УДК 517.988

ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Б. Бакушинский[1], М. Ю. Кокурин[2], В. В. Ключев[2]

Исследуется класс конечно-разностных методов решения некорректной задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с секториальным оператором в банаховом пространстве. При различных априорных предположениях о решении установлены равномерные по времени оценки точности конечно-разностных аппроксимаций. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09–01–00273а) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (темплан МарГУ, № 1.2.09).

Ключевые слова: операторное дифференциальное уравнение, задача Коши, некорректная задача, условие секториальности, конечно-разностные методы.

1. Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ — замкнутый линейный неограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X, $\overline{D(A)} = X$. Обозначим $K(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg\lambda| < \varphi\}$, $\varphi \in (0, \pi)$; пусть $\sigma(A)$ — спектр, а $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ — резольвента оператора A, E — единичный оператор в пространстве X. Предполагается, что оператор A удовлетворяет следующему условию секториальности.

Условие 1. Справедливо включение $\sigma(A) \subset K(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, и имеет место оценка $\forall\lambda \in \mathbb{C}\backslash K(\varphi_0)$ $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \dfrac{C_0}{1+|\lambda|}$, где постоянная C_0 не зависит от λ.

На отрезке $t \in [0, T]$ рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0; \quad x_0 \in D(A). \tag{2}$$

Далее будем исследовать аппроксимацию классического решения задачи (1), (2), существование которого предполагаем. Под классическим решением задачи (1), (2) мы понимаем функцию $x = x(t)$, $t \in [0, T]$, со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяющую на этом отрезке уравнению (1) и начальным условиям (2). Задача в такой постановке при выполнении условия 1 является, вообще говоря, некорректной [1, с. 320]. В настоящей статье, посвященной теоретическим аспектам аппроксимации $x(t)$, мы ограничиваемся случаем точно заданных начального элемента x_0 и оператора A. В том случае, когда эти компоненты известны приближенно, рассматриваемые здесь конечно-разностные методы при соответствующем согласовании параметра шага с погрешностями в рамках известной общей схемы построения регуляризующих процедур [2] трансформируются в регуляризующие алгоритмы решения задачи (1), (2) (см., например, [3]).

Для аппроксимации решения задачи (1), (2) применим конечно-разностную схему

$$\begin{aligned} &x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = (\Delta t)^2(\beta_2 Ax_{n+2} + \beta_1 Ax_{n+1} + \beta_0 Ax_n),\\ &x_0 = x_1 = x(0), \quad \Delta t = T/N, \quad n = \overline{0, N-2}, \end{aligned} \tag{3}$$

с вещественными параметрами $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ и натуральным $N \geqslant 2$. В случае гильбертова пространства X эта схема была исследована в [4]. Нашей целью является обоснование и уточнение аппроксимационных свойств схемы (3) для задач вида (1), (2) в банаховом пространстве.

2. Наряду с задачей Коши (1), (2), рассмотрим вспомогательную скалярную задачу Коши

$$\ddot{y}(t) = \lambda y(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0 \tag{4}$$

[1] Институт системного анализа РАН, просп. 60-летия Октября, д. 9, 117312, Москва; гл. науч. сотр., e-mail: bakush@isa.ru

[2] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, просп. Ленина, д. 1, 424001, г. Йошкар-Ола; М. Ю. Кокурин., проф., e-mail: kokurin@marsu.ru; В. В. Ключев, ст. преп., e-mail: vfri@mail.ru

с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Решением задачи (4) является функция $y(t) = \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda} t)$. Соответствующая (3) схема конечно-разностной аппроксимации функции $y(t)$ имеет вид

$$\begin{gathered} v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = (\Delta t)^2(\beta_2 \lambda v_{n+2} + \beta_1 \lambda v_{n+1} + \beta_0 \lambda v_n), \\ v_0 = v_1 = 1, \quad \Delta t = T/N, \quad n = \overline{0, N-2}\,. \end{gathered} \tag{5}$$

