УДК 519.713

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАВАЮЩЕГО ЛЬДА ПРИ ПОСАДКЕ САМОЛЕТОВ НА ЛЕДОВЫЕ АЭРОДРОМЫ

А. А. Кулешов[1], В. В. Мымрин[1]

Рассматривается задача о колебаниях ледяного покрова на поверхности воды под действием динамических нагрузок. Задача описывается моделью поперечных колебаний тонких упругих пластин. Приведен разностный метод ее решения. Обсуждаются результаты численного моделирования прикладной задачи о посадке тяжелых транспортных самолетов на ледовые аэродромы в Антарктиде.

Ключевые слова: модель тонкой упругой пластины, поперечные колебания, разностный метод, численное моделирование.

Введение. В [1] разработан новый разностный метод решения задачи о поперечных колебаниях тонких упругих пластин путем сведения ее к начально-краевой задаче для системы уравнений первого порядка по времени и аппроксимации этой системы двухслойной неявной разностной схемой, а также предложен метод решения построенной системы разностных уравнений и приведены результаты тестовых расчетов. В [2] доказана сильная сходимость построенных в [1] разностных аппроксимаций к обобщенному решению исходной задачи. В [3] приведены результаты численного моделирования процесса распространения поперечных колебаний в плавающем ледяном покрове при движении по нему автомобильного транспорта, а также численно исследована прочность ледяного покрова под действием возникающих напряжений. В настоящей статье приводятся результаты численного моделирования важной прикладной задачи о посадке тяжелых транспортных самолетов на ледовые аэродромы в Антарктиде.

1. Математическая модель задачи и ее разностная аппроксимация. Рассмотрим тонкую упругую изотропную пластину переменной толщины $h(x,y)$, лежащую на упругом (винклеровском) основании и совершающую малые поперечные колебания под действием начального отклонения или внешней силы. Задача о колебаниях такой пластины с общими условиями на криволинейном контуре имеет вид [1, 4, 5]

$$\rho h W_{tt} + \Delta(D\Delta W) - (1-\sigma)(D_{yy}W_{xx} - 2D_{xy}W_{xy} + D_{xx}W_{yy}) + aW = F, \quad (x,y)\in\Omega. \tag{1}$$

Граничные условия на криволинейном контуре пластины:

$$\begin{gathered}
-D\Delta W - D(1-\sigma)\big[\sin 2\theta\, W_{xy} - \sin^2\theta\, W_{xx} - \cos^2\theta\, W_{yy}\big] = M_\Gamma, \quad (x,y)\in\Gamma,\\
-\frac{\partial(D\Delta W)}{\partial n} - (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\Big\{D\big[\sin\theta\cos\theta(W_{yy}-W_{xx}) + \cos 2\theta\, W_{xy}\big]\Big\} +\\
+(1-\sigma)\big[\sin\theta\, D_y W_{xx} + \cos\theta\, D_x W_{yy} - (\sin\theta\, D_x + \cos\theta\, D_y)W_{xy}\big] = N_\Gamma, \quad (x,y)\in\Gamma.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $W(x,y,t)$ — поперечный прогиб пластины, отсчитываемый по оси OZ, направленной вниз от срединной плоскости, совмещенной с плоскостью XY и разделяющей толщину пластины $h(x,y)$ пополам; ρ — плотность материала пластины; $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ — жесткость пластины при изгибе, или цилиндрическая жесткость; E — модуль упругости; σ — коэффициент Пуассона материала пластины; n — внешняя нормаль к контуру Γ; l — касательная к контуру; θ — угол между нормалью n и положительным направлением оси OX; aW — реакция упругого основания (реактивное давление), пропорциональная прогибу пластины по модели Винклера; F — внешняя сила, действующая на поверхности пластины; M_Γ — изгибающий момент и N_Γ — перерезывающая сила, заданные на контуре пластины.

