

УДК 533.6

**СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В КАНАЛАХ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ
МОДЕЛИ НАВЬЕ–СТОКСА**

С. Б. Березин¹, Е. С. Комарова¹, В. М. Пасконов¹

Проведены численные исследования нестационарных трехмерных турбулентных течений воздуха в каналах прямоугольного сечения в рамках классической модели Навье–Стокса на основе системы уравнений, сохраняющих прямую и обратную связь динамических уравнений, уравнения энергии и уравнения состояния. Для этой системы уравнений разработан новый вычислительный разностный метод, ориентированный на использование суперкомпьютеров с общей памятью и позволяющий вести расчеты на сетках с миллионами узлов. Создана система компьютерного анализа результатов расчетов на основе 16-процессорного суперкомпьютера IBM “Regatta”. Проведены расчеты в каналах прямоугольного сечения при числе Рейнольдса $Re = 500$. Разработана вычислительная методика для определения энергии, создаваемой трением о стенки каналов, и энергии взаимодействия турбулентных структур при фиксированных моментах времени. Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 07–01–00288а и 08–01–00463).

Ключевые слова: нестационарные турбулентные течения, классическая модель Навье–Стокса, уравнения движения, уравнение энергии, уравнение неразрывности, метод покоординатного расщепления, суперкомпьютерное моделирование, энергия турбулентных структур.

Настоящая статья посвящена численному исследованию развития течения воздуха в каналах прямоугольного сечения в приближении вязкой несжимаемой жидкости. Течение возникает при инъекции воздуха на входе в канал, который в начальный момент времени заполнен воздухом. На основе численных экспериментов показана возможность расчета турбулентных нестационарных трехмерных течений воздуха в каналах прямоугольного сечения при числе Рейнольдса $Re = 500$. Расчеты выполнены на кубических сетках. Точность решения определялась максимумом модуля от дивергенции скорости по общему объему каждой кубической ячейки и была не хуже 0,0001 по всем ячейкам на каждом временном слое. Представлены графические результаты в виде векторных полей компонент скорости, обсуждается развитие и взаимодействие турбулентных структур.

1. Введение. Проблема численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости на основе модели Навье–Стокса привлекала внимание многих исследователей начиная с 70-х годов прошлого столетия [1, 2]. Это непосредственно связано с вопросом: возможно ли на основе уравнений Навье–Стокса проводить численное исследование турбулентных течений? Так почти буквально формулировал эту проблему академик Георгий Иванович Петров. С появлением в нашей стране первых ЭВМ он сразу же понял, что их использование даст мощный толчок в развитии механики сплошной среды. В 1957 г. в Вычислительном центре МГУ он возглавил новое научное направление, которое теперь называется вычислительной аэрогидродинамикой (сокращенно ВАГД, в англоязычной литературе — CFD). Следует подчеркнуть, что Георгий Иванович отнюдь не фетишизировал ЭВМ, хорошо понимая, что для решения сложных аэрогидродинамических задач необходимо привлекать весь арсенал средств: и численные методы, и аналитические подходы, и натурный эксперимент. Вычислительная техника в то время позволяла численно исследовать только двумерные течения. Особое внимание уделялось задачам моделирования обтекания тел вязким теплопроводным газом при числе Маха $M > 1$ с использованием модели Навье–Стокса [3]. В этих задачах теплопередача играет существенную роль.

В работе [4] был предложен и реализован метод численного исследования течений вязкой несжимаемой жидкости в рамках классической модели Навье–Стокса на основе системы уравнений, сохраняющих прямую и обратную связь динамических уравнений и уравнения энергии и при численных расчетах

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; e-mail: s_berezin@cs.msu.ru, i_lena@bk.ru, paskonov@cs.msu.ru

обеспечивающих высокую точность выполнения закона сохранения массы. Такая система уравнений получается из полной системы уравнений Навье–Стокса для вязкой сжимаемой жидкости, состоящей из трех уравнений количества движения, уравнения неразрывности, уравнения энергии, записанного относительно температуры, и уравнения состояния. Система уравнений замкнутая: в ней шесть уравнений и шесть неизвестных. Если в этой системе предположить, что плотность постоянна, то уравнение состояния дает линейную связь давления и температуры; следовательно, существует проблема выбора: одно из пяти дифференциальных уравнений необходимо при расчете отбросить. При отбрасывании уравнения энергии теряется и уравнение состояния, а в результате — классический подход: описание изотермического течения с давлением, которое находится из уравнения Пуассона. Более естественно, на наш взгляд, вести расчеты задач на основе системы уравнений количества движения и уравнения энергии, которые выводятся, как известно [1, 5], с использованием закона сохранения массы, выполняющегося вследствие этого с достаточно высокой точностью при расчетах.

