

УДК 519.6

КИНЕТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ**А. В. Сафронов¹**

В численных решениях уравнений газодинамики кроме аппроксимации интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии необходимо выполнение условия неубывания энтропии, которое позволяет получить единственное решение задачи, однозначно определяемое начальными данными. Выполнение этого условия представляет собой проблему для численных расчетов. Убывание энтропии в решении гиперболических уравнений исключается введением искусственной вязкости по Нейману, применением метода Годунова с точным решением задачи Римана и с приближенными решениями, в которых схемная вязкость больше, чем у точного, а также применением кинетического метода релаксации. На примере скалярного закона сохранения выполнен энтропийный анализ модификаций разностных схем типа Годунова. Предложены новые кинетические варианты численных методов для уравнений газодинамики на основе аппроксимации потоков на границе ячеек сетки с помощью приближенного решения задачи Римана из соотношений на разрывах с максимальной оценкой скоростей волн.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, схемы типа Годунова, газодинамика, задача Римана, разностные схемы.

1. Введение. Проблема обеспечения условия неубывания энтропии в численном решении гиперболических уравнений является одной из важных в математике и физике. Неубывание энтропии отвечает за получение единственного решения задачи.

Решение энтропийной проблемы впервые предложено Дж. фон Нейманом [1] путем введения искусственной вязкости в уравнения, которые записываются в виде законов сохранения. Искусственная вязкость проявляется в градиентных зонах течения, “размазывая” разрывы.

При численном решении задач газодинамики методом Годунова эту роль играет схемная вязкость [2]. Метод Годунова первого порядка, основанный на точном итерационном решении задачи Римана о распаде газодинамического разрыва, обладает минимальной схемной вязкостью, обеспечивающей сквозной расчет сложных течений с разрывами, но приводит к трудоемким вычислениям. Кроме того, в ряде физических случаев теоретическое решение задачи о распаде разрыва затруднительно. В этой связи, широкое распространение получили методы на основе приближенного решения задачи Римана. К данному классу относятся известные схемы LxF (Lax–Friedrichs) [3, 4], Русанова [5], HLL (Harten, Lax, Leer) [6], Roe [7], EO (Engquist–Osher) [8, 9], HLLC (Toro, Spruce, Speares) [10, 11]. Для выполнения энтропийного условия схемная вязкость методов на основе приближенного решения задачи Римана должна быть выше, чем метода на основе точного решения. Доказательство этого представляет проблему в случае нелинейных уравнений.

Кардинальным решением энтропийных проблем в численном решении гиперболических уравнений является применение кинетического метода релаксации, например [12–16]. В кинетическом варианте искомая нелинейная гиперболическая система уравнений преобразуется в линейную систему с релаксационным источником. Кинетическая интерпретация численных методов упрощает их энтропийный анализ [14–16].

Сравнительный анализ численных методов на основе решения задачи Римана и других подходов, применяемых для задач газодинамики, можно найти, например, в работах [17–20].

Интенсивное развитие методов типа Годунова связано с повышением порядка точности вычислений на основе применения процедур интерполяции параметров к граням ячейки сетки с ограничителями, обеспечивающими монотонность схемы. Первый такой ограничитель предложен Колганом [21], изложение теории и обзор вариантов можно найти, например, в работах [17–19, 22, 23]. Отметим, что повышение порядка аппроксимации уменьшает различие между методами на основе точного и приближенных решений задачи Римана. После интерполяции к граням ячейки (реконструкции) параметры на границе ячейки в схемах повышенного порядка вычисляются аналогично схеме первого порядка из задачи о распаде разрыва. Тем самым, в первую очередь необходимо выполнение условия неубывания энтропии в численных схемах первого порядка, которые и анализируются в настоящей статье.

¹ Центральный научно-исследовательский институт машиностроения (ЦНИИМаш), ул. Пионерская, д. 4, г. Королев, 141070, Московская обл.; главный специалист, e-mail: avsafron@gmail.com

Дадим краткую характеристику методов с аппроксимацией потоков на границе ячеек сетки на основе приближенного решения задачи Римана о распаде газодинамического разрыва с начальными параметрами, соответствующими состояниям газа в соседних ячейках сетки. Схематически начальный разрыв газа с различными состояниями в левом и правом полупространстве распадается на три волны: левую волну, контактный разрыв и правую волну. Обозначим их скорости через W_L , W_* и W_R соответственно. В зависимости от начального перепада давления левые и правые волны могут быть как волнами разрежения, так и волнами сжатия (скачками). Точное решение задачи Римана единственно и зависит от автомодельной переменной, а скорости волн удовлетворяют неравенству $W_L < W_* < W_R$. Кроме того, заданной функции потока (компонентам вектора потока) отвечают два решения: одно соответствует дозвуковому случаю, другое — сверхзвуковому. Поэтому можно представить, что функция потока уравнений газодинамики при переходе из одного состояния в другое в автомодельной задаче о распаде разрыва обладает свойством выпуклости [17].

Метод ЕО [8, 9] основан на решении задачи Римана в изоэнтропическом приближении. В этом случае решение безытерационное, но требует аналитического выражения характеристических соотношений и по трудоемкости не намного меньше точного с реализацией быстро сходящихся итераций Ньютона. Кроме того, изоэнтропическое решение задачи Римана в случае наличия скачков нарушает свойство выпуклости функции потока уравнений газодинамики. Тем не менее, схема ЕО, основанная на нахождении экстремумов в звуковых точках с добавлением дополнительной диссипации в их окрестности, не допускает убывания энтропии [8, 9]. Однако этот подход имеет ограничение в случае интенсивных скачков.

Сеточно-характеристическая схема Roe [7] уникальна тем, что при определенном осреднении параметров поток на границе ячеек соответствует линейаризованному решению задачи о распаде разрыва в конфигурации с двумя ударными волнами и с выполнением соотношений на одиночных разрывах. Схема хорошо зарекомендовала себя при расчете течений с ударными волнами и контактными разрывами, однако имеет известные энтропийные проблемы (появление нефизических скачков) в расчете зон разрежения при смене знака характеристик. Для устранения этого недостатка разработаны различные процедуры энтропийной коррекции, связанные с добавлением диссипации, обзор и анализ которых можно найти в работах [17, 18]. В работе [24] предложен эффективный способ стабилизации схемы Roe на основе свойства выпуклости функции потока.

Методы LxF, Русанова и HLL интерпретируются как двухволновые схемы с учетом разрывов типа левой и правой ударных волн без рассмотрения контактного разрыва. В схеме LxF используется максимальная оценка скоростей волн во всей расчетной области, а в схеме Русанова применяется локальный максимум по параметрам в соседних ячейках сетки. В схеме HLL предложен более эффективный способ выбора скоростей движения левой и правой волн по максимальным наклонам соответствующих характеристик в соседних ячейках разностной сетки. Веер волн разрежения заменяется скачком со скоростью распространения, соответствующей максимальному наклону характеристик в этой волне разрежения. За счет максимальной оценки волн двухволновые схемы исключили энтропийные проблемы, однако такое двухволновое допущение приводит к значительному “размазыванию” контактного разрыва.

