

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОГРУЖЕННОЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Е. В. Мортиков¹

Рассматривается применение метода погруженной границы для решения уравнений Навье–Стокса и его реализация. Численно решается ряд задач о течении вокруг кругового цилиндра, течения вокруг ступеньки, расположенной на входе в канал, течения вокруг двух круговых цилиндров, расположенных последовательно, и об обтекании трехмерного шара. Результаты используются для сравнения с методами, основанными на построении криволинейных сеток.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, погруженная граница, моделирование, метод погруженной границы, метод фиктивных ячеек.

1. Введение. Во многих задачах вычислительной гидродинамики встречаются области со сложной геометрией. Часто для решения подобных задач используют криволинейные сетки, соответствующие границам области. Такой подход требует больших вычислительных затрат для генерации сетки, особенно в задачах с движущимися или деформируемыми границами. Совершенно иной способ решения гидродинамических задач в областях со сложной геометрией заключается в использовании традиционных декартовых сеток, при этом краевые условия на криволинейной границе аппроксимируются специальными методами. Поскольку в этом случае нет необходимости в разработке сложных алгоритмов покрытия области криволинейными сетками, то методы данного класса обладают достаточной универсальностью и не зависят от конкретной конфигурации области.

Первые работы, сочетающие криволинейные границы и декартовы сетки, относятся к первой половине XX века и связаны с решением эллиптических уравнений численными методами [1, 2]. В настоящее время используются такие методы, как метод ступенчатого представления границы (stair-step method [4]), метод скошенных ячеек (cut-cell method [5, 12, 13]), метод погруженной границы (immersed boundary method [25]). Метод ступенчатого представления границы основан на совмещении контура границы и ближайших узлов сетки. Приближение границы ступеньками во многих случаях может оказаться слишком грубым. В методе скошенных ячеек для аппроксимации краевых условий изменяется форма ячеек, имеющих пересечение с криволинейной границей. Это приводит к тому, что вычислительная область представляется не декартовой сеткой; как следствие, метод скошенных ячеек не лишен недостатков тех методов, в которых расчетная область полностью покрывается адаптивной криволинейной сеткой.

Метод погруженной границы был разработан Ч. Пескиным в 1972 г. для моделирования потока крови вокруг сердечного клапана [3]. В его работе уравнения потока численно решались на фиксированной в пространстве прямоугольной сетке с эйлеровой системой координат. Криволинейная сетка с лагранжевой системой координат использовалась для представления упругой границы (стенок сердца), а присутствие погруженной границы учитывалось добавлением специальной функции в уравнения. Метод Пескина успешно применяется для воспроизведения течений, связанных с биологическими процессами, для которых требование упругой границы естественно; однако различные модификации этих методов для решения задач с неупругими и недеформируемыми границами приводят к жестким системам. Для подобных задач, а также для моделирования потоков с большим числом Рейнольдса Re были разработаны варианты метода погруженной границы, в которых влияние погруженной границы на поток учитывается после дискретизации уравнений на декартовой сетке [6, 7]. Данный способ позволяет точно представить границу обтекаемой области, что особенно важно в вычислительной гидродинамике.

Главная задача настоящей работы — создание универсальной программы, позволяющей в контексте разнообразных гидродинамических моделей воспроизводить течения в сложных областях. Основными требованиями к методу представления криволинейной границы были независимость от конкретной модели, а также достаточная точность аппроксимации краевых условий и достоверное описание пограничного

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: Evgeny.Mortikov@gmail.com

слоя. Метод погруженной границы, получивший широкое распространение в последнее время, во многом удовлетворяет указанным критериям.

2. Метод погруженной границы. В ограниченной области Ω_f с границей Γ_f вокруг тела Ω_b , ограниченного границей Γ_b (рис. 1), течение вязкой несжимаемой жидкости можно описать следующей системой уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega_f, \quad (2)$$

$$B(u, p) = 0 \quad \text{на } \Gamma_b \text{ и } \Gamma_f. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность, μ — молекулярная вязкость, B — оператор, определяющий известные краевые условия. Систему уравнений (1)–(3) запишем в виде

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{в } \Omega_f, \quad (4)$$

$$B(\bar{\mathbf{u}}, p) = 0 \quad \text{на } \Gamma_b \text{ и } \Gamma_f, \quad (5)$$

где $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, p)$, \mathcal{L} — оператор, соответствующий уравнению движения (1) и уравнению неразрывности (2).

