

УДК 519.63:532.503

## МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Н. Хомяков<sup>1</sup>

Объектом исследования является один из путей повышения точности метода граничных элементов (МГЭ), разработка его варианта повышенной точности (МГЭПТ), исследование эффективности и точности решения поставленных задач этим методом. Проведен сравнительный анализ решений задачи обтекания сферы и задачи обтекания диска с образованием за ним кавитационной полости, полученных с помощью МГЭ и МГЭПТ. Показано, что с помощью МГЭПТ можно получить решение задачи, достаточно близкое к точному. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-08-33404).

**Ключевые слова:** численные методы, граничные элементы, точность решения, идеальная несжимаемая жидкость, обтекание тел.

**1. Введение.** Метод граничных элементов (МГЭ) широко применяется при решении задач механики сплошных сред [2-6]. Основные преимущества этого метода состоят в его простоте, сокращенном объеме вычислений, исключении трудностей, связанных с решением задач для неограниченных областей, поскольку дискретизации подлежит только граница исследуемой конечной области, а также в возможности сочетания его с другими численными методами. Точность решения задач с помощью МГЭ зависит от точности вычисления необходимых интегралов, точности аппроксимации границы области течения и точности параметрического представления искомых и заданных функций на граничных элементах. Обычно в МГЭ интегралы вычисляются с помощью  $n$ -точечной квадратурной формулы Гаусса; граница области течения аппроксимируется в трехмерном случае поверхностью, состоящей из  $N$  плоских граничных элементов, в двумерном — ломаной линией,  $N$  звеньев которой служат в этом случае граничными элементами. Далее на каждом граничном элементе используется линейная аппроксимация искомых и заданных функций. В настоящей статье рассматривается другой путь реализации МГЭ для случая плоских и осесимметричных течений [5], который в дальнейшем будем называть методом граничных элементов повышенной точности (МГЭПТ).

**2. Постановка задачи.** Рассматривается внутренняя задача определения поля течения идеальной несжимаемой жидкости в области  $B$ , ограниченной границей  $\partial B$ . В области течения решается краевая задача для потенциала течения  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(p) &= 0, \quad p \in B; \quad \varphi(Q_1) = f(Q_1), \quad Q_1 \in \Gamma_1; \\ \frac{\partial\varphi(Q_2)}{\partial n(Q_2)} &= g(Q_2), \quad Q_2 \in \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial B, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset. \end{aligned}$$

Здесь  $n(Q_2)$  — внешняя по отношению к области течения нормаль к  $\partial B$  в точке  $Q_2$ .

**3. Метод граничных элементов.** Если известны на  $\partial B$  обе функции  $f(Q)$  и  $g(Q)$ , то  $\varphi$  в поле течения можно найти по формуле Грина [1]:

$$\varphi(p) = \alpha \int_{\partial B} (g(Q)G(p, Q) - f(Q)F(p, Q)) ds(Q), \tag{1}$$

где  $p \in B$ ,  $Q \in \partial B$ ,  $\alpha = \frac{1}{4\pi}$  для трехмерного случая,  $\alpha = \frac{1}{2\pi}$  для плоских течений,  $G(p, Q)$  — фундаментальное сингулярное решение уравнения Лапласа,  $F(p, Q) = \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n(Q)}$  и  $n(Q)$  — внешняя нормаль.

<sup>1</sup> Научно-исследовательский институт механики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Мичуринский пр., 1, 119192, Москва; e-mail: homja@imec.msu.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

При предельном переходе  $p \rightarrow P, p \in B, P \in \partial B$ , соотношение (1) переходит в граничное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2} f(P) = \alpha \int_{\partial B} (g(Q)G(P, Q) - f(Q)F(P, Q)) ds(Q). \quad (2)$$

Решая это уравнение, можно найти  $f(Q)$ , если задано  $g(Q)$ , или найти  $g(Q)$ , если задано  $f(Q)$ , а затем с помощью (1) найти  $\varphi$  в любой точке поля течения.

Уравнение (2) часто решается численно методом МГЭ [2–4]. Процесс численного решения задачи в общих чертах можно описать следующим образом. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением двумерных задач (плоских и осесимметричных течений). В этом случае  $\partial B$  есть плоская кривая.