Явное выражение решения разностного уравнения (5) есть

$$\begin{gathered} v_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\beta_2 + \beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 + 4\lambda^{-1}(\Delta t)^{-2}}}\right)\mu_1^n + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\beta_2 + \beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 + 4\lambda^{-1}(\Delta t)^{-2}}}\right)\mu_2^n, \quad n = \overline{0, N}; \\ \mu_{1,2} = \frac{2 + \beta_1\lambda(\Delta t)^2 \pm \sqrt{4\lambda(\Delta t)^2 + \lambda^2(\Delta t)^4[\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2]}}{2\big(1 - \beta_2\lambda(\Delta t)^2\big)}\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь ветвь квадратного корня в выражении для $\mu_{1,2}$ выбирается из условия $\sqrt{1} = 1$.

Обозначим через $\nu(\lambda, \Delta t, n)$, $n = \overline{0, N}$, функцию, принимающую определенное в (6) значение v_n при заданных Δt и n.

Потребуем, чтобы коэффициенты разностных схем (3) и (5) удовлетворяли условиям

$$\beta_2 < 0, \quad \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1. \tag{7}$$

Эти условия обеспечивают непрерывность и ограниченность по λ решения (6) разностного уравнения (5). Кроме того, при выполнении (7) схема (5) порождает приближения, аппроксимирующие точное решение задачи (4) в том смысле, что равномерно по $t \in [0, T]$ и λ таким, что $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \Lambda_0 < \infty$, для произвольного $\Lambda_0 > 0$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty,\, t=n\Delta t} v_n = \operatorname{ch}\Big(\sqrt{\lambda}\, t\Big). \tag{8}$$

Кроме соотношений (7), всюду ниже вслед за [4] будем предполагать выполненным условие

$$\big|\nu(\lambda, \Delta t, n)\big| \leqslant C_1 \exp\Big(n \operatorname{Re}\sqrt{\lambda}\,\Delta t\Big), \quad \lambda \in K(\varphi), \tag{9}$$

при некотором $\varphi \in (0, \pi/2)$ с постоянной C_1, не зависящей от λ, n, Δt. Условия на коэффициенты схемы, достаточные для выполнения соотношения (9), могут быть получены аналогично [4]. При достаточно малых значениях угла секториальности φ_0 условия $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2$, $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 \leqslant -8\beta_2$ обеспечивают оценку (9).

Пример 1. Пусть $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = -1$. В этом случае схема (3) принимает вид

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = (\Delta t)^2(2Ax_{n+1} - Ax_{n+2}), \quad x_0 = x_1 = x(0), \quad \Delta t = T/N, \quad n = \overline{0, N-2}\,,$$

а характеристические корни соответствующего разностного уравнения (5) есть $\mu_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\dfrac{\lambda(\Delta t)^2}{1 + \lambda(\Delta t)^2}}$. В силу оценок $\left|1 \pm \sqrt{\dfrac{\zeta}{1+\zeta}}\right| \leqslant \left|1 + \sqrt{\zeta}\right| \leqslant \left|\exp\left(\sqrt{\zeta}\ \right)\right|$, справедливых при $\left|\arg\zeta\right| \leqslant \pi/4$, в соответствующей части плоскости выполняется и соотношение (9) при $\varphi = \pi/4$.

Перейдем к получению аналитического выражения для решения задачи (1), (2). Для оператора, удовлетворяющего условию 1, стандартным образом определяется оператор $A^{-1/2}$ [1, с. 136]. Обозначив $\widetilde{x}(t) = A^{-1/2}\dot{x}(t)$, приведем уравнение (1) к эквивалентной системе $\begin{cases} \dot{x} = A^{1/2}\widetilde{x}, \\ \dot{\widetilde{x}} = A^{1/2}x \end{cases}$ (см. [1, с. 305]).