В качестве начальных условий заданы начальное отклонение и начальная скорость пластины:

$$W\big|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad W_t\big|_{t=0} = \psi(x,y). \tag{3}$$

[1] Институт математического моделирования РАН, Миусская пл., д. 4А, 125047, Москва; А. А. Кулешов, вед. науч. сотр., e-mail: kuleshov@imamod.ru; В. В. Мымрин, аспирант, e-mail: skpss@mail.ru

При построении разностной аппроксимации задачи (1)–(3) в [1] уравнение (1) и граничные условия (2) записаны в другой форме — через моменты и силы [1, 4, 5]:

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - aW + F, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{4}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} &M_n = M_x \cos^2\theta + M_y \sin^2\theta - M_{xy}\sin 2\theta = M_\Gamma, \quad (x,y) \in \Gamma, \\ &Q_n - \frac{\partial M_{nl}}{\partial l} = N_\Gamma, \quad (x,y) \in \Gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $Q_n = Q_x \cos\theta + Q_y \sin\theta$, $M_{nl} = M_{xy}\bigl(\cos^2\theta - \sin^2\theta\bigr) + (M_x - M_y)\sin\theta\cos\theta$, M_x и M_y — изгибающие моменты, M_{xy} — крутящий момент, Q_x и Q_y — вертикальные перерезывающие силы:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right), \quad M_{xy} = (1-\sigma)D\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$
$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Затем уравнение (4) было сведено к системе уравнений первого порядка по времени

$$\begin{aligned} &\rho h \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - aW + F, \\ &\frac{\partial M_x}{\partial t} = -D\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \sigma D\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial M_y}{\partial t} = -\sigma D\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - D\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = S \end{aligned} \tag{6}$$

с граничными условиями (5) и начальными условиями

$$W\big|_{t=0} = \varphi, \quad S\big|_{t=0} = \psi, \quad M_x\big|_{t=0} = -D(\varphi_{xx} + \sigma\varphi_{yy}), \quad M_y\big|_{t=0} = -D(\varphi_{yy} + \sigma\varphi_{xx}). \tag{7}$$

В [1] также построена разностная аппроксимация задачи (5)–(7) на прямоугольной сетке ω_h с границей Γ_h. Приведем эту аппроксимацию для прямоугольной пластины. Задача рассматривается на временно́м отрезке $[0,T]$, и вводится дискретизация по времени с шагом Δt, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $n = 0, 1, \dots, m_T - 1$, $t_0 = 0$, $t_{m_T} = T$. Область $\Omega^h = \Bigl\{\Omega_{ij},\ i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}\Bigr\}$, аппроксимирующая исходную прямоугольную область Ω, содержит три основных типа ячеек: внутренние, краевые (не являющиеся угловыми) и угловые. Рассматривается сетка $\omega_h = \Bigl\{(x_i, y_j),\ i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}\Bigr\}$, узлами которой являются центры ячеек Ω_{ij}. Заметим, что поскольку ось OZ, по которой отсчитывается прогиб пластины, направлена вниз, то в плане плоскости XY ось OY также направлена вниз, а нумерация ячеек и, соответственно, узлов сетки идет из верхнего левого угла сеточной области.

Вводятся разностные аналоги $\bigl[w_{ij}^n\bigr]$, $\bigl[s_{ij}^n\bigr]$, $\bigl[u_{ij}^n\bigr]$, $\bigl[v_{ij}^n\bigr]$, $\bigl[r_{ij}^n\bigr]$, $\bigl[h_{ij}\bigr]$, $\bigl[D_{ij}\bigr]$, $\bigl[f_{ij}^n\bigr]$ функций W, S, M_x, M_y, M_{xy}, h, D, F соответственно, и балансным методом строится неявная двухслойная разностная схема, представленная ниже в таблице, в которой заданы ρ, a, D_{ij}, h_{ij}, f_{ij}^n, $(i,j) \in \omega_h$, $M_{\Gamma ij}^n$, $N_{\Gamma ij}^n$, $(i,j) \in \Gamma_h$; w_{ij}^0, s_{ij}^0, u_{ij}^0, v_{ij}^0, r_{ij}^0, f_{ij}^0, $M_{\Gamma ij}^0$, $N_{\Gamma ij}^0$.