С целью устранения этого недостатка в схеме HLLC (C-contact) [10] впервые предложен способ учета контактного разрыва в задаче о распаде разрыва и применен выбор скоростей левой и правой волны аналогично схеме HLL. В классическом варианте HLLC [10] скорость контактного разрыва вычисляется из звукового приближения. В работе [11] приведено уточнение определения скорости контактного разрыва и применен выбор скоростей распространения левой и правой волн при распаде разрыва аналогично HLLC [25]. Развитием метода HLLC является работа [16], в которой предложен кинетический вариант метода и проведен энтропийный анализ способов выбора скоростей волн. В работе [26] предложен подход HLLC-типа на основе приближенного решения задачи Римана из соотношений на разрывах, выражающих законы сохранения для уравнений газодинамики в лагранжевых массовых переменных. В этом случае задача о распаде разрыва упрощается тем, что решается в “простых” переменных, а параметрами являются массовые скорости (скорости потока массы) через поверхности левой и правой волн. Важно, что относительно скорости и давления схема в лагранжевых переменных является двухволновой, причем массовые скорости через левую и правую волну не меняют своего знака, а их выбор на основе максимальной оценки, согласно [16], обеспечивает выполнение условия неубывания энтропии при вычислениях параметров в ячейках разностной сетки. Диссипативные свойства схемы как в зонах разрежения, так и на скачках несколько превышают свойства схемы с точным решением задачи Римана, однако вычисления очень экономичны. Схемы HLLC-типа получили широкое применение [18], обобщены на случай МГД-уравнений [27, 28], а также на сверхзвуковой стационарный случай течения газа с приближенным решением задачи Римана в массовых переменных [29].

Необходимо отметить, что все методы на основе решения задачи Римана с учетом контактного разрыва, включая метод Годунова с точным решением, имеют проблемы в пространственном случае, когда касательная к граням ячейки компонента скорости значительно больше нормальной — “карбункул”-эффект [30]. В двухволновых схемах (без учета контактного разрыва) этот эффект проявляется в меньшей степени [30].

В рассматриваемых методах доказанным является выполнение условия неубывания энтропии в газодинамических расчетах по схемам LxF, Годунова, Русанова, HLL, EO [6, 8, 15], HLLC в кинетической интерпретации [16] и в массовых переменных [26, 29] с выбором скоростей [16].

В настоящей статье на примере скалярного закона сохранения с выпуклой функцией потока с помощью подхода E-flux [9] иллюстрируется энтропийный анализ рассматриваемых схем и анализируются варианты добавления контактного разрыва в двухволновые схемы, а также другие модификации алгоритмов. Кроме того, приведены кинетические интерпретации новых численных алгоритмов для уравнений газодинамики.

2. Энтропийный анализ разностных схем типа Годунова. В качестве примера, на котором можно проиллюстрировать характер модификаций разностных схем, рассмотрим задачу Коши для скалярного закона сохранения:

$$u_t + f_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T. \quad (1)$$

Здесь функция потока $f(u)$ выпукла (для определенности примем $f''(u) > 0$).

В случае гладких решений функция $u(x, t)$ постоянна вдоль характеристик: $\frac{dx}{dt} = f'(u)$.

Уравнение (1) может иметь разрывные решения — ударные волны, скорость которых s определяется соотношением Ренкина–Гюгонио $f(u_+) - f(u_-) = s(u_+ - u_-)$.

Энтропийное условие Олейник о допустимости разрыва [32] получено на основе концепции “исчезающей вязкости”, согласно которой вместо уравнения (1) рассматривается уравнение

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \quad (2)$$

и находится решение $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon$.

Условие Олейник заключается в том, что при $s > 0$ характеристическая скорость за разрывом должна быть больше скорости распространения разрыва, а характеристическая скорость перед разрывом меньше: $f'(u_-) > s > f'(u_+)$.

Разностную схему для уравнения (1) запишем в консервативном виде

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}), \quad (3)$$

где $\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, n — номер шага по времени с интервалом Δt и i — номер ячейки сетки по оси x с шагом разбиения Δx .

В методах типа Годунова поток $f_{i+1/2}$ на границе ячеек вычисляется из решения задачи о распаде разрыва с начальными данными, соответствующими параметрам в соседних ячейках сетки $(i, i+1)$. При этом схема устойчива при числе Куранта $CFL = s_{\max} \sigma < 1$, где s_{\max} — максимальная скорость распространения возмущений в расчетной области.

Как упомянуто выше, кроме выполнения законов сохранения для единственности численного решения необходимо выполнение энтропийного закона. Условие, обеспечивающее неубывание энтропии в ячейках сетки в численных расчетах и являющееся следствием теоремы Олейник, введено Опером [9]. Это условие (E-flux), которое необходимо выполнять при аппроксимации потока $f_{i+1/2}^E$ на границе ячеек, имеет вид

$$\frac{f_{i+1/2}^E - f(u)}{u_{i+1} - u_i} \leq 0 \quad \forall u \in [u_i, u_{i+1}]. \quad (4)$$

Поток $f_{i+1/2}^{\text{Godunov}}$ метода Годунова на границе ячеек, который вычисляется из точного решения задачи о распаде разрыва с начальными данными, соответствующими параметрам в соседних ячейках сетки, может быть представлен в виде [9]

$$f_{i+1/2}^{\text{Godunov}} = \begin{cases} \min_{u \in [u_i, u_{i+1}]} f(u), & u_i < u_{i+1}, \\ \max_{u \in [u_i, u_{i+1}]} f(u), & u_i > u_{i+1}. \end{cases} \quad (5)$$

Поток метода Годунова удовлетворяет условию E-флюх, причем

$$f^E \leq f^{\text{Godunov}} \quad \text{при} \quad u_i < u_{i+1}, \quad f^E \geq f^{\text{Godunov}} \quad \text{при} \quad u_i > u_{i+1}. \quad (6)$$

С целью сравнительного анализа диссипативных свойств различных схем разностное уравнение (3) представляется в следующем виде, соответствующем аппроксимации уравнения (2) с вязкостью:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2} (f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{Q_{i+1/2}}{2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{Q_{i-1/2}}{2} (u_i - u_{i-1}). \quad (7)$$

Здесь Q представляет собой величину схемной вязкости:

$$Q_{i+1/2} = \sigma \left(\frac{f_{i+1} + f_i - 2f_{i+1/2}}{u_{i+1} - u_i} \right). \quad (8)$$

Аппроксимация потока на границе ячеек выражается следующим образом:

$$f_{i+1/2} = \frac{f_{i+1} - f_i}{2} - \frac{Q_{i+1/2}}{2\sigma} (u_{i+1} - u_i). \quad (9)$$

Схемная вязкость метода Годунова представляется в виде (см. [9])

$$Q_{i+1/2}^{\text{Godunov}} = \sigma \max_{u \in [u_i, u_{i+1}]} \left(\frac{f_{i+1} + f_i - 2f(u)}{u_{i+1} - u_i} \right).$$

Энтропийному условию удовлетворяют методы, в которых при аппроксимации потока на границе ячеек схемная вязкость больше схемной вязкости метода Годунова [33]: $Q_{i+1/2} \geq Q_{i+1/2}^{\text{Godunov}}$, что аналогично выполнению условия E-флюх (4).