Сделав соответствующие замены переменных, получим

$$z = \frac{x - \widetilde{x}}{2}, \quad w = \frac{x + \widetilde{x}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{w} = A^{1/2}w, \\ \dot{z} = -A^{1/2}z. \end{cases} \tag{10}$$

В силу условия 1 оператор $(-A^{1/2})$ является генератором аналитической полугруппы $\exp\big(-A^{1/2}t\big) = V(t)$. Поэтому для второго из уравнений полученной системы корректна классическая задача Коши, а для первого из уравнений — задача Коши с обратным направлением времени. В силу (10) классическим решением задачи Коши (1), (2) при условии, что $w(T) \in D(A)$, является

$$x(t) = V(t)z(0) + V(T-t)w(T), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{11}$$

3. В этом разделе будут получены необходимые для дальнейшего вспомогательные оценки. Предположим вначале, что решение задачи (1), (2) существует на отрезке $[0, T_1]$, где $T_1 = aT$ $(a > 1)$. В этом случае аналогично (11) имеем $x(t) = V(t)z(0) + V(T_1 - t)w(T_1)$, $0 \leqslant t \leqslant T_1$. Целью дальнейших рассуждений является получение интегральных представлений для точного решения задачи (1), (2) и для приближений x_n, $n = \overline{0, N}$. Рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{x}(t) = Ax(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(T_1) = x_{T_1}; \quad x_{T_1} \in D(A).$$

Пусть $G_1(A,t)$ — оператор, ставящий в соответствие элементу $x_{T_1} \in D(A)$ решение $x(t)$ указанной краевой задачи. Как следует из [1, с. 308], $G_1(A,t)x = \big[E + V(2T_1)\big]^{-1}\big(V(T_1+t) + V(T_1-t)\big)x$, $t \in [0, T_1]$, $x \in D(A)$.

Существование оператора $\big[E + V(2T_1)\big]^{-1} \in L(X)$ следует из того, что спектр оператора $V(t)$ для любого $t \in [0, T_1]$ лежит в единичном круге $|z| < 1$ [5, с. 59]. Имеем представление

$$\begin{aligned} x_n - x(n\Delta t) &= \nu(A, \Delta t, n)G_1(A, 0)x(T_1) - G_1(A,t)x(T_1) = \\ &= 2\nu(A, \Delta t, n)\big[E + V(2T_1)\big]^{-1}V(T_1)x(T_1) - \big[E + V(2T_1)\big]^{-1}\big(V(T_1+t) + V(T_1-t)\big)x(T_1) = \\ &= \big[E + V(2T_1)\big]^{-1}\big(2\nu(A, \Delta t, n)V(T_1) - V(T_1+t) - V(T_1-t)\big)x(T_1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \big\|x_n - x(n\Delta t)\big\| &\leqslant \Big\|\big(E + V(2T_1)\big)^{-1}\Big\| \big\|2\nu(A, \Delta t, n)V(T_1) - V(T_1+t) - V(T_1-t)\big\| \big\|x(T_1)\big\| \leqslant \\ &\leqslant C_2\big\|2\nu(A, \Delta t, n)V(T_1) - V(T_1+t) - V(T_1-t)\big\| \big\|x(T_1)\big\|. \end{aligned} \tag{12}$$

Обозначим через $S(r)$ круг на плоскости $\mathbb{C}$ с центром в точке $\zeta = 0$ и радиусом r. Определим контур Γ_1 как границу множества $K(\pi - \varphi_0/2) \cup S(r_0)$ при достаточно малом $r_0 > 0$. Далее воспользуемся интегральным представлением Рисса–Данфорда для функций $\exp\big((T_1 - t)\zeta\big)$ и $\exp\big((T_1+t)\zeta\big)$ от оператора $(-A^{1/2})$ и запишем при $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\begin{aligned} V(T_1 - t) &= \exp\big(-(T_1 - t)A^{1/2}\big) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \exp\big((T_1 - t)\zeta\big)\, R(\zeta, -A^{1/2})\, d\zeta, \\ V(T_1 + t) &= \exp\big(-(T_1 + t)A^{1/2}\big) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \exp\big((T_1 + t)\zeta\big)\, R(\zeta, -A^{1/2})\, d\zeta. \end{aligned} \tag{13}$$

В частности,

$$V(T_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \exp(T_1\zeta) R(\zeta, -A^{1/2})\, d\zeta. \tag{14}$$