Кривая  $\partial B$  разбивается на  $N$  участков  $\gamma_i$  точками  $P_i \in \partial B, 0 \leq i \leq N-1$ , таким образом, чтобы  $\partial B = \bigcup_{i=0}^{N-1} \gamma_i, \gamma_i \cap \gamma_{i+1} = P_{i+1}$ ; для замкнутой  $\partial B$  имеем  $\gamma_{N-1} \cap \gamma_0 = P_0 = P_N$ . Далее граница  $\partial B$  аппроксимируется ломаной линией, т.е. каждый граничный элемент  $\gamma_i$  есть отрезок прямой:

$$x(i, \xi) = x_i(1 - \xi) + x_{i+1}\xi, \quad y(i, \xi) = y_i(1 - \xi) + y_{i+1}\xi, \quad (3)$$

где  $x_i, y_i$  — координаты точки  $P_i, x_{i+1}, y_{i+1}$  — координаты точки  $P_{i+1}, \xi$  — параметр, определяющий положение точки на  $\gamma_i, 0 \leq \xi \leq 1: P \in \gamma_i \Leftrightarrow P = P(i, \xi), P_i = P(i, 0), Q \in \gamma_j \Leftrightarrow Q = Q(j, \xi)$ .

Затем  $f(P)$  и  $g(P)$  на каждом  $\gamma_i$  аппроксимируются линейными функциями:

$$f(i, \xi) = f_i(1 - \xi) + f_{i+1}\xi, \quad g(i, \xi) = g_i(1 - \xi) + g_{i+1}\xi, \quad f_i = f(P_i), \quad g_i = g(P_i), \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (4)$$

В задачах гидродинамики  $g(i, \xi)$  есть проекция скорости жидкости на нормаль  $\bar{n}$  к  $\partial B, f(i, \xi)$  — значение потенциала течения  $\varphi$  на  $\partial B$ . В этих задачах обычно  $g(i, \xi)$  известна, а  $f(i, \xi)$  — неизвестная функция. С учетом (4) задача сводится к определению  $N$  неизвестных  $f_i$ . Выбираем произвольные точки  $P_{mi} = P(i, \xi_m) \in \gamma_i$ . Для этих точек уравнение (2) с учетом (3) и (4) превращается в линейное уравнение относительно  $f_i$ . Для совокупности всех граничных элементов  $\gamma_i, 0 \leq i \leq N-1$ , получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных  $f_i$ :

$$\frac{1}{2} f(i, \xi_m) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\gamma_j} (g(j, \xi)G(i, j, \xi, \xi_m) - f(j, \xi)F(i, j, \xi, \xi_m)) ds(j, \xi), \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (5)$$

Для многих задач МГЭ дает достаточно точное решение при сравнительно небольшом числе граничных элементов  $N$ . Повышение точности метода обычно достигается за счет увеличения  $N$ . Однако при этом разность элементов двух рядом лежащих строк матрицы системы (5) уменьшается по абсолютной величине, что в конце концов приводит к снижению точности решения. Для каждой задачи существует предельное значение  $N$ , обеспечивающее наивысшую точность получаемого решения.

**4. Метод граничных элементов повышенной точности.** Существенно повысить точность МГЭ можно только отказавшись от аппроксимаций (3) и (4) [3].

Во-первых, будем использовать криволинейные граничные элементы  $\gamma_i$ , определяемые следующим образом: если граница  $\partial B$  задана аналитически, то и граничные элементы задаются этими же зависимостями, т.е. на  $\gamma_i$  имеем  $y_i = y(x_i)$  или  $x_i = x(y_i)$ ; если же  $\partial B$  задана табличным способом (например профиль крыла), то на каждом  $\gamma_i$  граница аппроксимируется кубическим сплайном таким образом, чтобы обеспечить гладкость  $\partial B$  до первой производной включительно ( $\partial B \in C^1$ ):

$$\begin{aligned} \text{если на } \gamma_i \text{ значение } \frac{\partial y}{\partial x} < \infty, \text{ то } x = x(i, \xi) = x_i + \xi dx_i, \quad y = y(i, \xi) = y_i + ka_i \xi^3 + kb_i \xi^2 + kc_i \xi; \\ \text{если на } \gamma_i \text{ значение } \frac{\partial x}{\partial y} < \infty, \text{ то } y = y(i, \xi) = y_i + \xi dy_i, \quad x = x(i, \xi) = x_i + ka_i \xi^3 + kb_i \xi^2 + kc_i \xi. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом  $dx_i = x_{i+1} - x_i, dy_i = y_{i+1} - y_i, ds(i, \xi) = \sqrt{\left(\frac{\partial x(i, \xi)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(i, \xi)}{\partial \xi}\right)^2} d\xi, 0 \leq \xi \leq 1$ .