Согласно [33], рассматриваемые численные схемы монотонны и устойчивы при выполнении условия CFL и в случае, когда

$$Q_{i+1/2}^{\text{Roe}} \leq Q_{i+1/2} \leq Q_{i+1/2}^{\text{LxF}} \equiv 1, \quad (10)$$

где $Q_{i+1/2}^{\text{Roe}} = \sigma |f'_{i+1/2}|$ — схемная вязкость потока Roe [7] и $Q_{i+1/2}^{\text{LxF}}$ — схемная вязкость метода LxF [3, 4], принимающая максимальное значение.

Приведем сравнительный анализ величин схемной вязкости методов на основе приближенного и точного решений задачи о распаде разрыва.

Ниже рассматриваются параметры на границе ячейки сетки, индекс “ L ” относится к i -й ячейке сетки, индекс “ R ” — к $(i + 1)$ -й, а индекс “ $i + 1/2$ ” — к параметрам на границе этих ячеек.

Схемная вязкость потока ЕО [8, 9] имеет вид

$$Q_{i+1/2}^{\text{EO}} = \frac{\sigma}{u_R - u_L} \int_{u_L}^{u_R} |f'(u)| du. \quad (11)$$

Согласно [9], поток ЕО удовлетворяет условию E-флюх.

Схемы HLL, Русанова и LxF представляются из соотношений Ренкина–Гюгонио, записанных для двух скачков (рис. 1):

$$f^* - f_L = s_L(u^* - u_L), \quad f^* - f_R = s_R(u^* - u_R). \quad (12)$$

Здесь s_L, s_R — скорости левой и правой волн соответственно и $s_L < s_R$.

Аппроксимация потока на границе ячеек из соотношений (12) имеют вид

$$f_{i+1/2} = f^* = \frac{f_L s_R - f_R s_L + s_L s_R (u_R - u_L)}{s_R - s_L}. \quad (13)$$

Имеет место соотношение

$$u_{i+1/2} = u^* = \frac{u_R s_R - u_L s_L - f_R + f_L}{s_R - s_L}. \quad (14)$$

Для определения скоростей волн используются следующие варианты:

$$s_R = -s_L = \frac{1}{\sigma}, \quad (15)$$

$$s_R = -s_L = \max(|f'_L|, |f'_R|), \quad (16)$$

$$s_L = \min(0, \inf(f'_L, f'_R)), \quad s_R = \max(0, \sup(f'_L, f'_R)). \quad (17)$$

В случае (15) поток (13) представляет собой схему LxF [3, 4]. В этой схеме используется максимальная оценка скоростей волн по всей расчетной области. Заметим, что в этом случае поток $f(u^*)$ из (14) отвечает схеме LxW второго порядка [34].

При вычислении скоростей волн, согласно (16), поток (13) представляет собой схему Русанова [5], в которой применяется локальный максимум скоростей волн.

При выборе (17) аппроксимации потока на границе ячеек (12) соответствуют схеме HLL [16].

Отметим, что диссипативные свойства рассматриваемых схем пропорциональны скоростям волн.

Рассмотрим случай смены знака производной функции $f(u)$ при значениях $u_R > u_L$. Этот случай является аналогом волны разрежения и характерен для исследования энтропийных проблем. Геометрическая интерпретация потоков рассматриваемых схем представлена на рис. 1. В соответствии с (5) и (6), поток на границе ячеек схемы Годунова соответствует минимуму функции $f(u)$ на рассматриваемом интервале, а схемы, удовлетворяющие условию E-flux, находятся ниже этого уровня, как показано на рис. 1. В данном случае поток EO (11) совпадает с потоком Годунова. Поток HLL находится в зоне E-flux, на пересечении касательных к функции $f(u)$ в точках (u_L, f_L) и (u_R, f_R) . Потоки Русанова и LxF находятся также в зоне E-flux ниже потока HLL, поскольку линии, проведенные из точек (u_L, f_L) и (u_R, f_R) , в этих схемах ближе к вертикали, чем в методе HLL. Очевидно, выбор скоростей волн (15)–(17) обеспечивает выполнение условия неубывания энтропии в схемах LxF, Русанова и HLL для любой выпуклой функции $f(u)$. В случае смены знака характеристик ($f'_L < 0, f'_R > 0$) поток Roe, как показано на рис. 1, не удовлетворяет энтропийному условию.

Согласно [33] и данным рис. 1, известные потоки по величине схемной вязкости располагаются следующим образом:

$$Q_{i+1/2}^{\text{Roe}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{Godunov}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{EO}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{HLL}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{Rusanov}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{LxF}} \equiv 1.$$

На рис. 1 показан возможный способ добавления третьей волны, аналога контактного разрыва, с выполнением условия E-flux. Алгоритм заключается в следующем: по параметрам u^* , полученным по формуле (14), находится наклон касательной в этой точке $s_* = f'(u^*)$, вычисляется поток $f(u^*)$ и далее определяется искомого решение, находящееся на пересечении данной касательной линии с линиями, обозначающими левую и правую волны. Потоки, отвечающие этому решению, на рис. 1 обозначены через f_L^* и f_R^* , а соответствующие этим потокам переменные обозначим через u_L^* и u_R^* соответственно. Для этого случая можно записать следующие соотношения на разрывах:

$$f_L^* - f_L = s_L(u_L^* - u_L), \quad f_R^* - f_L^* = s_*(u_R^* - u_L^*), \quad f_R^* - f_R = s_R(u_R^* - u_R). \quad (18)$$

В силу выпуклости функции $f(u)$ выполняются неравенства $s_L < s_* = f'(u^*) < s_R$. Выбор аппроксимации на границе ячеек зависит от знака s_* : $f_{i+1/2} = f_L^*$ при $s_* > 0$ и $f_{i+1/2} = f_R^*$ при $s_* < 0$.