2. Постановка задачи. Рассматриваются каналы прямоугольного сечения длиной $L_x = 2$, шириной $L_z = 2$ и высотой $L_y = 1$ и $L_y = 0,5$, заполненные в начальный момент времени покоящейся вязкой несжимаемой жидкостью (рис. 1).

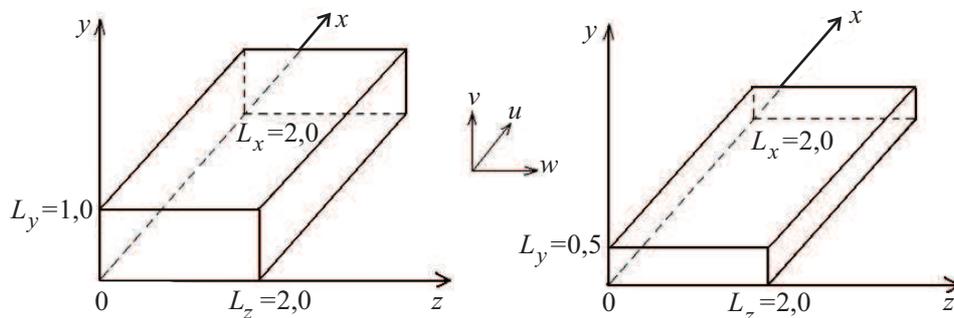


Рис. 1. Постановка задачи

Предполагается, что в начальный момент времени канал находится в затопленном пространстве и заполнен такой же жидкостью. Течение в канале возникает за счет инжекции такой же жидкости по всему входному сечению канала при $x = 0$. В качестве характерной скорости выбрана максимальная скорость инжектируемой жидкости при $x = 0$. При этом предполагается, что по всему входному сечению скорость и температура (давление) постоянны и поддерживаются в течение всего нестационарного процесса расчета.

Для расчетов использовалась система уравнений, полученная из полной системы уравнений Навье–Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного совершенного газа, записанной в безразмерных величинах [2], где плотность, давление и температура соотносятся к соответствующим величинам в инжектируемом потоке. Предполагается, что коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности постоянны, массовые силы отсутствуют, плотность постоянна и равна 1, что приводит к линейной связи температуры и давления. Полная система уравнений в безразмерных величинах, состоящая из трех уравнений количества движения и уравнения энергии, которое применяется для определения давления (в силу линейной связи температуры и давления), дает возможность определить решение поставленной задачи с использованием уравнения неразрывности в качестве контрольного соотношения. Таким образом, расчеты проводились на основе системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{\text{Re}} \Phi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Здесь введены общепринятые обозначения: t — время; u , v и w — компоненты вектора скорости по координатным осям x , y и z соответственно; p — давление; T — температура; параметр подобия — число Рей-

нольдса $Re = \frac{V'L'}{v'}$; число Прандтля и показатель адиабаты взяты для воздуха: $Pr = 0,72$ и $\gamma = \frac{c'_p}{c'_v} = 1,4$.

Штрихованные величины относятся к инжектируемому потоку при $x = 0$. Давление и температура связаны уравнением состояния; так как уравнения рассматриваются для безразмерных величин при постоянной плотности, уравнение для связи температуры и давления имеет вид $p = T$. Диссипативная функция Φ представляется в форме

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2.$$

В качестве характерного линейного размера выберем высоту канала $L_y = 1$. Таким образом, основным параметром задачи является число Рейнольдса, а также длина канала L_x и ширина канала L_z . Предполагая, что рассматриваются дозвуковые течения воздуха, примем скорость звука $a = 0,333$. Изменяя этот параметр задачи, можно исследовать течения других несжимаемых жидких сред.

Как было сказано выше, в начальный момент времени $t = 0$ канал заполнен покоящейся вязкой несжимаемой жидкостью. Течение в канале возникает и поддерживается за счет инжекции такой же жидкости при $x = 0$ по всему начальному сечению канала: $u = 1, v = w = 0, T = 1$ для $t \geq 0$. В качестве граничных условий на стенках канала использовались условия прилипания $u = v = w = 0$ и условие теплоизоляции для температуры, которые для давления также имеют естественную физическую интерпретацию: $\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0$. В плоскости выходного сечения канала $x = L_x$ использовались

“мягкие” граничные условия для всех искомым функций: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$.