В (2) перейдем от неизвестной функции  $f(Q)$  (значений потенциала течения  $\varphi$  на  $\partial B$ ) к неизвестной функции  $u(Q) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$  — касательной скорости жидкости на границе области течения ( $\bar{\tau}$  — касательная к  $\partial B$ ). На  $\gamma_i$  скорость  $u(Q)$  аппроксимируем линейной функцией от  $s(i, \xi)$ :

$$u(i, \xi) = u_i \left(1 - \frac{s(i, \xi)}{s(i+1)}\right) + u_{i+1} \frac{s(i, \xi)}{s(i+1)}, \quad (7)$$

где  $u_i$  — касательная скорость в точке  $P_i \in \partial B$ ,  $u_{i+1}$  — касательная скорость в точке  $P_{i+1} \in \partial B$ ,  $s_{i+1} = \int_0^1 ds(i, \xi)$  — длина  $\gamma_i$  и  $s(i, \xi) = \int_0^\xi ds(i, \eta)$ . Тогда значение потенциала  $\varphi$  в любой точке на  $\partial B$  можно вычислить по формуле

$$f(i, \xi) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{u_j + u_{j+1}}{2} s_{j+1} + u_i \left( 1 - \frac{s^2(i, \xi)}{2s_{i+1}} \right) + u_{i+1} \frac{s^2(i, \xi)}{2s_{i+1}}. \tag{8}$$

Подставляя (6), (7) и (8) в (5), получим систему линейных уравнений для определения неизвестных  $u_i$ ,  $0 \leq i \leq N - 1$ . Затем с помощью (1) находим  $\varphi$  в любой точке поля течения, а скорость жидкости в этой же точке находим из соотношений

$$v_x(p) = \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x_p} = \alpha \int_{\partial B} \left( g(Q) \frac{\partial G(p, Q)}{\partial x_p} - f(Q) \frac{\partial F(p, Q)}{\partial x_p} \right) ds(Q),$$

$$v_y(p) = \frac{\partial \varphi(p)}{\partial y_p} = \alpha \int_{\partial B} \left( g(Q) \frac{\partial G(p, Q)}{\partial y_p} - f(Q) \frac{\partial F(p, Q)}{\partial y_p} \right) ds(Q).$$

**5. Обтекание сферы.** Для сравнения точности решения задач гидродинамики методами МГЭ и МГЭПТ рассмотрим обтекание сферы безграничным равномерным потоком идеальной несжимаемой жидкости. На рис. 1 представлены результаты численного решения этой задачи методами МГЭ и МГЭПТ, а также приведено сравнение этих решений с аналитическим решением [1]

$$u(\alpha) = 1.5 \sin \alpha, \tag{9}$$

где  $u(\alpha)$  — касательная скорость жидкости на поверхности сферы. Принятые обозначения:  $\diamond$  — решение (9) и с высокой точностью совпадающие с ним решения с помощью МГЭПТ при  $N = 6$  и  $N = 24$ ;  $+$  — решение МГЭ при  $N = 24$ ;  $\times$  — решение МГЭ при  $N = 6$ . Решения с помощью МГЭ при  $\alpha = 90^\circ$  отличаются от точного на 4% для  $N = 24$  и на 10.8% для  $N = 6$ .

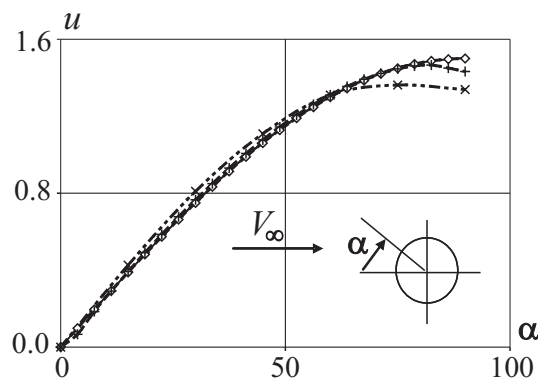


Рис. 1. Касательная скорость  $u$  на поверхности сферы

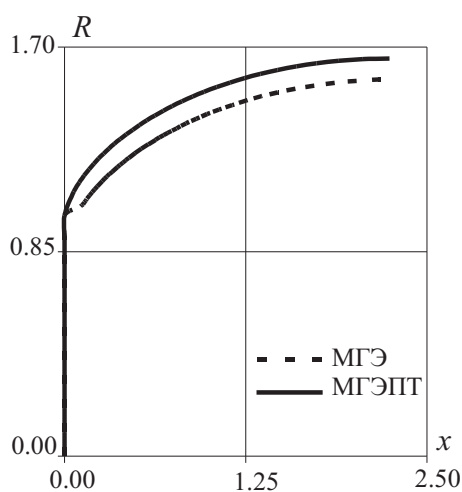
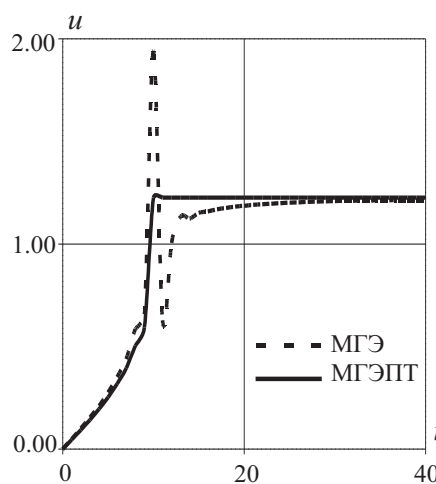
В таблице приведены значения скорости  $u$ , найденные вышеуказанными методами. Из таблицы видно, что при  $N = 24$  значения  $u$ , определенные с помощью МГЭПТ, отличаются от точных, вычисленных по (9), менее чем на 0.0003. Для МГЭ это различие лежит в пределах от 0.001 при малых  $\alpha$  до 0.16 при  $\alpha = 90^\circ$ . Таким образом, с помощью МГЭПТ можно получить решение, очень близкое к точному, при этом точность решения при  $N \geq 6$  слабо зависит от количества граничных элементов. Однако при  $N < 6$  даже для МГЭПТ ошибка решения становится больше 10%, в то время как для МГЭ только при  $N \geq 24$  ошибка решения становится меньше 5%.