Таким образом, решение задачи на основе соотношений (18) можно представить в виде

$$f_{i+1/2} = f^* + \omega [f(u^*) - f^*], \quad (19)$$

где

$$\omega = \omega_{\text{contact}} = \min \left(-\frac{s_L}{s_* - s_L}, \frac{s_R}{s_R - s_*} \right). \quad (20)$$

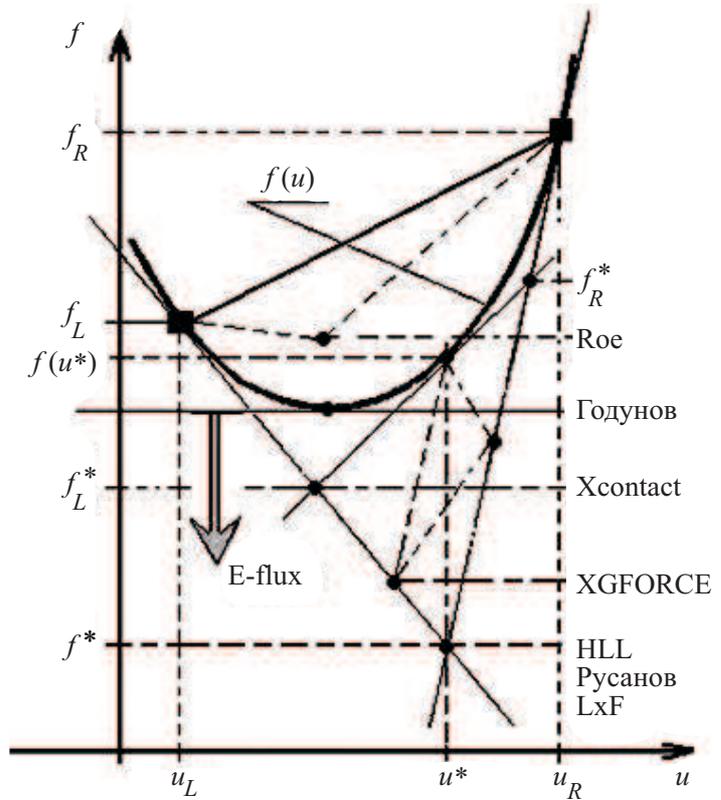


Рис. 1. Энтропийный E-флюкс анализ

На рис. 1 эти потоки обозначены XContact, X — означает способ выбора скоростей волн, соответствующий схемам LxF, Русанова и HLL (15)–(17). Из рис. 1 следует, что одно из пересечений касательной к функции $f(u)$ в точке $(u^*, f(u^*))$ с линиями, обозначающими левую и правую волны, при выпуклой функции $f(u)$ в случае $f'_L < 0$ и $f'_R > 0$ всегда будет лежать ниже минимума этой функции. Иными словами, потоки XContact удовлетворяют энтропийному условию E-flux.

Из анализа соотношений (19), (20) и рис. 1 выявлена следующая возможность модернизации двухволновых схем. Если в качестве скорости средней волны s_* принять предельные значения, т.е. из точки $(u^*, f(u^*))$ провести линии, параллельные линиям, которые соответствуют левой и правой волне, то получим следующее значение параметра ω в (19):

$$\omega = \omega_{\text{GFORCE}} = \min \left(-\frac{s_L}{s_R - s_L}, \frac{s_R}{s_R - s_L} \right). \quad (21)$$

При выборе $s_R = -s_L = s_{\max}$ полученная схема (13), (14), (19), (21) соответствует схеме GFORCE [35], поэтому параметр ω обозначен через ω_{GFORCE} .

В случае определения скоростей волн при вычислении параметра ω_{GFORCE} и потоков (13), (14), (19) по схемам Русанова (16) и HLL (17) получаются новые варианты схемы GFORCE. На рис. 1 положение этих потоков обозначено XGFORCE. Из геометрии видно, что полученные схемы удовлетворяют условию E-flux. Потоки XGFORCE, основанные на максимальной оценке скорости средней волны (рис. 1), которая всегда выше скорости контактного разрыва, “размазывают” контактный разрыв, но их схемная вязкость меньше вязкости потоков при $\omega = 0$ (LxF, Русанов, HLL).

Исходя из вышеизложенного, предложенные модификации (XContact и XGFORCE) численных методов по величине схемной вязкости можно расположить следующим образом:

$$Q_{i+1/2}^{\text{Roe}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{Godunov}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{EO}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{XContact}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{XGFORCE}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{HLL}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{Rusanov}} \leq Q_{i+1/2}^{\text{LxF}} \equiv 1.$$

В соответствии с (10) данные схемы устойчивы и монотонны.

В общем случае при выборе параметра ω в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{Contact}}$ схемы (13), (14), (19) с выбором скоростей (15)–(17) удовлетворяют условию E-flux, поэтому возможны и другие варианты, например $\omega = \frac{1}{2}(\omega_{\text{GFORCE}} + \omega_{\text{Contact}})$.

Проиллюстрируем схемы на численном решении уравнения (1) с функцией потока $f = \frac{u^2}{2}$ и со следующими начальными данными: $t = 0, u = -1$ при $x \leq 0.5$ и $u = 2$ при $0.5 < x < 1$.

Результаты расчетов в момент времени $t = 0.108$ в сравнении с точным решением приведены на рис. 2. В схеме с тремя волнами (13), (14), (19) использовался выбор скоростей левой и правой волны HLL (17); этот вариант обозначен на графике HLLC.

Как и ожидалось, двухволновая схема HLL (13), (17) сильнее сглаживает особенности, чем схемы Годунова и HLLC. Схема HLLC не имеет энтропийных проблем, а результаты близки к схеме Годунова. Как видно, схема Roe реализует нефизический разрыв.

На данном примере следует подчеркнуть следующее. В схемах на основе приближенного решения задачи о распаде разрыва и не допускающих убывание энтропии схемная вязкость (8) выше, чем в схеме на основе точного решения, при этом поток на границе ячейки (9) в случае, показанном на рис. 1, меньше точного. Однако, например, при функции потока $f = \frac{u^2}{2}$ точное значение потока в рассматриваемом примере имеет вид $f = 0$. Таким образом, при аппроксимации потока на границе ячеек с помощью приближенных схем может возникнуть отрицательная величина при положительной функции потока. На первый взгляд это физически неверно. Однако к этому факту приводит составляющая схемной вязкости аппроксимации потока на границе (9), а в расчетах параметров в ячейке сетки, которые представлены в виде (7), получаются результаты, отвечающие энтропийному условию.

Таким образом, появление отрицательных величин при аппроксимации положительной функции потока на границе ячеек в зонах разрежения (при $u_x < 0$) в рассматриваемых методах свидетельствует об избыточности схемной вязкости (8) и не приводит к убыванию энтропии при вычислениях параметров в ячейках сетки. В этой связи, непосредственное извлечение энтропии из аппроксимации потока на границе ячеек (9) (который включает в себя составляющую схемной вязкости), как это предлагается в работе [36] для контроля численного решения уравнений газодинамики, проблематично для практического применения.