В приведенной аппроксимации используются обозначения

$$\phi_{ij}^{n+1/2} = \frac{\phi_{ij}^{n+1} + \phi_{ij}^n}{2}, \quad \phi_{ij}^n = (w_{ij}^n, s_{ij}^n, u_{ij}^n, v_{ij}^n, r_{ij}^n)^{\mathrm{T}}, \quad D_{i+1/2,j+1/2} = \frac{D_{ij} + D_{i+1,j} + D_{i,j+1} + D_{i+1,j+1}}{4},$$

а также стандартные обозначения разностных производных [6, 7]:

$$\phi_{t,ij}^n = \frac{\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ij}^n}{\Delta t}, \quad \phi_{\bar{x},ij} = \frac{\phi_{ij} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad \phi_{x,ij} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{ij}}{\Delta x}, \quad \phi_{\bar{x}x,ij} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{ij} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2},$$
$$\phi_{\mathring{x},i,j+1/2} = \frac{\phi_{i+1/2,j+1/2} - \phi_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x}, \quad \phi_{\mathring{x},\mathring{y},i+1/2,j+1/2} = \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i,j+1} - \phi_{i+1,j} + \phi_{ij}}{\Delta x \Delta y}.$$

В работе [1] для решения рассматриваемой системы разностных уравнений предложен метод расщепления по пространственным переменным. Система расщепляется на две подсистемы, в первой из которых

Внутренняя ячейка	$\rho h_{ij} s^n_{t,ij} = u^{n+1/2}_{\bar{x}x,ij} - 2r^{n+1/2}_{\mathring{x}\mathring{y},ij} + v^{n+1/2}_{\bar{y}y,ij} - aw^{n+1/2}_{ij} + f^{n+1/2}_{ij}$, $u^n_{t,ij} = -D_{ij} s^{n+1/2}_{\bar{x}x,ij} - \sigma D_{ij} s^{n+1/2}_{\bar{y}y,ij}, \quad v^n_{t,ij} = -\sigma D_{ij} s^{n+1/2}_{\bar{x}x,ij} - D_{ij} s^{n+1/2}_{\bar{y}y,ij}$;
Краевая левая ячейка	$\rho h_{1j} s^n_{t,1j} = \frac{1}{\Delta x}\, u^{n+1/2}_{x,1j} - \frac{2}{\Delta x}\, r^{n+1/2}_{\mathring{y},3/2,j} + v^{n+1/2}_{\bar{y}y,1j} - aw^{n+1/2}_{1j} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{л}}\,j}}{\Delta x} + f^{n+1/2}_{1j}$, $u^{n+1}_{1j} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{л}}\,j}, \quad v^n_{t,1j} = -(1-\sigma^2) D_{1j} s^{n+1/2}_{\bar{y}y,1j} + \sigma M^n_{\Gamma_{\text{л}}\,t,j}$;
Краевая правая ячейка	$\rho h_{N_1 j} s^n_{t,N_1 j} = -\frac{1}{\Delta x}\, u^{n+1/2}_{\bar{x},N_1 j} + \frac{2}{\Delta x}\, r^{n+1/2}_{\mathring{y},N_1-1/2,j} + v^{n+1/2}_{\bar{y}y,N_1 j} - aw^{n+1/2}_{N_1 j} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{пр}} j}}{\Delta x} + f^{n+1/2}_{N_1 j}$, $u^{n+1}_{N_1 j} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{пр}} j}, \quad v^n_{t,N_1 j} = -(1-\sigma^2) D_{N_1 j} s^{n+1/2}_{\bar{y}y,N_1 j} + \sigma M^n_{\Gamma_{\text{пр}} t,j}$;
Краевая верхняя ячейка	$\rho h_{i1} s^n_{t,i1} = u^{n+1/2}_{\bar{x}x,i1} - \frac{2}{\Delta y}\, r^{n+1/2}_{\mathring{x},i,3/2} + \frac{1}{\Delta y}\, v^{n+1/2}_{y,i1} - aw^{n+1/2}_{i1} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{в}} i}}{\Delta y} + f^{n+1/2}_{i1}$, $u^n_{t,i1} = -(1-\sigma^2) D_{i1} s^{n+1/2}_{\bar{x}x,i1} + \sigma M^n_{\Gamma_{\text{в}} t,i}, \quad v^{n+1}_{i1} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{в}} i}$;
Краевая нижняя ячейка	$\rho h_{iN_2} s^n_{t,iN_2} = u^{n+1/2}_{\bar{x}x,iN_2} + \frac{2}{\Delta y}\, r^{n+1/2}_{\mathring{x},i,N_2-1/2} - \frac{1}{\Delta y}\, v^{n+1/2}_{\bar{y},iN_2} - aw^{n+1/2}_{iN_2} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{н}} i}}{\Delta y} + f^{n+1/2}_{iN_2}$, $u^n_{t,iN_2} = -(1-\sigma^2) D_{iN_2} s^{n+1/2}_{\bar{x}x,iN_2} + \sigma M^n_{\Gamma_{\text{н}} t,i}, \quad v^{n+1}_{iN_2} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{н}} i}$;
Угловая верхняя левая ячейка	$\rho h_{11} s^n_{t,11} = \frac{1}{\Delta x}\, u^{n+1/2}_{x,11} + \frac{1}{\Delta y}\, v^{n+1/2}_{y,11} - aw^{n+1/2}_{11} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{л}1}}}{\Delta x} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{в}1}}}{\Delta y} + f^{n+1/2}_{11}$, $u^{n+1}_{11} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{л}1}}, \quad v^{n+1}_{11} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{в}1}}$;
Угловая нижняя левая ячейка	$\rho h_{1N_2} s^n_{t,1N_2} = \frac{1}{\Delta x}\, u^{n+1/2}_{x,1N_2} - \frac{1}{\Delta y}\, v^{n+1/2}_{\bar{y},1N_2} - aw^{n+1/2}_{1N_2} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{л}} N_2}}{\Delta x} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{н}} 1}}{\Delta y} + f^{n+1/2}_{1N_2}$, $u^{n+1}_{1N_2} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{л}} N_2}, \quad v^{n+1}_{1N_2} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{н}} 1}$;
Угловая верхняя правая ячейка	$\rho h_{N_1 1} s^n_{t,N_1 1} = -\frac{1}{\Delta x}\, u^{n+1/2}_{\bar{x},N_1 1} + \frac{1}{\Delta y}\, v^{n+1/2}_{y,N_1 1} - aw^{n+1/2}_{N_1 1} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{пр}} 1}}{\Delta x} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{в}} N_1}}{\Delta y} + f^{n+1/2}_{N_1 1}$, $u^{n+1}_{N_1 1} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{пр}} 1}, \quad v^{n+1}_{N_1 1} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{в}} N_1}$;
Угловая нижняя правая ячейка	$\rho h_{N_1 N_2} s^n_{t,N_1 N_2} = -\frac{1}{\Delta x}\, u^{n+1/2}_{\bar{x},N_1 N_2} - \frac{1}{\Delta y}\, v^{n+1/2}_{\bar{y},N_1 N_2} - aw^{n+1/2}_{N_1 N_2} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{пр}} N_2}}{\Delta x} + \frac{N^{n+1/2}_{\Gamma_{\text{н}} N_1}}{\Delta y} + f^{n+1/2}_{N_1 N_2}$, $u^{n+1}_{N_1 N_2} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{пр}} N_2}, \quad v^{n+1}_{N_1 N_2} = M^{n+1}_{\Gamma_{\text{н}} N_1}$;
Аппроксимация последнего уравнения системы (6) для всех ячеек имеет вид $w^n_{t,ij} = s^{n+1/2}_{ij}$.	