**6. Кавитационное обтекание диска.** Рассмотрим задачу обтекания потоком идеальной несжимаемой жидкости ( $V_\infty = 1$ ) диска по симметричной схеме Рябушинского с образованием за ним развитой кавитационной полости (суперкаверны). Необходимо определить форму  $R(x)$  этой кавитационной полости при заданном значении касательной скорости  $u = \text{const}$  на поверхности каверны. На рис. 2 и рис. 3 представлены результаты решения этой задачи методами МГЭ и МГЭПТ. При решении использовался итерационный процесс, описанный в [6].

На первом шаге решения методом МГЭ находилась форма кавитационной полости (рис. 2, пунктирная кривая). Затем на этом контуре методом МГЭПТ определялась скорость  $u$  на диске и на этой поверхности. Оказалось, что на поверхности каверны не выполняется условие  $u = \text{const}$ , в области схода струи жидкости с края диска наблюдается сильное колебание этой скорости (рис. 3, пунктирная кривая). Сразу за диском значение  $u \approx 0.63$ , затем эта скорость постепенно возрастает и в окрестности миделя каверны становится постоянной, равной 1.22. На горизонтальной оси отложены номера точек  $i$  (начальные точки  $\gamma_i$ ). Далее методом МГЭПТ с помощью итерационного процесса [6] определялся новый контур каверны (рис. 2, сплошная линия), на котором с высокой точностью выполняется условие  $u = \text{const}$  (рис. 3, сплошная линия). Таким образом, МГЭПТ позволил с высокой точностью найти форму каверны и уточнить величину  $u$  на ней.

Касательная скорость  $u$  на поверхности сферы

	МГЭПТ	МГЭПТ	МГЭ	МГЭ	$1.5 \sin \alpha$
$\alpha$ , град	$N = 6$	$N = 24$	$N = 6$	$N = 24$	
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
15.00	0.389732	0.388308	0.425923	0.392725	0.388229
30.00	0.752820	0.750151	0.809537	0.765360	0.750000
45.00	1.065944	1.060886	1.108865	1.077801	1.060660
60.00	1.304683	1.299300	1.309543	1.311223	1.299038
75.00	1.455068	1.449178	1.361993	1.446050	1.448889
90.00	1.506502	1.500291	1.338928	1.432866	1.500000

Рис. 2. Контур каверны за диском, ( $x = 0, 0 < y < 1$ ) — дискРис. 3. Скорость  $u$  на диске ( $0 \leq i \leq 10$ ) и на поверхности каверны ( $10 \leq i \leq 40$ )

**Заключение.** Сравнительный анализ результатов решения рассмотренных задач показывает, что методом МГЭПТ можно получить решение, достаточно близкое к точному. Кроме того, этот метод позволяет получить высокую точность численного решения при значительно меньшем количестве граничных элементов  $N$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т. 2. М.: Наука, 1973.
2. Метод граничных уравнений // Механика. Новое в зарубежной науке / Ред. А. Ю. Ишлинский, Г. Г. Черный. Т. 15. М.: Наука, 1978.
3. Banerjee P.K., Butterfield R. Boundary element methods in engineering science. London: McGraw-Hill, 1981; Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы конечных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
4. Афанасьев К.Е., Афанасьева А.А., Терентьев Н.А. Исследование эволюции свободных границ при нестационарном движении тел в идеальной несжимаемой жидкости методами конечных разностей и конечных элементов // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1986. № 5. 8–13.
5. Хомяков А.Н. Метод граничных элементов повышенной точности в задачах обтекания тел несжимаемой жидкостью // Тезисы докладов XIII школы-семинара “Современные проблемы аэрогидродинамики”, 5–15 сентября 2005, Сочи. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005.
6. Хомяков А.Н. Зависимость сопротивления осесимметричного кавитатора от угла раствора конуса и от числа кавитации // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 1995. № 3. 170–173.

Поступила в редакцию  
01.10.2008