При решении системы (4), (5) на криволинейной сетке требуется представить границу Γ_b в дискретной форме, а затем построить структурированную или неструктурированную сетку для пространства Ω_f . Интегрирование краевых условий (5) в численную схему в этом случае тривиально.

В методе погруженной границы используется декартова сетка для всего пространства $\Omega = \Omega_f + \Omega_b$ без учета границы Γ_b . Очевидно, что в общем случае узлы построенной таким образом сетки не лежат на границе, поэтому необходим специальный способ аппроксимации краевых условий. Влияние погруженной границы можно учесть посредством модификации системы уравнений (4), (5), а именно с помощью добавления к правой части (4) некоторой функции силы f_b :

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}) = f_b, \quad (6)$$

где $f_b = (f_m, f_p)$, f_m — функция силы для уравнения движения, а f_p — функция силы для уравнения неразрывности. Дискретная форма уравнений решается на всем пространстве $\Omega = \Omega_f + \Omega_b$. Определить выражение для функции силы можно на основе физических свойств конкретной задачи. Например, в случае упругой границы Γ_b , представленной в виде набора волокон X_k , функцию силы для уравнения движения можно выразить соотношением $f_m(x, t) = \sum_k F_k(t) \delta(|x_{i,j} - X_k|)$, где δ — дельта-функция Дирака, а F — механическое напряжение, которое определяется из закона Гука [3].

В связи с тем, что при проектировании функции силы на декартову сетку положение волокна может не совпадать с узлами сетки, дельта-функцию Дирака необходимо заменить гладкой функцией распределения d . Для задач с неупругими границами были предложены различные модификации данной схемы, в обобщенной форме описанные в работе [10].

Одним из существенных достоинств описанного способа аппроксимации краевых условий является его независимость от численной схемы, однако применение гладких функций распределения препятствует точному представлению погруженной границы, что часто неприемлемо для моделирования течений с большим числом Рейнольдса. Важно также отметить, что возникает необходимость в решении уравнений внутри погруженной области, где число точек сетки может оказаться велико, особенно в случае использования сгущенных декартовых сеток.

В 1990-х гг. был разработан другой вариант метода погруженной границы. Основная идея состояла в том, чтобы влияние погруженной границы учитывать на этапе дискретизации уравнений (4), (5). К методам, использующим этот прием, относится метод фиктивных ячеек, который успешно применялся для моделирования течений с числом Рейнольдса до $O(10^5)$ [25].

В методе фиктивных ячеек краевые условия учитываются с помощью определения внутри области Ω_b фиктивных точек. К фиктивным точкам относятся те ячейки, которые лежат внутри области Ω_b и имеют хотя бы одного соседа из области Ω_f . Значения переменных потока в них не определены и могут быть получены интерполяцией по близлежащим точкам на погруженной границе Γ_b , где задано краевое условие, и по соседним ячейкам сетки, принадлежащим Ω_f . Система уравнений (4), (5) с учетом найденных значений в фиктивных узлах затем решается только в области Ω_f .

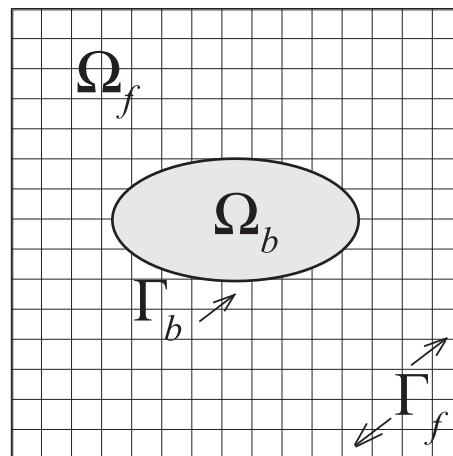


Рис. 1. Геометрия вычислительной области

Существуют различные способы построения интерполяционной схемы [11, 15, 25, 26]. Например, значение в фиктивной ячейке ϕ можно выразить в виде полинома по пространственным координатам. Тогда вычисление коэффициентов интерполяции сводится к решению системы линейных уравнений.