3. Численный метод решения задачи. Для численного решения сформулированной задачи использовался широко известный вычислительный метод покоординатного расщепления [6] для системы уравнений (1)–(4). Диссипативная функция представлялась в виде: $\Phi = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z$, где

$$\begin{aligned} \Phi_x &= 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \Phi_y &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \Phi_z &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Процесс расчета при переходе от предыдущего временного слоя к последующему осуществлялся в три этапа на дробных временных слоях: на первом из них решалась система четырех уравнений разностным методом для “ x -расщепления”, на втором этапе — соответствующая система “ y -расщепления”, на третьем этапе — на следующем временном слое — система “ z -расщепления”. На каждом из этих этапов проводились итерации по нелинейности с использованием уже полученных значений на предыдущем дробном шаге. В результате на следующем временном слое получалось только первое приближение решения. Окончательное решение на временном слое вычислялось с помощью последующих “глобальных” итераций, содержащих внутри все три этапа расщепления со своими внутренними итерациями. Следует отметить, что число “глобальных” итераций по нелинейности всегда превышало число итераций на дробных шагах. Точность решения проверялась путем вычисления максимума модуля интеграла от дивергенции вектора скорости по объему каждой кубической ячейки трехмерной сетки и была не хуже 0,0001 по всем ячейкам.

Описанный численный метод был реализован в программе на языке Си и применялся для расчетов на 16-процессорном вычислительном комплексе “Regatta” с использованием технологии OpenMP [7].

4. Течение вязкой несжимаемой жидкости в каналах прямоугольного сечения. Расчеты были проведены для канала длины $L_x = 2$, высоты $L_y = 1$, ширины $L_z = 2$ на сетке $201 \times 101 \times 201$ при числе Рейнольдса $Re = 500$. При этом максимум модуля интеграла от дивергенции по всем ячейкам сетки не превышал 0,000041, что показывает высокую точность соответствия закону сохранения массы.

На рис. 2 при $t = 1,0$ приводятся поверхности продольной компоненты скорости u и поперечной составляющей скорости w над плоскостью сечения канала для различных значений x , по которым можно судить о том, как развивается возмущение вдоль канала.

В начале канала происходит формирование “параболоида u ” на прямоугольном основании, при этом максимальное значение продольной составляющей скорости остается в центральной части канала равным