В случае $f = \frac{u^2}{2}$, когда известен минимум функции потока $f = 0$, энтропийно обосновано (рис. 1) применение численного ограничителя (fix) на аппроксимацию потока на границе ячеек сетки:

$$f_{i+1/2} = \max(f_{i+1/2}, \text{fix}), \quad \text{fix} = 10^{-6}.$$

В работах [24, 31] показана эффективность применения ограничителя fix для уравнений газодинамики при аппроксимации потока импульса на границе ячеек $(\rho u^2 + P)_{i+1/2}$ в расчете зон разрежения.

Приведенный энтропийный анализ был представлен на конференции [37].

3. Кинетические интерпретации численных методов для уравнений газодинамики. Изложим кратко основные положения кинетического метода релаксации решения гиперболических уравнений на примере скалярного закона сохранения (1).

Кинетический метод релаксации решения гиперболических уравнений в варианте публикаций [12, 13, 38] состоит в замене нелинейного гиперболического уравнения (1) следующей линейной гиперболической системой с релаксационным источником:

$$u_t + q_x = 0, \quad q_t + \lambda^2 u_x = \frac{f(u) - q}{\varepsilon}. \quad (22)$$

Здесь q — новая переменная и ε — время релаксации. При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение релаксационной системы с начальными условиями $q = f$ при $t = 0$ соответствует решению уравнения (1).

Решение системы (22) отвечает приближению Чапмена–Энскога

$$u_t + f_x = \varepsilon(\beta u_x)_x + O(\varepsilon^2), \quad \beta = \lambda^2 - (f'(u))^2. \quad (23)$$

Время релаксации ε играет роль искусственной вязкости.

Аппроксимация параметров на границах ячеек разностной сетки при решении уравнений (22) основана на “субхарактеристиках” этой системы:

$$q' \pm \lambda u' = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \pm \lambda.$$

Параметр λ — субхарактеристическая скорость системы (22).

Основой данного кинетического подхода является выбор параметра λ , обеспечивающий выполнение условия $\beta > 0$.

Характеристические скорости в кинетическом варианте не меняют знака, а решение не имеет энтропийных проблем [12, 16, 38]. Кроме того, в соответствии с приближением Чапмена–Энскога (23) решение системы (22) соответствует концепции исчезающей вязкости (2).

В упрощенном случае алгоритм расчета состоит в следующем [12, 14]: решается линейная система (22) без правой части, затем полагается $q^{n+1} = f(u^{n+1})$. Данный алгоритм, удовлетворяющий энтропийному условию (при $\beta > 0$), получил название двухшаговой кинетической схемы [12, 14].

Отметим, что отрицательное значение аппроксимации q на границах ячейки сетки не запрещается в случае положительной функции $f(u)$.

В ряде работ, например [14–16], подход (22) применен для уравнений газодинамики. Однако при переходе от (22) к уравнениям газодинамики (u, q, f — векторы, λ — матрица) учет контактного разрыва затруднителен.

Далее рассмотрим алгоритм численного решения уравнений газодинамики на основе работы [16], в которой представлен кинетический вариант с учетом контактного разрыва и показан способ выбора субхарактеристик, обеспечивающий условие неубывания энтропии.

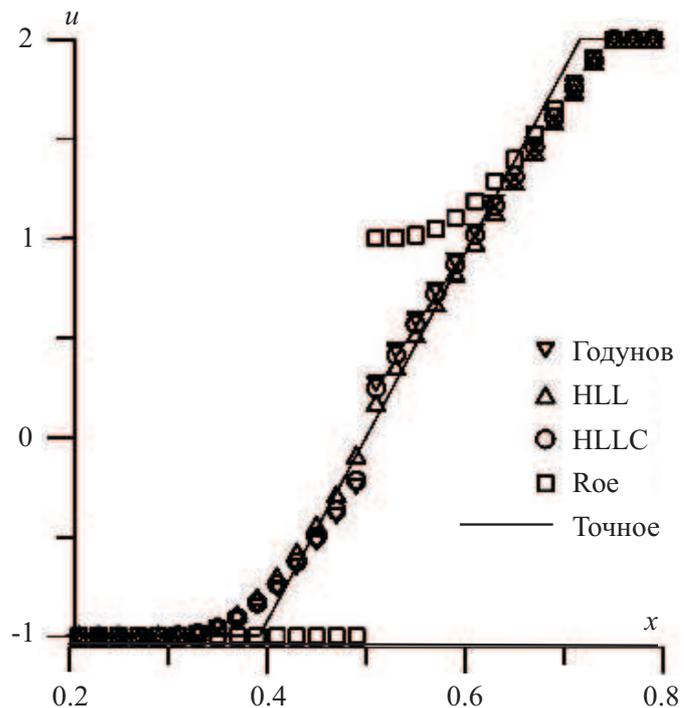


Рис. 2. $u_1 = -1, u_2 = 2, t = 0.108, CFL = 0.9$

Рассмотрим двумерный случай в расщеплении по оси x . Согласно [16], система релаксации для уравнений газодинамики представляется в следующем виде:

$$U_t + F_x = R, \quad \text{где } U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho \pi \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + \pi \\ \rho w v \\ \rho E w + \pi w \\ \rho \pi w + m^2 w \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\rho}{\varepsilon} [P(U) - \pi] \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Здесь U — вектор консервативных переменных, F — вектор потока, R — релаксационный источник, ρ — плотность газа, w — нормальная к грани ячейки компонента скорости, v — касательная к грани ячейки компонента скорости, $E = e + \frac{w^2}{2} + \frac{v^2}{2}$ — полная внутренняя энергия на единицу объема, $e = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)}$ — внутренняя энергия, P — давление, γ — показатель адиабаты, m — субхарактеристическая массовая скорость и π — “псевдодавление” (при $t = 0$ имеем $\pi = P$). На основании энтропийного анализа, приведенного в работе [16], величина m выбирается исходя из условия $m > \rho c$, где c — скорость звука. При $\varepsilon \rightarrow 0$ псевдодавление $\pi \rightarrow P$ и расширенная система (24) переходит в исходные уравнения Эйлера.

Применим метод численного решения релаксационной системы (24) [12, 14].

1) На первом этапе решается система

$$U_t + F_x = 0, \quad (25)$$

полученные новые величины обозначим \hat{U} .

2) Параметры на следующем шаге по времени U^{n+1} находятся из решения системы уравнений

$$\rho_t = 0, \quad (\rho w)_t = 0, \quad (\rho E)_t = 0, \quad (\rho v)_t = 0, \quad \pi_t = \frac{1}{\varepsilon} (P(U) - \pi)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} &= \hat{\rho}, \quad w^{n+1} = \hat{w}, \quad E^{n+1} = \hat{E}, \quad v^{n+1} = \hat{v}, \\ P^{n+1} &= (\gamma - 1) \hat{\rho} \left(\hat{E} - \frac{\hat{w}^2}{2} - \frac{\hat{v}^2}{2} \right), \quad \pi^{n+1} = P^{n+1} + \exp\left(-\frac{\Delta t}{\varepsilon}\right) (\hat{\pi} - P^{n+1}). \end{aligned} \quad (26)$$

3) Согласно двухшаговой кинетической схеме [12, 14], в предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$ вместо уравнения (26) на каждом шаге счета полагается

$$\pi^{n+1} = P^{n+1}. \quad (27)$$

Аппроксимацию потоков на границе ячеек при численном решении системы (25) проведем на основе решения задачи Римана.