Пусть $\widetilde{\Gamma}_1$ — произвольный ограниченный замкнутый контур, лежащий в области $K(\pi - \varphi_0/2) \cup S(r_0)$ целиком и окружающий особые точки функции $\nu\big(\zeta^2, \Delta t, n\big)$: точки $\zeta = 0$, $\zeta = \pm 2i(\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2)^{-1/2}(\Delta t)^{-1}$ и $\zeta = \pm i(-\beta_2)^{-1/2}(\Delta t)^{-1}$ согласно (6). Тогда для оператора $\nu(A, \Delta t, n) = \nu\big((-A^{1/2})^2, \Delta t, n\big)$ имеет место представление [6, с. 641]

$$\nu\big((-A^{1/2})^2, \Delta t, n\big) = \nu(\infty, \Delta t, n)E + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1} \nu(\zeta^2, \Delta t, n)\, R(\zeta, -A^{1/2})\, d\zeta, \quad n = \overline{0, N}. \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \nu(\infty, \Delta t, n) = \lim_{\lambda \to \infty} \nu(\lambda, \Delta t, n) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\beta_2 + \beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}}\right)\left(\frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}}{-2\beta_2}\right)^n + \\ &+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\beta_2 + \beta_1}{\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}}\right)\left(\frac{\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}}{-2\beta_2}\right)^n. \end{aligned}$$

Согласно (14) и (15), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\nu(A,\Delta t,n)V(T_1) &= \frac{\nu(\infty,\Delta t,n)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\exp\left(T_1\zeta\right)R(\zeta,-A^{1/2})\,d\zeta+\\ &+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1}\int\limits_{\Gamma_1}\nu(\zeta'^2,\Delta t,n)\,\exp\left(T_1\zeta\right)R(\zeta',-A^{1/2})\,R(\zeta,-A^{1/2})\,d\zeta' d\zeta=\\ &=\frac{\nu(\infty,\Delta t,n)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\exp\left(T_1\zeta\right)R(\zeta,-A^{1/2})\,d\zeta+\\ &+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_1}\left(\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1}\frac{\nu(\zeta'^2,\Delta t,n)\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}\right)\exp\left(T_1\zeta\right)R(\zeta,-A^{1/2})\,d\zeta-\\ &-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1}\left(\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\exp\left(T_1\zeta\right)d\zeta}{\zeta'-\zeta}\right)\nu(\zeta'^2,\Delta t,n)\,R(\zeta',-A^{1/2})\,d\zeta'.\end{aligned} \tag{16}$$

Поскольку в силу теоремы Коши имеют место равенства

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1}\frac{\nu(\zeta'^2,\Delta t,n)\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=2\pi i\big(\nu(\zeta^2,\Delta t,n)-\nu(\infty,\Delta t,n)\big)\quad\forall\zeta\in\Gamma_1,\qquad\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\exp\left(T_1\zeta\right)d\zeta}{\zeta'-\zeta}=0\quad\forall\zeta'\in\widetilde{\Gamma}_1,$$

из (13) и (16) с учетом (9) следует

$$\begin{aligned}&2\nu(A,\Delta t,n)V(T_1)-V(T_1+t)-V(T_1-t)=\\ &\quad=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\big(2\nu(\zeta^2,\Delta t,n)-\exp\left(\zeta t\right)-\exp\left(-\zeta t\right)\big)\exp\left(\zeta T_1\right)R(\zeta,-A^{1/2})\,d\zeta.\end{aligned} \tag{17}$$

Воспользуемся теперь интегральным представлением для резольвенты $R(\zeta,-A^{-1/2})$:

$$R(\zeta,-A^{1/2})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{R(\lambda,A)}{\zeta+\sqrt{\lambda}}\,d\lambda. \tag{18}$$

В (18) контур Γ состоит из лучей $|\arg\lambda|=\varphi_0$. Подставляя (18) в (17), получаем

$$\begin{aligned}&2\nu(A,\Delta t,n)V(T_1)-V(T_1+t)-V(T_1-t)=\\ &\quad=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\big(2\nu(\zeta^2,\Delta t,n)-\exp\left(\zeta t\right)-\exp\left(-\zeta t\right)\big)\exp\left(\zeta T_1\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{R(\lambda,A)}{\zeta+\sqrt{\lambda}}\,d\lambda\right)d\zeta.\end{aligned} \tag{19}$$