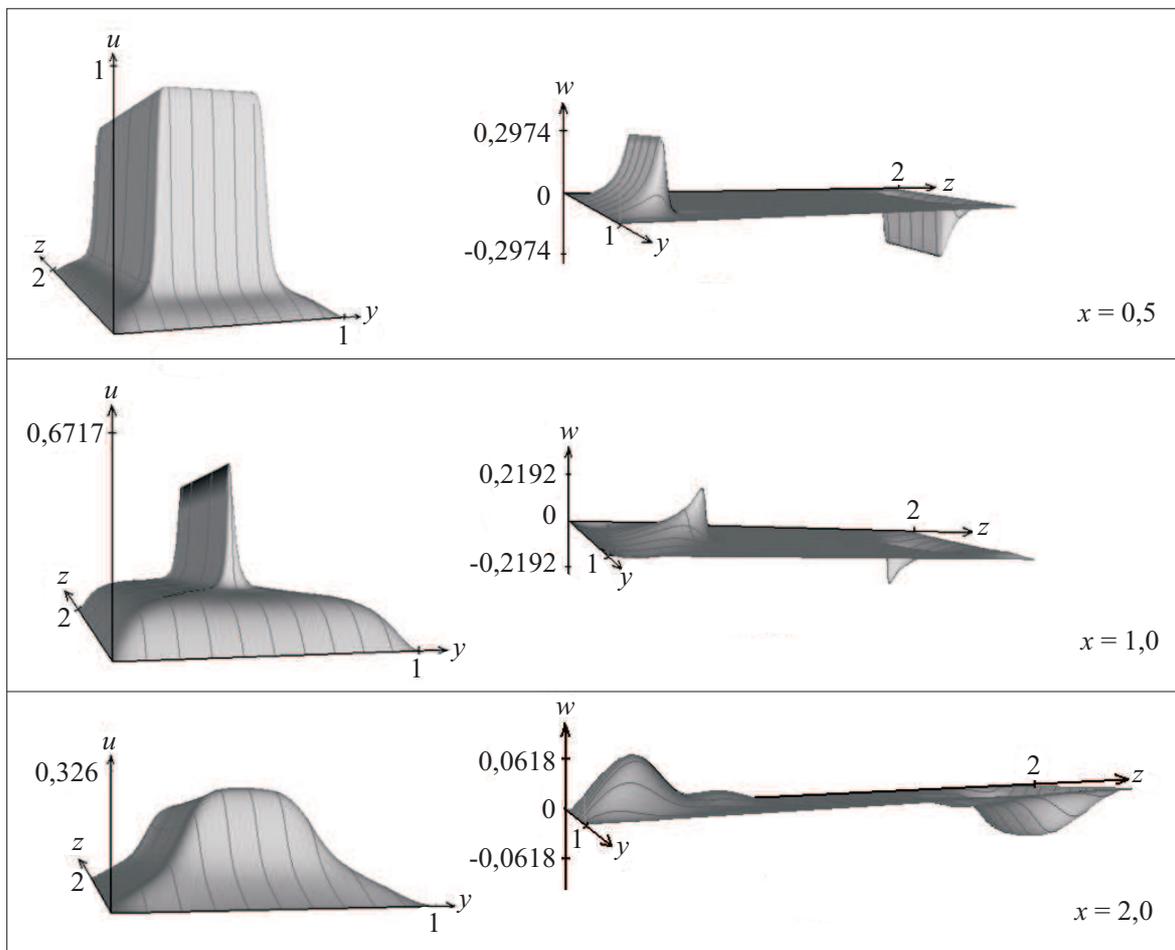


Рис. 2. Продольная и поперечная компоненты скорости при $t = 1,0$ для канала прямоугольного сечения линейных размеров $L_x = 2$, $L_y = 1$, $L_z = 2$

$u = 1,0$. После $x = 0,8$ с увеличением x начинается уменьшение u по всему сечению канала, меняется конфигурация поверхности “параболоида” (при $x = 1,0$). При дальнейшем увеличении x “параболоид” становится более наполненным, максимальная величина продольной составляющей скорости в центре канала с увеличением x продолжает расти и в конце канала достигает значения $u = 0,326$ при $t = 1,0$.

На рис. 3 представлены поля поперечных компонент скорости при $t = 1,0$ для канала длины $L_x = 2$, высоты $L_y = 1$, ширины $L_z = 2$ при числе Рейнольдса $Re = 500$. Векторы изображены в виде вытянутых треугольников, цвет которых меняется от белого (минимальное значение величины вектора) до черного (максимальное значение). В отличие от канала квадратного сечения [8, 9], в случае прямоугольного канала нет симметрии относительно диагоналей прямоугольного сечения [10–12], но остается “антисимметрия” относительно прямых, попарно соединяющих середины противоположных боковых сторон прямоугольника.

Максимальные значения величин векторов находятся в центральной части прямоугольника, а минимальные — вблизи стенок канала. При $x > 1,25$ формируются устойчивые вихревые структуры. Векторы полной скорости имеют общее направление вдоль канала. Определяющую роль в формировании турбулентных вихревых структур течения играет их развитие вдоль биссектрис угловых зон, экспериментальному изучению которых посвящены некоторые разделы монографии [10]. При $x = 1,25$ при $t = 1,0$ формируется устойчивая структура, в которой образуются около боковых сторон вихревые структуры, величины скорости в которых незначительны. Вдоль горизонтальных границ сечения образуются вытянутые структуры, где скорости имеют небольшие значения противоположного направления. Под влиянием мягких граничных условий на выходном сечении канала ярко выраженные вихревые структуры в углах затухают, но остается “антисимметрия” течения. Величина максимальной составляющей скорости u на выходе из канала со временем начинает незначительно уменьшаться (при $t = 3,0$, $u = 0,13$). Это свидетельствует о процессе выплескивания жидкости из канала при течении жидкости с такой небольшой