неявно аппроксимируются только разностные производные по x, а во второй — по y. Для эффективного решения каждой из этих подсистем, перенумеровав определенным образом неизвестные, получим систему линейных алгебраических уравнений с девятидиагональной матрицей, которая решается методом прогонки, при этом прогоночные коэффициенты вычисляются в четыре этапа. Результаты тестовых расчетов показали высокую эффективность предложенного метода решения задачи.

2. Результаты расчетов колебаний плавающего ледяного покрова при посадке самолетов на ледовые аэродромы. Задачу о колебаниях плавающего ледяного покрова под действием различных динамических нагрузок можно рассматривать как задачу о колебаниях тонкой упругой пластины, лежащей на жидком основании, на верхнюю поверхность которой действует внешняя сила $f(x,y,t)$, а на нижнюю поверхность — выталкивающая архимедова сила и сила, обусловленная потенциальным течением жидкости под ледяным покровом. Отметим, что в подобной постановке задача о колебаниях ледяного покрова рассматривалась в работах многих авторов (см., например, [8–13]). В качестве математического аппарата исследований в этих работах применялся аналитический метод решения: перемещение по льду плоского фронта давления задавалось в правой части уравнения δ-функцией вида $P\delta(x - vt)$, где P — сила, действующая на поверхность ледяного покрова, δ-функция представлялась в виде интеграла Фурье, и решение задачи для прогиба пластины и потенциала течения жидкости подо льдом получалось также в виде интегралов. Численные методы с непосредственной аппроксимацией уравнения поперечных колебаний тонких упругих пластин для решения рассматриваемых прикладных задач в этих работах практически не применялись. Как было отмечено во введении, в работе [3] на основе рассматриваемого разностного метода было проведено численное моделирование процесса распространения поперечных колебаний в плавающем ледяном покрове при движении по нему автомобильного транспорта. Другой важной прикладной задачей является расчет поперечных прогибов плавающего ледяного покрова и возникающих в нем напряжений при посадке на него тяжелых транспортных самолетов. Такие постоянно действующие ледовые аэродромы расположены в Антарктиде.