Поменяем в (19) порядок интегрирования, пользуясь теоремой Фубини [7, с. 354]. Используя интегральную теорему Коши для неограниченного контура [1, с. 136], приходим к представлению

$$\begin{aligned}&2\nu(A,\Delta t,n)V(T_1)-V(T_1+t)-V(T_1-t)=\\ &\quad=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}R(\lambda,A)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\big(2\nu(\zeta^2,\Delta t,n)-\exp\left(\zeta t\right)-\exp\left(-\zeta t\right)\big)\exp\left(\zeta T_1\right)}{\sqrt{\lambda}-(-\zeta)}\,d\zeta\right)d\lambda=\\ &\quad=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\Big(2\nu(\lambda,\Delta t,n)-\exp\big(-\sqrt{\lambda}t\big)-\exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big)\,\exp\big(-T_1\sqrt{\lambda}\,\big)\,R(\lambda,A)\,d\lambda.\end{aligned}$$

Здесь в силу (9) подынтегральные функции экспоненциально убывают на бесконечности. Возвращаясь к (12), для погрешности аппроксимации с учетом условия 1 имеем оценку

$$\begin{aligned}&\big\|x_n - x(n\Delta t)\big\| \leqslant \\ &\quad\leqslant \frac{C_2}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\Big|2\nu(\lambda,\Delta t,n) - \exp\big(-\sqrt{\lambda}\,t\big) - \exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big|\exp\big(-T_1\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}\,\big)\,\big\|R(\lambda,A)\big\|\,|d\lambda|\,\big\|x(T_1)\big\| \leqslant \\ &\quad\leqslant \frac{C_3}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Big|2\nu(\lambda,\Delta t,n) - \exp\big(-\sqrt{\lambda}\,t\big) - \exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big|\exp\big(-T_1\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}\,\big)}{1+|\lambda|}\,|d\lambda|.\end{aligned} \tag{20}$$

4. Перейдем к доказательству основных результатов работы. Прежде всего, получим оценку выражения $\Big|2\nu(\lambda,\Delta t,n) - \exp\big(-\sqrt{\lambda}\,t\big) - \exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big| = 2\Big|v_n - \mathrm{ch}\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big|$, обеспечивающую выполнение условия аппроксимации (8). Обозначим для удобства $\varepsilon = \sqrt{\lambda}\,\Delta t$. На основании (6) запишем

$$\begin{aligned}&\Big|2\nu(\lambda,\Delta t,n) - \exp\big(-\sqrt{\lambda}\,t\big) - \exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big| \leqslant \\ &\qquad\leqslant \big|\mu_1^n - \exp(n\varepsilon)\big| + \big|\mu_2^n - \exp(-n\varepsilon)\big| + \left|\frac{(2\beta_2+\beta_1)(\mu_2^n-\mu_1^n)}{\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 + 4\varepsilon^{-2}}}\right|.\end{aligned} \tag{21}$$

Оценим слагаемые в правой части (21), считая, что $\mathrm{Re}\,\sqrt{\lambda}\, \leqslant \Lambda$, причем Λ выбирается так, чтобы $|\varepsilon| = \big|\sqrt{\lambda}\,\Delta t\big| < 1$. Рассмотрим первое слагаемое в правой части (21). Имеем

$$\big|\mu_1^n - \exp(n\varepsilon)\big| = \Big|\exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big|\left|\left(\frac{\mu_1}{\exp(\varepsilon)}\right)^n - 1\right| = \Big|\exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big|\left|\left(1 + \frac{\mu_1 - \exp(\varepsilon)}{\exp(\varepsilon)}\right)^n - 1\right|. \tag{22}$$

Преобразуем второе слагаемое бинома в (22):

