\,p^2a^2\delta + \ldots\bigg),$$

откуда после усреднения и предельного перехода при $\delta \to 0$ получаем следующее семейство моментных уравнений, зависящих от порядка p:

$$\frac{d}{dx}\,\big\langle y^p\big\rangle - \big(p\,\overline{a} + \frac{1}{2}\,p^2\,a_{\text{eff}}\big)\big\langle y^p\big\rangle = 0. \tag{7}$$

Из (7) следует, что при $\overline{a} = 0$ нормированные статистические моменты $\big\langle y^p\big\rangle^{1/p}$ решения уравнения (2) экспоненциально растут со скоростью

$$\gamma_p = \frac{1}{2}\,p\,a_{\text{eff}}, \tag{8}$$

которая тем больше, чем больше номер самого момента. Подобное поведение по-прежнему связано с явлением перемежаемости, когда маловероятные, но очень большие “всплески” реализаций решения $y(x)$ оказывают доминирующее влияние на рост средних высшего порядка (напомним, что у типичной реализации решения уравнения (2) экспоненциального роста не наблюдается).

Прогрессивный рост моментов $\big\langle y^p\big\rangle^{1/p}$ подтвержден численно [9]. Как и следовало ожидать, для воспроизведения эффектов перемежаемости в рамках уравнения (2) требуются гораздо меньшие объемы выборки, чем для численного моделирования моментов решения уравнения Якоби — достаточно взять примерно 10^3 реализаций решения уравнения (2), чтобы обнаружить экспоненциальный рост высших статистических моментов. Однако и такой объем выборки на сегодняшний день явно недостижим для прямого численного моделирования более сложных уравнений, например уравнений в частных производных со случайными коэффициентами. Вместе с тем, повышение порядка исследуемого в численном эксперименте момента всегда требует увеличения объема выборки, тогда как аналитический подход, как следует из (7), позволяет работать с моментами любого порядка p.

В табл. 2 иллюстрируется сравнение скоростей роста статистических моментов, полученных аналитически, с соответствующими скоростями, полученными из численного эксперимента. По-прежнему сравниваются отношения показателей скоростей роста $\dfrac{\gamma_p}{\gamma_{p+1}}$ двух следующих друг за другом моментов, которые не зависят от величины a_{eff}. Численные значения для этих показателей мы взяли из [9], где они были получены усреднением 10^5 реализаций решения уравнения (2).

Как и в случае уравнения Якоби, можно заключить, что с достаточно хорошей точностью аналитически полученные результаты подтверждаются численным экспериментом.

5. Обсуждение. На примере рассмотренных модельных уравнений мы обнаружили, что аналитический подход при изучении статистических моментов имеет существенные преимущества перед численным моделированием, поскольку позволяет исследовать моменты решения любого наперед заданного натурального порядка. С другой стороны, аналитика допускает лишь качественные предсказания о поведении типичной реализации решения, которые к тому же носят асимптотический характер, поэтому численный

Таблица 2

Основные характеристики роста статистических моментов $\langle y^p \rangle^{1/p}$ решения уравнения (2) при $p = 1, 2, 3, 4$

Способ получения	Скорости роста моментов				Отношения скоростей		
	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_1/γ_2	γ_2/γ_3	γ_3/γ_4
Аналитический	$\frac{a_{\text{eff}}}{2}$	a_{eff}	$\frac{3a_{\text{eff}}}{2}$	$2a_{\text{eff}}$	0.5	0.67	0.75
Численный	0.16	0.29	0.39	—	0.55	0.74	—

подход в этом случае следует признать более информативным. В целом можно заключить, что при исследовании дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами методы аналитической теории и методы численного моделирования взаимно дополняют друг друга.

Обратим внимание на то, что с увеличением p скорости роста γ_p и γ_{p+1} двух следующих друг за другом моментов все более сближаются. Так, из (8) следует, что $\dfrac{\gamma_p}{\gamma_{p+1}} \to 1$ при $p \to +\infty$. Несколько более тонкое исследование показывает, что это асимптотическое соотношение имеет место и для скоростей роста моментов решения уравнения (1). Мы интерпретируем этот факт как указание на то, что эффекты перемежаемости, выражающиеся в виде аномально редких, но очень сильных "пиков" в поведении некоторых реализаций решений уравнений (1) и (2), оказывают серьезное влияние лишь на моменты достаточно низких порядков. Ограниченность этих "пиков" следует в реальных задачах из тех или иных физических соображений (например из того, что скорость случайного потока не может быть бесконечной [2]).

Автор выражает благодарность Д. Д. Соколову за оказанную поддержку и сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Перемежаемость в случайной среде // Успехи физ. наук. 1987. **152**, № 1. 3–32.
2. *Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Кинематическое динамо в случайном потоке // Успехи физ. наук. 1985. **145**, № 4. 593–628.
3. *Lamburt V.G., Sokoloff D.D., Tutubalin V.N.* Light propagation in a Universe with spatial inhomogeneities // Astrophysics and Space Science. 2005. **298**. 409–418.
4. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* The almightly chance. Singapore: World Scientific, 1991.
5. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование распределения сопряженных точек на геодезической со случайной кривизной // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. 172–177.
6. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрон. ж. 2005. **82**, № 7. 584–589.
7. *Artyushkova M.E., Sokoloff D.D.* Modelling small-scale dynamo by the Jacobi equation // Magnetohydrodynamics. 2006. **42**, № 1. 3–19.
8. *Зельдович Я.Б.* Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // Астрон. ж. 1964. **41**. 19–24.
9. *Грачев Д.А., Соколов Д.Д.* Численное моделирование роста мультипликативных случайных величин // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**, № 1. 5–9.
10. *Грачев Д.А.* Влияние эффектов памяти в задаче о распространении света во Вселенной с неоднородностями // Вестн. Моск. ун-та. Серия 3. Физика. Астрономия. 2008. **1**. 16–19.
11. *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Матем. заметки. 2003. **74**, № 3. 416–424.
12. *Грачев Д.А., Соколов Д.Д.* Высшие статистические моменты решения уравнения Якоби со случайной кривизной // Тр. V Всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи". Часть 3. Самара, 2008. 83–86.

Поступила в редакцию
06.06.2008