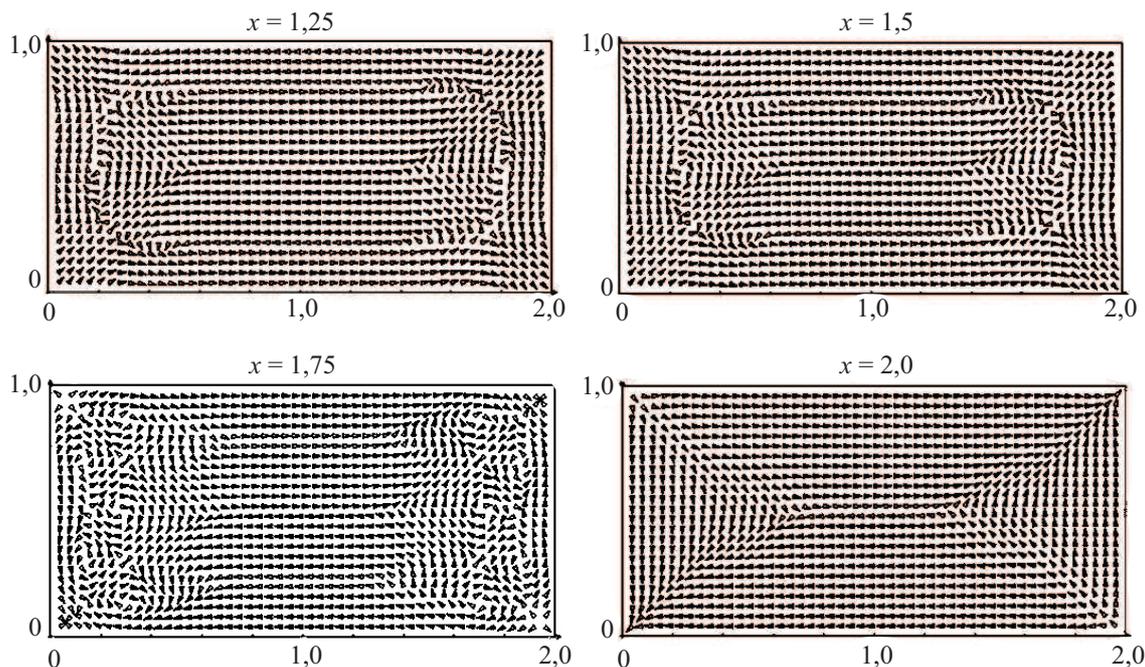


Рис. 3. Векторные поля поперечных компонент скорости при $t = 1,0$ для канала прямоугольного сечения линейных размеров $L_x = 2, L_y = 1, L_z = 2$

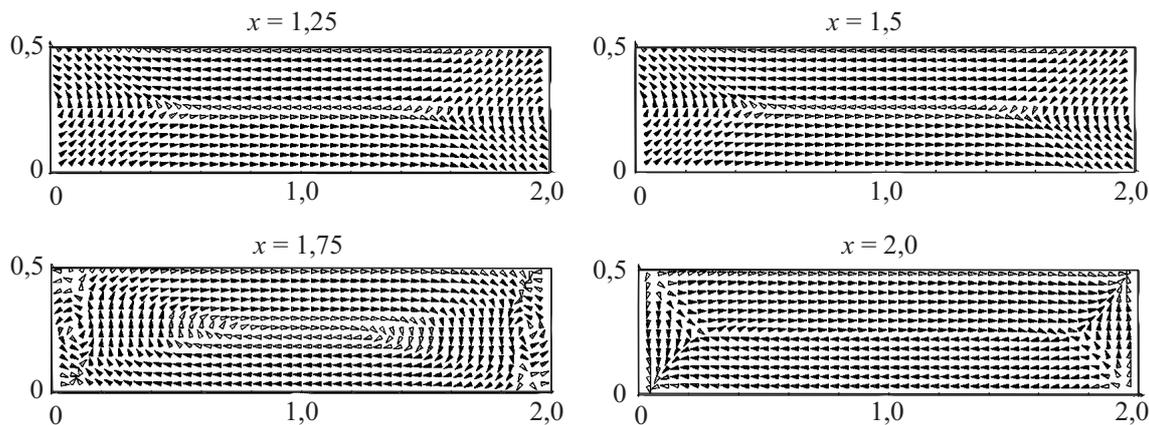


Рис. 4. Векторные поля поперечных компонент скорости при $t = 1,0$ для канала прямоугольного сечения высоты $L_y = 0,5$

скоростью.

Для некоторых технических приложений представляет интерес оценка пропускной характеристики более узкого канала с объемом, равным объему канала квадратного сечения. Для этого были проведены расчеты канала прямоугольного сечения, линейные размеры которого по длине, высоте и ширине составляли $L_x = 2, L_y = 0,5$ и $L_z = 2$ соответственно. В связи с тем, что поперечные градиенты изменения всех величин значительны в направлении высоты канала, были использованы прямоугольные сетки, которые содержали $201 \times 201 \times 201$ точек.