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1 - \exp(\varepsilon)}{\exp(\varepsilon)} &= \frac{2 + \beta_1\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 + (\varepsilon/2)^2[\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2]} - 2\exp(\varepsilon) + 2\beta_2\varepsilon^2\exp(\varepsilon)}{2(1-\beta_2\varepsilon^2)\exp(\varepsilon)} = \\ &= \frac{2\big(1+\varepsilon-\exp(\varepsilon)\big) + 2\varepsilon\Big(\sqrt{1+(\varepsilon/2)^2[\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2]} - 1\Big) + \varepsilon^2\big(\beta_1 + 2\beta_2\exp(\varepsilon)\big)}{2(1-\beta_2\varepsilon^2)\exp(\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{23}$$

Поскольку $\mathrm{Re}\,\varepsilon \geqslant 0$ при $\lambda \in \Gamma$ и $\beta_2 < 0$, имеем $\big|\exp(\varepsilon)\big| \geqslant 1$ и $\big|1 - \beta_2\varepsilon^2\big| \geqslant 1$. Далее, $\mathrm{Re}\,\varepsilon^2 \geqslant 0$ при $\lambda \in \Gamma$ и

$$\begin{aligned}&\big|1+\varepsilon-\exp(\varepsilon)\big| \leqslant \frac{|\varepsilon|^2}{2} + \frac{|\varepsilon|^3}{4} + \ldots + \frac{|\varepsilon|^k}{2^{k-1}} + \ldots = |\varepsilon|\,\frac{|\varepsilon|/2}{1-|\varepsilon|/2} = \frac{|\varepsilon|^2}{2-|\varepsilon|} < |\varepsilon|^2, \quad |\varepsilon| < 1, \\ &\Big|\sqrt{1+(\varepsilon/2)^2(\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2)} - 1\Big| = \frac{|\varepsilon/2|^2(\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2)}{\Big|\sqrt{1+(\varepsilon/2)^2(\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2)} + 1\Big|} \leqslant \frac{|\varepsilon|^2(\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2)}{8}, \\ &\big|\beta_1 + 2\beta_2\exp(\varepsilon)\big| \leqslant |\beta_1| + 2|\beta_2|\exp(1), \quad |\varepsilon| < 1.\end{aligned} \tag{24}$$

Обозначим $s = \dfrac{\mu_1 - \exp(\varepsilon)}{\exp(\varepsilon)}$. Учитывая (24), с использованием (23) получаем

$$|s| \leqslant \left(1 + \frac{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}{8} + \frac{|\beta_1|}{2} + |\beta_2|\exp(1)\right)|\varepsilon|^2 = C_4|\varepsilon|^2, \quad \varepsilon \in \Gamma, \quad |\varepsilon| < 1. \tag{25}$$

В наших обозначениях $n = \sqrt{\lambda}\, t^{\varepsilon}$, поэтому в силу (25) выполняется $n|s| \leqslant C_4|\lambda t\Delta t|$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\big|(1+s)^n - 1\big| &= |C_n^1 s + C_n^2 s^2 + \ldots + C_n^n s^n| \leqslant n|s| + n^2|s|^2 + \ldots + n^n|s|^n = \\ &= n|s|\,\frac{1-\big(n|s|\big)^n}{1-n|s|} \leqslant 4n|s| \leqslant 4C_4|\lambda|t\Delta t,\end{aligned}$$

если $n|s| < 1/2$. Отметим, что результирующая оценка (см. (28)) будет использоваться именно при малых значениях $n|s|$. Таким образом, в силу (22)

$$\begin{aligned}\big|\mu_1^n - \exp(n\varepsilon)\big| &\leqslant C_5\Big|\exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big|\,|\lambda|\,\Delta t, \\ \big|\mu_2^n - \exp(-n\varepsilon)\big| &\leqslant C_6\Big|\exp\big(\sqrt{\lambda}t\big)\Big|\,|\lambda|\,\Delta t\end{aligned} \tag{26}$$