Соотношения на субхарактеристиках линейной системы (25) имеют вид [16]

$$\begin{aligned} mw' + \pi' &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{dx}{dt} = W_L = w_L - \frac{m}{\rho_L}, \\ mw' - \pi' &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{dx}{dt} = W_R = w_R + \frac{m}{\rho_R}, \\ \left(\frac{1}{\rho}\right)' + \frac{\pi'}{m^2} &= 0, \quad e' - \frac{(\pi^2)'}{2m^2} = 0, \quad v' = 0 \quad \text{при} \quad \frac{dx}{dt} = W_* = w_*. \end{aligned} \quad (28)$$

Согласно (27), в двухшаговом алгоритме имеем $\pi_L = P_L$ и $\pi_R = P_R$.

В работе [26] выражения, аналогичные (28), получены из соотношений на разрывах для уравнений в лагранжевых переменных и введены различные значения параметра m , которые соответствуют массовым скоростям через поверхности левой $m_L = \rho_L(w_L - W_L)$ и правой $m_R = \rho_R(W_R - w_R)$ волн. При этом

решение рассматриваемой задачи принимает вид

$$W_* = w_L^* = w_R^* = \frac{m_R w_R + m_L w_L - P_R + P_L}{m_L + m_R}, \quad (29)$$

$$\pi^* = \pi_L^* = \pi_R^* = \frac{m_L P_R + m_R P_L - m_L m_R (w_R - w_L)}{m_L + m_R}, \quad (30)$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_K^* = \left(\frac{1}{\rho}\right)_K - \frac{\pi^* - P_K^*}{m_K^2}, \quad (31)$$

$$e_K^* = e_K + \frac{(\pi^*)^2 - (P_K^*)^2}{2m_K^2}, \quad (32)$$

$$v_K^* = v_K. \quad (33)$$

При $W_L \geq 0$ поток на границе ячеек принимается в виде $F_{i+1/2} = F_L$, а в случае $W_R \leq 0$ — в виде $F_{i+1/2} = F_R$.

Ниже рассматривается случай $W_L \leq 0$, $W_R \geq 0$. По параметрам, полученным из формул (29)–(33), сначала находится полная внутренняя энергия $E_K^* = e_K^* + \frac{W_*^2}{2} + \frac{v_K^2}{2}$, затем — вектор консервативных переменных $U_K^* = \{\rho_K^*, \rho_K^* W_*, \rho_K^* v_K, \rho_K^* E_K^*\}^T$ и далее из соотношений на разрывах вычисляется аппроксимация потока на границе ячейки сетки:

$$F_{i+1/2} = F_K^* = F_K - W_K (U_K^* - U_K). \quad (34)$$

Здесь индекс K принимает значение L или R в зависимости от знака скорости W_* .

Соотношение (27) заменяет последнее уравнение системы (24), и речь идет о кинетической интерпретации приближенного решения задачи Римана.

В случае (27) такой же результат, что и вычисления с помощью (34), дает более экономичный алгоритм вычисления аппроксимации потока на границе ячеек $F_{i+1/2}$ непосредственно по полученным из (29)–(33) величинам ρ , w , v , e и π [26, 29].

Необходимо отметить, что в кинетической интерпретации внутренняя энергия определяется из соотношений (32), (30), причем энтропия, согласно [16], вычисляется по этой внутренней энергии и плотности, полученной с помощью (31):

$$S_K^* = (\gamma - 1) e_K^* (\rho_K^*)^{\gamma-1}. \quad (35)$$

Алгоритм (30)–(34) отличается от “звукового” приближения [2], в котором давление, скорость и плотность вычисляются с помощью линеаризации соотношений (29)–(31), а внутренняя энергия находится из уравнения состояния по полученным величинам давления и плотности. В связи с этим, имеется принципиальное различие между энтропией в кинетической интерпретации (35) и энтропией [36], вычисленной по давлению и плотности аналогично “звуковому” приближению, которая в данном случае представляется в виде $S_\pi = \frac{\pi}{\rho^\gamma}$. Рассмотрим качественно это различие.

Согласно (28), приращение энтропии $S = (\gamma - 1) e \rho^{\gamma-1} = \frac{P}{\rho^\gamma}$ (см.(35)) можно выразить следующим образом:

$$dS = \frac{de + Pd(1/\rho)}{T} = \frac{P - \pi}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{S - S_\pi}{T} \rho^\gamma d\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (36)$$

где T — температура.

Как видно из (36), убывание S_π в зонах разрежения $S_\pi \leq S$ при $d\left(\frac{1}{\rho}\right) > 0$ приводит к возрастанию энтропии в кинетической интерпретации. В этой связи, выводы работы [36], основанные на исследовании S_π , не применимы к рассматриваемому подходу, подробное энтропийное обоснование которого дано в работе [16].

С целью уточнения выбора параметра m приведем анализ энтропии (35). Из уравнений (31), (32) отношение энтропии $S = (\gamma - 1) e \rho^{\gamma-1}$ на границе ячеек сетки к энтропии в соответствующей ячейке представим в виде

$$y = \frac{S_K^*}{S_K} = \left[1 + \frac{(\gamma - 1)(x^2 - 1)}{2\gamma b} \right] \left(1 - \frac{x - 1}{\gamma b} \right)^{\gamma-1},$$

где $x = \frac{\pi^*}{P_K}$, $b = \left(\frac{m}{\rho_K c_K}\right)^2$, $K = R$ или L . Знак производной функции $y(x)$ определяется выражением

$$y' \sim (x - 1) \left(b - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} x - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right).$$

1) Случай волны разрежения $x < 1$. Если параметр b выбран равным 1, то $y' \sim -(x - 1)^2 < 0$ и $y > 1$, т.е. условие $m_K = \rho_K c_K$ обеспечивает неубывание энтропии в расчете зон разрежения.

2) Случай ударной волны $x > 1$. Если $b > \frac{\gamma + 1}{2\gamma} x + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}$, т.е. параметр b больше точного значения на ударной волне, то $y' > 0$, а функция y возрастает и $y > 1$.

Таким образом, в обоих случаях получился предсказуемый результат: энтропия возрастает, если величина параметра m больше точного значения массовой скорости.

Рассмотрим волну, обращенную вправо (поток газа через нее вдоль оси x направлен справа налево), и некоторые свойства перехода из состояния газа до разрыва “+” в состояние после “-”.