Уравнение поперечных колебаний ледяного покрова на поверхности воды в приближении тонкой упругой пластины имеет вид (1):

$$\rho h W_{tt} + \Delta(D\Delta W) - (1-\sigma)(D_{yy}W_{xx} - 2D_{xy}W_{xy} + D_{xx}W_{yy}) = F - \rho_{\text{в}} g W,$$

где $\rho_{\text{в}} g W$ — выталкивающая архимедова сила, действующая со стороны воды на нижнюю поверхность ледяного покрова; $F = f - \rho_{\text{в}} \left.\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=z_1}$, f — динамическая нагрузка техногенного характера на поверхности ледяного покрова, а последний член описывает динамическое воздействие, обусловленное потенциальным течением жидкости под ледяным покровом.

Потенциал движения жидкости ϕ отражает собственные колебания в системе лед–жидкость, он удовлетворяет уравнению Лапласа и условиям непроницаемости на дне водоема. Поскольку совместное решение уравнения колебаний ледяного покрова и уравнений течения жидкости подо льдом представляет значительные вычислительные сложности, потенциал движения жидкости можно задать, например, в виде плоской волны давления [8, 9]. Однако для сплошного толстого ледяного покрова в районах размещения ледовых аэродромов собственные колебания в системе лед–жидкость, согласно экспериментальным данным, малы и при численном моделировании действия техногенных нагрузок на ледяной покров они не учитывались.

При поперечных колебаниях ледяного покрова происходит его растяжение и сжатие. Компоненты тензора напряжений, определяемые из закона Гука, для тонкой упругой пластины выражаются формулами $\sigma_{xx} = 12z\,\dfrac{M_x}{h^3}$, $\sigma_{yy} = 12z\,\dfrac{M_y}{h^3}$, $\sigma_{xy} = -12z\,\dfrac{M_{xy}}{h^3}$. На каждом временно́м шаге работы компьютерной программы вычисляются разностные аналоги u^n_{ij}, v^n_{ij}, r^n_{ij} моментов M_x, M_y, M_{xy} соответственно. Так как максимальные по модулю растягивающие и сжимающие напряжения возникают на поверхностях ледяного покрова, находим при $z = \pm h/2$ максимальное по модулю по сеточной области ω_h значение напряжений. При достижении этой величиной предельных значений прочности льда на растяжение или сжатие можно сделать вывод о том, что на n-м временно́м шаге произойдет необратимая деформация и лед будет разрушаться.

С помощью созданного авторами программного комплекса были проведены численные эксперименты по изучению распространения поперечных колебаний ледяного покрова на поверхности воды при посадке на него самолетов. В численных экспериментах задавались следующие значения физических параметров ледяного покрова: модуль упругости $E = 5\times10^9$ н/м^2 [11], коэффициент Пуассона $\sigma = 0.33$ [11], прочность льда на растяжение $0.5 \div 1.0$ МПа, прочность на сжатие $-3 \div -2$ МПа [14, 15]. Моделировалась задача о колебаниях ледяного покрова постоянной толщины со свободным краем (в условиях (2) $M_\Gamma = 0$ и $N_\Gamma = 0$ соответственно). В расчетах рассматривался ледяной покров с линейными размерами 2500 м × 250 м. Размеры сетки — 5000×500 узлов при одинаковых шагах сетки $\Delta x = \Delta y = 0.5$ м — позволили учитывать давление на лед каждого колеса шасси самолета.

На рис. 1 представлены схемы распределения нагрузки на лед от шасси самолетов ИЛ–76ТД и С–130Н Hercules, размеры приведены в метрах, каждый прямоугольник обозначает соответствующую стойку шасси самолета, а каждый квадрат внутри обозначает отдельное колесо, крестиками обозначены узлы сетки, в которых задается нагрузка от каждого колеса.