с постоянными C_5 и C_6, не зависящими от n, t и Δt. Наконец, с помощью (9) находим

$$\left|\frac{(2\beta_2+\beta_1)(\mu_2^n-\mu_1^n)}{\sqrt{\beta_1^2-4\beta_0\beta_2+(2/\varepsilon)^2}}\right| \leqslant \frac{\big(|2\beta_2+\beta_1|\big)\big(|\mu_2|^n+|\mu_1|^n\big)}{2}\,|\varepsilon| \leqslant C_7|2\beta_2+\beta_1|\,\Big|\exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big|\,\big|\sqrt{\lambda}\,\big|\,\Delta t. \tag{27}$$

Подставляя (26) и (27) в (21), получаем искомую промежуточную оценку

$$\Big|2\nu(\lambda,\Delta t,n)-\exp\big(-\sqrt{\lambda}\,t\big)-\exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big| \leqslant C_8\Big|\exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big|\,|\lambda|\,\Delta t \tag{28}$$

с постоянной C_8, не зависящей от λ, n и Δt, которая имеет место при $|\sqrt{\lambda}| \leqslant 0{,}5C_4^{-1}T^{-1}$.

Продолжим теперь оценку интеграла в правой части последнего неравенства из (20). Для этого контур Γ разобьем на два участка: $\Gamma^{(1)} = \big\{\lambda\in\Gamma : \mathrm{Re}\sqrt{\lambda} \leqslant \Lambda\big\}$ и $\Gamma^{(2)} = \big\{\lambda\in\Gamma : \mathrm{Re}\sqrt{\lambda} > \Lambda\big\}$. Выбрав произвольно $\widetilde{T}\in(T,\,T_1)$, в силу (9) и (28) запишем

$$\begin{aligned}
\big\|x_n-x(n\Delta t)\big\| &\leqslant C_9\Bigg\{\int\limits_{\Gamma^{(1)}}\frac{\Big|2\nu(\lambda,\Delta t,n)-\exp\big(-\sqrt{\lambda}\,t\big)-\exp\big(\sqrt{\lambda}\,t\big)\Big|\,\Big|\exp\big(-T_1\sqrt{\lambda}\,\big)\Big|}{1+|\lambda|}\,|d\lambda| + \\
&\quad+\int\limits_{\Gamma^{(2)}}\frac{2\Big|\nu(\lambda,\Delta t,n)\exp\big(-T_1\sqrt{\lambda}\,\big)\Big|}{1+|\lambda|}\,|d\lambda| + \int\limits_{\Gamma^{(2)}}\frac{2\Big|\exp\big(-(T_1-t)\sqrt{\lambda}\,\big)\Big|}{1+|\lambda|}\,|d\lambda|\Bigg\} \leqslant \\
&\leqslant C_9\Bigg\{C_8\exp(\Lambda T)\bigg(\frac{\Lambda}{\cos(\varphi_0/2)}\bigg)^2\Delta t\int\limits_{\Gamma^{(1)}}\frac{\Big|\exp\big(-T_1\sqrt{\lambda}\,\big)\Big|}{1+|\lambda|}\,|d\lambda| + \\
&\quad+2(C_1+1)\exp\big(-(T_1-\widetilde{T}\,)\Lambda\big)\int\limits_{\Gamma^{(2)}}\frac{\Big|\exp\big(-(\widetilde{T}-t)\sqrt{\lambda}\,\big)\Big|\,|d\lambda|}{1+|\lambda|}\Bigg\},
\end{aligned} \tag{29}$$

где $t = n\Delta t$ и $n = \overline{0,N}$.

Полагая $\Lambda = -T_1^{-1}\ln\Delta t$, из (29) получим $\big\|x_n-x(n\Delta t)\big\| \leqslant C_{10}\big[(\Delta t)^{1-T/T_1}(-\ln\Delta t)^2+(\Delta t)^{1-\widetilde{T}/T_1}\big]$. Окончательная оценка имеет вид

$$\big\|x_n-x(n\Delta t)\big\| \leqslant C_{11}(\Delta t)^q, \quad 0\leqslant n\leqslant N, \quad q\in\bigg(0,\,1-\frac{T}{T_1}\bigg), \tag{30}$$

с постоянной $C_{11} = C_{11}(q)$, не зависящей от n и Δt.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* 1 *и приближения к решению задачи Коши* (1), (2) *строятся по схеме* (3), *коэффициенты которой удовлетворяют условию* (7). *Предположим, что выполняется условие* (9) *и решение задачи Коши* (1), (2) *существует на отрезке* $[0,\,T_1]$, *где* $T_1 = aT$, $a > 1$. *Тогда имеет место оценка* (30).