В случае ударной волны, в соответствии с теоремой Олейник и теоремой Цемплена в газодинамике, справедливы неравенства

$$u_- + c_- > W > u_+ + c_+, \quad \rho_- c_- > \rho_+(u_- - u_+ + c_-) > M > \rho_+ c_+,$$

где M — плотность потока массы через поверхность волны и W — скорость волны.

Если правая волна является волной разрежения, то максимальное значение скорости распространения возмущения определяется характеристикой перед волной $u_+ + c_+$, и максимальное значение массовой скорости равно $\rho_+ c_+$.

Таким образом, значение массовой скорости правой волны, превышающее точное, можно вычислить по формулам:

$$M_{\max} = \max(\rho_+ c_+, \rho_- c_-) \quad \text{ог} \quad M_{\max} = \rho_+ [\max(u_+ + c_+, u_- + c_-) - u_+].$$

Для левой волны соотношения аналогичны.

Исходя из этих оценок и результатов работы [16], параметр m системы (24) можно принять максимальным по массовым скоростям в соседних ячейках сетки:

$$m = \max(\rho_L c_L, \rho_R c_R). \tag{37}$$

Отметим, что выражения (29), (30) аналогичны (14), (15), а выбор (37) соответствует (16).

Однако вычисления с помощью (37) не всегда обеспечивают выполнение условия $W_L < W_R$. Кроме того, в расчетах сильных зон разрежения формулы (37) приводят к очень большим значениям скоростей волн [16], превышающим характеристическую скорость перед волной. С учетом этого, в работе [26] введены различные значения параметра m , соответствующие левой и правой волне m_L и m_R .

В итоге, рекомендуется следующий алгоритм выбора скоростей волн в задаче (29)–(33), отвечающий условию неубывания энтропии.

1) Согласно выбору метода HLL [6], вычисляются скорости левой и правой волны по наклонам характеристик (характеристическим скоростям):

$$W_L = \min(w_L - c_L, w_R - c_R), \quad W_R = \max(w_L + c_L, w_R + c_R). \tag{38}$$

Этот выбор обеспечивает выполнение энтропийного условия $m_L \geq \rho_L c_L$ и $m_R \geq \rho_R c_R$ в зонах разрежения, а также условия $W_L > W_R$, при этом скорость волны разрежения определяется характеристикой перед волной.

2) Условие (37) применяется в случае конфигураций с ударными волнами, когда скорость волны, рассчитанная с помощью массовой скорости (37), превышает оценку по наклонам характеристик (38):

$$\begin{aligned} W_L &= w_L - \frac{\rho_R c_R}{\rho_L} \quad \text{при} \quad w_L - \frac{\rho_R c_R}{\rho_L} < w_R - c_R < w_L - c_L, \\ W_R &= w_R + \frac{\rho_L c_L}{\rho_R} \quad \text{при} \quad w_R + \frac{\rho_L c_L}{\rho_R} > w_L + c_L > w_R + c_R. \end{aligned} \tag{39}$$

Оценка скоростей волн (39) приводит к дополнительному размазыванию скачка примерно на одну ячейку сетки, а в схемах без учета контактного разрыва не обязательна.

Методы, описанные для скалярного закона сохранения (13), (14), (19)–(21), применяются для системы (25) путем замены величины u на вектор консервативных переменных U , величины f — на вектор потока F , а значения скоростей волн s_L , s_* и s_R — соответственно на W_L , W_* и W_R . Поток $F(U^*)$ вычисляется следующим образом: $F(U^*) = W_*U^* + Q^*$, где $Q^* = \{0, \pi^*, 0, \pi^*W_*, m_L m_R W_*\}^T$.

Как видно из (36), для параметра π^* (30) энтропийно обосновано применение ограничителя fix.

В случае (40) расчеты с учетом контактного разрыва по формулам (13), (14), (19), (20) отвечают решению задачи (29)–(33) с аппроксимацией потоков (34). Уравнения в виде (19), полученные из соотношений на разрывах (18), универсальны в зависимости от выбора скоростей волн W_R , W_L и способа вычисления параметра ω и включают в себя схемы LxF, HLL и Русанова, а также их варианты с учетом контактного разрыва (XC) и модификации типа XGFORCE с максимальной оценкой скорости средней волны. Следует подчеркнуть, что все перечисленные подходы энтропийно обоснованы. Обобщение на трехмерный пространственный случай не представляет затруднений.

В работе [31] к виду (19) приведена и схема Roe [7]; полученный алгоритм с выбором скоростей левой и правой волн согласно HLL [25] на ударных волнах точно соответствует методу Roe.

В рассматриваемом подходе двухволновые схемы LxF, Русанова и HLL ($\omega = 0$) совпадают с их кинетическим вариантом.

В случае учета контактного разрыва или применения подхода типа GFORCE параметр π^* участвует в вычислении потока $F(U^*)$. В этой связи, схемы с учетом контактного разрыва и с выбором скоростей (38), (39), а также схемы типа GFORCE с (38) обозначим соответственно HLLCK и KGFORCE, где К обозначает kinetic.

Заметим, что в кинетической интерпретации при вычислении потока $F(U^*)$ не требуется уравнение состояния. Вместе с тем, в схеме GFORCE [35] давление рассчитывается с привлечением уравнения состояния по компонентам вектора консервативных переменных, что усложняет обобщение метода [35] на расчеты с переменным показателем адиабаты.

На рис. 3 приведены результаты расчетов неподвижного контактного разрыва по изложенным схемам. Начальные данные: $\rho_1 = 5.0$, $\rho_2 = 1.0$; $w_1 = w_2 = 0$; $P_1 = P_2 = 1.0$ и $x_0 = 0.5$.

Применение модификации KGFORCE с выбором скоростей левой и правой волн по HLL (38), как и ожидалось, приводит к меньшему размазыванию контактного разрыва, чем схема HLL. Как можно видеть, добавление контактного разрыва в двухволновые схемы по изложенному алгоритму эффективно.

Результаты расчетов тестовых задач приведены в работах [26, 29, 31]. Представленные методы реализованы в расчете струйных течений [39].

4. Заключение. Приведены модификации численных методов решения уравнений газодинамики на основе приближенного решения задачи Римана из соотношений на разрывах.

Предложены новые способы учета контактного разрыва и алгоритмы с максимальной скоростью средней волны в методах с верхней оценкой скоростей левой и правой волн.

На примере скалярного закона сохранения с выпуклой функцией потока проиллюстрирована энтропийная допустимость предложенных модификаций.

Приведены кинетические интерпретации предложенных методов для уравнений газодинамики, удовлетворяющие энтропийному условию.