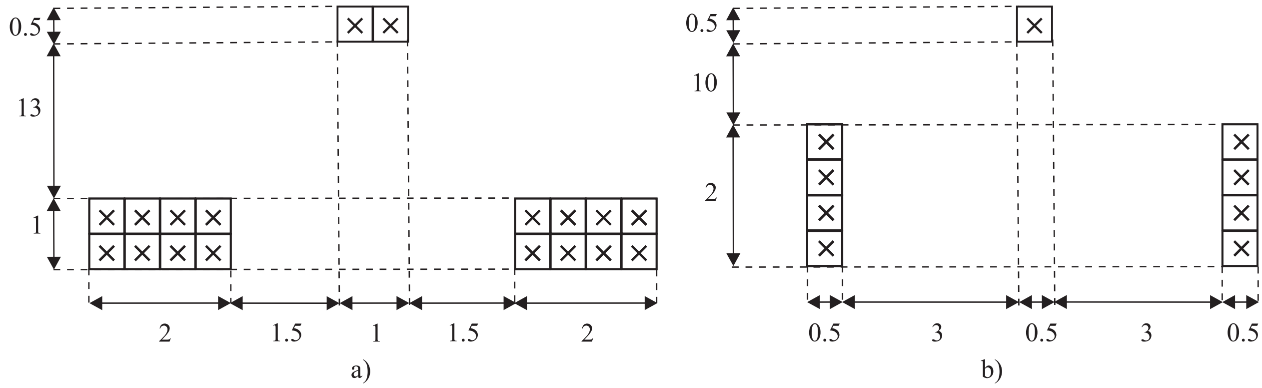

Рис. 1. Схема распределения нагрузки на лед от шасси самолетов:
a) ИЛ–76ТД, b) C–130H Hercules

На рис. 2 и 3 представлены результаты численного моделирования посадки самолета ИЛ–76 массой 151.5 тонны со скоростью 55 м/с на ледяной покров толщиной 5 м. На рис. 2 представлена волновая картина поперечных прогибов ледяного покрова во времени (на нижних рисунках волновая картина в поперечном разрезе по линии движения центра передней стойки шасси).