5. Рассмотрим теперь случай, когда решение задачи Коши (1), (2) существует на отрезке $[0,\,T]$, но элемент $x(T)$ допускает истокообразное представление

$$x(T) = A^p w, \quad w\in X, \tag{31}$$

с некоторым $p > 0$. В этом случае с использованием интегрального представления для дробной степени оператора A [1, с. 140] аналогично (20) получим оценку

$$\big\|x_n-x(n\Delta t)\big\| \leqslant \frac{C_{12}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Big|2\nu(\lambda,\Delta t,n)-\exp\big(-\sqrt{\lambda}t\big)-\exp\big(\sqrt{\lambda}t\big)\Big|\exp\big(-T\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\,\big)}{|\lambda|^p\big(1+|\lambda|\big)}\,|d\lambda|\,\|w\|. \tag{32}$$

Разбивая контур Γ на те же части, что и в (29), выберем величину $\Lambda = -\widetilde{T}^{\,-1}\ln(\Delta t)$ с некоторым $\widetilde{T} > T$. Тогда оценка (32) принимает следующий вид для $t = n\Delta t$ и $n = \overline{0,N-1}$:

$$\big\|x_n-x(n\Delta t)\big\| \leqslant \Bigg\{C_{13}\exp(\Lambda T)\Lambda^2\Delta t\int\limits_{\Gamma^{(1)}}\frac{\Big|\exp\big(-T\sqrt{\lambda}\,\big)\Big|}{|\lambda|^p\big(1+|\lambda|\big)}\,|d\lambda| + 2(C_{14}+1)\int\limits_{\Gamma^{(2)}}\frac{|d\lambda|}{|\lambda|^p\big(1+|\lambda|\big)}\Bigg\};$$

поэтому $\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_{15}\big[(-\ln\,\Delta t)^2(\Delta t)^{1-T/\widetilde{T}} + (-\ln\,\Delta t)^{-p/\widetilde{T}}\big]$. Отсюда заключаем, что

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_{16}(-\ln\,\Delta t)^{-q}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad q \in (0,\, p/T). \tag{33}$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть приближенное решение задачи Коши* (1), (2) *на отрезке* $[0, T]$ *строится по схеме* (3) *при условии* (7), *выполняется оценка* (9) *и имеет место истокообразное представление* (31). *Тогда справедлива оценка* (33) *с постоянной* $C_{16} = C_{16}(q)$, *не зависящей от* n *и* Δt.

В заключение отметим, что задача Коши с начальными условиями вида $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x'_0 \neq 0$ сводится к (1), (2) и задаче

$$\ddot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = x'_0. \tag{34}$$

В предположении разрешимости (34) для аппроксимации ее решения применима изложенная выше схема. В этом случае начальные условия для (3) принимают вид $x_0 = 0$, $x_1 = \dot{x}(0)\Delta t$. Условия (7) и указанные выше условия на коэффициенты разностной схемы, обеспечивающие справедливость (9), позволяют получить аналоги теорем 1 и 2, если $x'_0 \in D(A^{1/2})$. Авторы предполагают посвятить этому отдельную публикацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
3. *Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu., Paymerov S.K.* On error estimates of difference solution methods for ill-posed Cauchy problems in a Hilbert space // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. **16**, N 6. 553–565.
4. *Бакушинский А.Б.* О решении разностными методами некорректной задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1972. **VIII**, № 5. 881–890.
5. *Васильев В.В., Пискарев С.И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Теория полугрупп операторов. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1996.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
7. *Бурбаки Н.* Интегрирование (мера, интегрирование мер). М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
09.11.2009