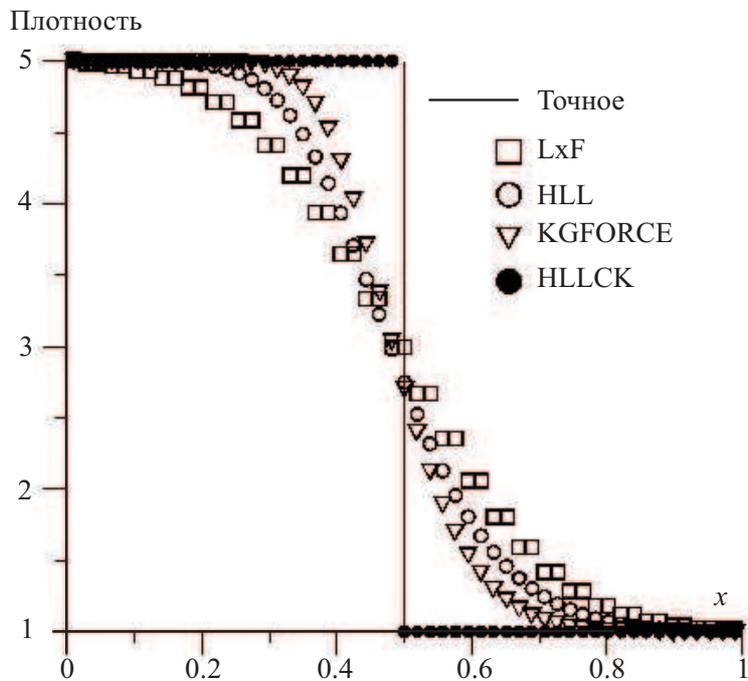


Рис. 3. $\rho_1 = 5.0$, $\rho_2 = 1.0$, $w_1 = w_2 = 0$, $P_1 = P_2 = 1.0$, $t = 1.2$, CFL = 0.9

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neumann J., Richtmyer R.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // *J. Appl. Phys.* 1950. **21**, N 3. 232–237.
2. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.
3. *Friedrichs K.O.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 1954. **7**. 345–392.
4. *Lax P.D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // *Comm. Pure Appl. Math.* 1954. **7**. 159–193.
5. *Русанов В.В.* Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 1961. **1**, № 2. 267–279.
6. *Harten A., Lax P.D., van Leer B.* On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. Numer. Anal.* 1981. **18**. 289–315.
7. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // *J. Comput. Phys.* 1981. **43**, N 2. 357–372.
8. *Engquist B., Osher S.* One-sided difference approximation for nonlinear conservation laws // *Math. Comp.* 1981. **36**. 321–351.
9. *Osher S.* Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations // *SIAM J. Numer. Anal.* 1984. **21**, N 2. 217–235.
10. *Toro E.F., Spruce M., Speares S.* Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver // *Shock Waves.* 1994. **4**. 25–34.
11. *Batten P., Clarke N., Lambert C., Causon D.M.* On the choice of savespeeds for the HLLC Riemann solver // *SIAM J. Comput.* 1997. **18**, N 6. 1553–1570.
12. *Jin S., Xin Z.P.* The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions // *Comm. Pure Appl. Math.* 1995. **48**. 235–276.
13. *Chen G.-Q., LeFloch P.G.* Entropy flux-splittings for hyperbolic conservation laws. Part I: General framework // *Comm. Pure Appl. Math.* 1995. **48**. 691–729.
14. *LeVeque R.J., Pelanti M.* A class of approximate Riemann solvers and their relation to relaxation schemes // *J. Comput. Phys.* 2001. **172**. 573–591.
15. *Tadmor E.* Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems // *Acta Numerica.* Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 451–512.
16. *Bouchut F.* Entropy satisfying flux vector splittings and kinetic BGK models // *Numer. Math.* 2003. **94**. 623–672.
17. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
18. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer, 1999.
19. *LeVeque R.J.* Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge Univ. Texts in Applied Mathematics. Cambridge, 2004.
20. *Stein E., de Borst R., Hughes T.* Encyclopedia of computational mechanics. London: Wiley, 2004.
21. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // *Ученые записки ЦАГИ.* 1972. **3**, № 6. 68–77.
22. *Leer B.* Upwind and high-resolution methods for compressible flow: from donor cell to residual-distribution schemes // *Commun. Comput. Phys.* 2006. **1**, N 2. 192–206.
23. *Berger M., Aftosis M.J.* Analysis of slope limiters on irregular grids // *AIAA Paper* 2005-0490. 2005.
24. *Сафронов А.В.* Способ стабилизации сеточно-характеристических схем для уравнений газодинамики // *Вычислительные методы и программирование.* 2007. **8**, № 1. 10–13.
25. *Einfeldt B.* On Godunov-type methods for gas dynamics // *SIAM J. Num. Anal.* 1988. **25**, 294–318.
26. *Сафронов А.В.* Разностный метод решения нестационарных уравнений газодинамики на основе соотношений на разрывах // *Космонавтика и ракетостроение.* 2006. Вып. 2(43). 152–158.
27. *Honkkila V., Janhunen P.* HLLC solver for ideal relativistic MHD // *J. Comput. Physics.* 2007. **223**. 643–656.
28. *Bouchut F., Klingenberg C., Waagan K.* A multiwave approximate Riemann solver for ideal MHD based on relaxation: theoretical framework // *Numer. Math.* 2007. **108**, N 1. 7–41.
29. *Сафронов А.В.* Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах // *Математическое моделирование.* 2008. **20**, № 2. 76–84.
30. *Pandolfi M., D'Ambrosio D.* Numerical instabilities in upwind methods: Analysis and cures for the “carbuncle” phenomenon // *J. Comput. Phys.* 2001. **166**. 271–301.
31. *Сафронов А.В.* Разностная схема для нестационарных уравнений газодинамики на основе соотношений на разрывах в консервативных переменных // *Вычислительные методы и программирование.* 2007. **8**, № 1. 73–80.
32. *Олейник О.А.* О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // *Успехи матем. наук.* 1959. **14**, № 2. 165–170.
33. *Tadmor E.* Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes // *Math. Comp.* 1984. **43**. 369–381.
34. *Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws // *Comm. Pure Appl. Math.* 1960. **13**. 217–237.

35. *Toro E.F., Titarev V.A.* MUSTA fluxes for systems of conservation laws // J. Comput. Physics. 2006. **216**. 403–429.
36. *Прокопов Г.П.* Необходимость контроля энтропии в газодинамических расчетах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2007. **47**, № 9. 1591–1601.
37. *Сафронов А.В.* Об энтропии в численных схемах газодинамики на основе соотношений на разрывах // XVII Всероссийская конференция “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам”. Тезисы докладов. Дюрсо, 2008.
38. *Chen G.Q., Levermore C.D., Liu T.P.* Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy // Comm. Pure Appl. Math. 1994. **47**. 787–830.
39. *Сафронов А.В.* Численный метод расчета струй продуктов сгорания при старте ракет // Космонавтика и ракетостроение. 2007. № 1(46). 72–79.

Поступила в редакцию
25.12.2008