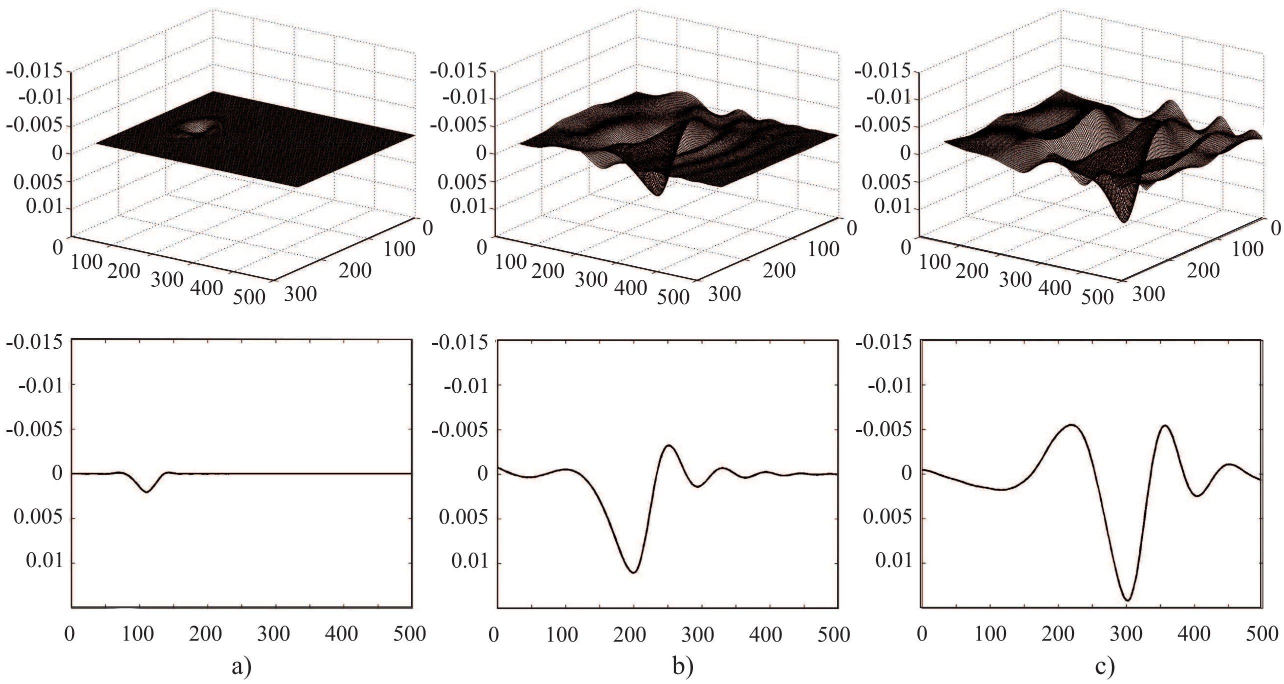

Рис. 2. Результаты расчета значений поперечных прогибов льда W [м] при посадке самолета ИЛ–76ТД. Параметры расчета: масса самолета — 151.5 т; начальная скорость — 55 м/с; толщина льда — 5 м:
a) $n = 2000$, b) $n = 20000$, c) $n = 40000$

На рис. 3 представлены значения нормальной компоненты тензора напряжений σ_{xx} во времени. На этом рисунке можно видеть максимальное напряжение, возникающее под задними стойками шасси самолета, и локальный максимум напряжений от передней стойки шасси. Разрушения льда в проведенном расчете не происходит.

На рис. 4 представлена волновая картина поперечных прогибов ледяного покрова во времени по результатам расчета посадки самолета C–130H Hercules массой 50 т со скоростью 50 м/с на ледяной покров толщиной 2.5 м. Разрушения льда в проведенном расчете не происходит.

Результаты расчета значений поперечных прогибов льда (рис. 4) сравнивались с результатами моделирования посадки самолета C–130H Hercules на ледовый аэродром McMurdo Sound в Антарктиде, полученными в [11] на основе аналитического метода решения и аппроксимации результирующего интеграла квадратурной формулой. Максимальная расчетная величина прогиба (рис. 4) составила 13 мм, а в

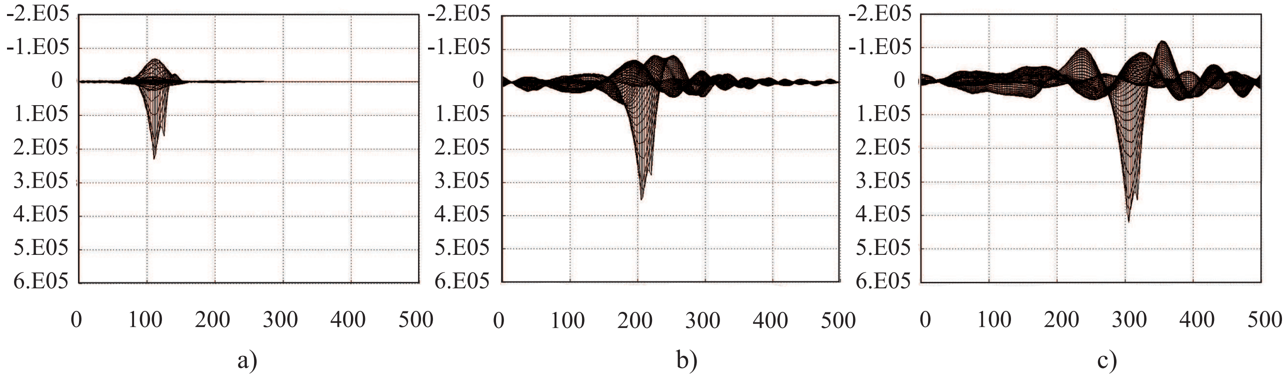

Рис. 3. Результаты расчета значений нормальной компоненты тензора напряжений σ_{xx} [Па] при посадке самолета ИЛ–76ТД на плавающий лед. Параметры расчета: масса самолета — 151.5 т; начальная скорость — 55 м/с; толщина льда — 5 м: a) $n = 2000$, b) $n = 20000$, c) $n = 40000$