На рис. 4 показаны векторные поля поперечных компонент скорости в различных сечениях по оси x в момент безразмерного времени $t = 1,0$. Интересные результаты получены при $1,25 < x < 2$. При $x = 1,25$ максимальные значения скорости сосредоточены вблизи боковых стенок канала, где образуются небольшие вихри с центрами в середине боковых сторон сечения. При $x = 1,5$ максимальные скорости в этих вихрях распространяются к центру канала. При $x = 1,75$ в сечении канала образуется три устойчивых вихря: два вихря около боковых стенок канала и один вытянутый центральный вихрь. Отметим также резкое изменение скоростей в области взаимодействия вытянутого вихря с вихрями у боковых сторон. На выходе из канала вихри распадаются из-за влияния мягких граничных условий на выходном сечении канала. На выходе из канала поперечные компоненты скорости малы, поэтому они не влияют на структуру

течения, которое распространяется в направлении наибольшей скорости — по направлению вдоль канала.

5. Энергия, создаваемая трением о стенки каналов, и энергия турбулентных вихревых структур. Энергия вычисляется в процессе расчетов на каждом временном слое. Для каждой ячейки сетки в процессе расчета вычисляется значение температуры и одновременно находятся максимальные значения интеграла по всему объему от значений температуры, которое содержит в себе энергию, возникающую как от трения о стенки канала, так и энергию от развития и взаимодействия турбулентных структур. Максимальные значения интеграла по всему объему от значений температуры можно назвать общей энергией. Значение энергии трения о стенки канала легко считается по ячейкам сетки, соприкасающимся с четырьмя плоскостями канала. После этого легко находится турбулентная энергия как разность общей энергии и энергии трения.

Интерес представляет сравнение результатов расчетов для канала прямоугольного сечения с результатами расчетов для канала квадратного сечения. Так, например, для канала квадратного сечения линейных размеров $L_x = 2$, $L_y = 1$, $L_z = 1$ на сетке $201 \times 101 \times 101$ точек при числе Рейнольдса $Re = 500$ получено, что если принять значение интеграла по всему объему за 100%, то энергия турбулентности составляет 96% от общей энергии, а на энергию трения приходится 4%. Для канала прямоугольного сечения линейных размеров $L_x = 2$, $L_y = 0,5$, $L_z = 2$ на сетке $201 \times 201 \times 201$ точек при том же значении числа Рейнольдса энергия турбулентности составляет 98% от общей энергии, а на энергию трения приходится всего лишь 2%.

6. Заключение. Результаты, представленные в настоящей статье, показывают принципиальную возможность расчета турбулентных течений предложенным методом на суперкомпьютерах высокой производительности. Однако не следует думать, что эти результаты закрывают проблему изучения сложных вихревых турбулентных структур. Отметим также, что для дальнейших исследований необходимо сопоставлять результаты расчетов с лабораторными измерениями и с результатами исследований природных явлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
2. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Часть 1. М.: Наука, 1991.
3. Кокошинская Н.С., Павлов Б.М., Пасконов В.М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
4. Березин С.Б., Пасконов В.М. Численное исследование нестационарного трехмерного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале квадратного сечения на основе модели Навье–Стокса // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и кибернетика. 2006. № 1. 16–23.
5. Шкадов В.Я., Запryanов З.Д. Течения вязкой жидкости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
8. Березин С.Б., Пасконов В.М. Компонентная система визуализации результатов расчетов на многопроцессорных вычислительных системах // Труды конференции “Высокопроизводительные вычисления и их приложения”. Черноголовка, 2000. 202–203.
9. Пасконов В.М., Березин С.Б., Корухова Е.С. Динамическая система визуализации для многопроцессорных компьютеров с общей памятью и ее применение для численного моделирования турбулентных течений вязких жидкостей // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и кибернетика. 2007. № 4. 7–16.
10. Корнилов В.И. Пространственные пристенные турбулентные течения в угловых конфигурациях. Новосибирск: Наука, 2000.
11. Трехмерные турбулентные пограничные слои / Под ред. Х. Фернхольца, Е. Крузе. М.: Мир, 1985.
12. Clark J.A., Markland E. Flow visualization in turbulent boundary layers // J. Hydraul. Eng. 1971. **97**, N 10. 1653–1664.

Поступила в редакцию
25.09.2008