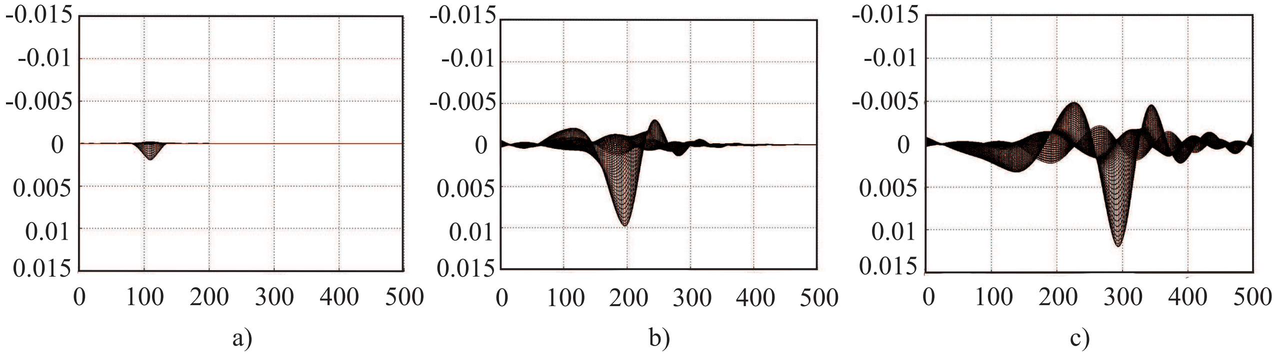

Рис. 4. Результаты расчета значений поперечных прогибов льда W [м] при посадке самолета С–130Н Hercules. Параметры расчета: масса самолета — 50 т; начальная скорость — 50 м/с; толщина льда — 2.5 м: a) $n = 2000$, b) $n = 20000$, c) $n = 40000$

работе [11] — приблизительно 3.5 мм. Однако можно утверждать, что результаты, полученные в настоящей работе, точнее, так как более точно задается нагрузка на лед при посадке самолета как по форме задания, так и по распределению нагрузки по площади. Так, в рассматриваемой модели с шагом сетки 0.5 м учитывается реальная нагрузка и от всех колес шасси самолета (рис. 1b), а в работе [11] нагрузка задается грубо с помощью δ-функции вида $P\delta(x - vt)$, и она равномерно распределена на площади 1.5 м $\times$ 2.5 м.

В ходе численных экспериментов было также проведено исследование предельной толщины ледяного покрова, при которой не происходит его разрушения. В качестве критериев разрушения выбирались минимальные значения прочности на растяжение и сжатие. Для самолета ИЛ–76ТД массой 151.5 т минимальная толщина льда, при которой минимальные значения прочности на растяжение и сжатие не достигались, равна 4.2 м. Для самолета С–130Н Hercules массой 50 т минимальная толщина льда, при которой минимальные значения прочности на растяжение и сжатие не достигались, равна 1.7 м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кулешов А.А.* О численном методе решения задачи поперечных колебаний тонких упругих пластин // Матем. моделирование. 2005. **17**, № 4. 11–26.
2. *Кулешов А.А., Мымрин В.В., Разгулин А.В.* О сильной сходимости разностных аппроксимаций в задаче поперечных колебаний тонких упругих пластин // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2009. **49**, № 1. 152–177.
3. *Кулешов А.А., Мымрин В.В.* Моделирование колебаний плавающего льда в приближении тонкой упругой пластины // Матем. моделирование. 2009. **21**, № 6. 28–40.
4. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
8. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.

9. *Schulkes R.M.S.M., Sneyd A.D.* Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // J. Fluid Mech. 1988. **186**. 25–46.
10. *Miles J., Sneyd A.D.* The response of a floating ice sheet to an accelerating line load // J. Fluid Mech. 2003. **497**. 435–439.
11. *Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W.* A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangular load // J. Fluid Mech. 1995. **287**. 173–197.
12. *Părău E., Dias F.* Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load // J. Fluid Mech. 2002. **460**. 281–305.
13. *Dempsey J.P., Zhao Z.G.* Elastohydrodynamic response of an ice sheet to forced sub-surface uplift // J. Mech. Phys. Solids. 1993. **41**, N 3. 487–506.
14. *Богородский В.В., Гаврило В.П.* Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
15. *Одиноков В.И., Сергеева А.М.* Эволюция процесса нарушения сплошности при разрушении ледяного покрова // Прикл. матем. и техн. физика. 2008. **49**, № 1. 114–119.

Поступила в редакцию
27.11.2009