Рассмотрим билинейную интерполяционную схему в двумерном случае, считая, что на погруженной границе задано условие Дирихле $\mathbf{u}|_{\Gamma_b} = U_\Gamma$. Значение в фиктивной ячейке определяется полиномом $\phi = C_0 + C_1x + C_2y + C_3xy$. Коэффициенты C_0, C_1, C_2, C_3 можно определить, учитывая известные значения ϕ в точках $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega_f$ и в двух точках на погруженной границе $(x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \Gamma_b$. Вычисление вектора коэффициентов \mathbf{C} сводится к решению системы линейных уравнений с матрицей Вандермонда и вектором правой части

$$\phi = (U_{F_1}, U_{F_2}, U_\Gamma, U_\Gamma)^T,$$

где U_{F_1} и U_{F_2} — значения в узлах (x_0, y_0) и (x_1, y_1) соответственно. Аналогично можно построить матрицы систем уравнений для схем более высокого порядка и для других типов краевых условий.

Плохая обусловленность матрицы системы может привести к нарушению устойчивости численной схемы. Построение интерполяционной схемы с помощью метода обратных расстояний позволяет избежать связанных с этим проблем [15]. В этом случае значение в фиктивном узле G вычисляется с помощью разложения в ряд Тейлора в окрестности точки O на погруженной границе Γ_b . В двумерном случае имеем

$$\phi_G = \phi_O + \sum_{k=1}^s \frac{1}{k!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \phi_O + R_s, \quad \Delta x = x_G - x_O, \quad \Delta y = y_G - y_O,$$

где $R_s = \frac{1}{(s+1)!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{s+1} \phi_O \sim O(\Delta x^{s+1}, \Delta y^{s+1})$ — остаточный член. Оператор $\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}$ записывается в виде $\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \phi_O = \sum_{i=0}^k C_k^i \Delta x^i \Delta y^{k-i} \frac{\partial^k \phi_O}{\partial x^i \partial y^{k-i}}$, где $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$. Для вычисления производных в точке O воспользуемся соотношениями [14]

$$\phi_O = \frac{1}{q} \sum_{m=1}^n \omega_m \phi_m, \quad \omega_m = \left(\frac{R - h_m}{Rh_m} \right)^p, \quad q = \sum_{l=1}^n \left(\frac{R - h_l}{Rh_l} \right)^p, \quad (7)$$

где ϕ_m — значения в соседних узлах, ω_m — весовые коэффициенты, h_m — расстояние от точки O до узла с индексом m , p — числовой параметр, R — расстояние до наиболее удаленной точки, участвующей в разложении (7). Производные до второго порядка в точке O имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_O}{\partial x} &= \frac{1}{q} \sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x}, & \frac{\partial \phi_O}{\partial y} &= \frac{1}{q} \sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial \phi_m}{\partial y}, & \frac{\partial^2 \phi_O}{\partial x^2} &= \frac{1}{q} \sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \phi_O}{\partial y^2} &= \frac{1}{q} \sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 \phi_O}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{q} \sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ограничивая разложение Тейлора членами до второго порядка включительно и учитывая (8), получим

$$\begin{aligned} \phi_G = \phi|_{\Gamma_b} &+ \frac{1}{q} \left(\sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \Delta x + \sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \Delta y \right) + \\ &+ \frac{1}{2q} \left(\sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + O(\Delta x^3, \Delta y^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Метод фиктивных ячеек можно рассматривать как метод конечных разностей с экстраполяцией через границу значений в фиктивных точках. Возможность использования различных способов интерполяции придает данному методу достаточную гибкость для решения широкого класса задач в областях сложной конфигурации. Интересным представляется разработка адаптивных алгоритмов для выбора интерполяционной схемы в зависимости от геометрии области.

Методу фиктивных ячеек свойственны некоторые недостатки. Решение уравнений в области Ω_f может привести к необходимости в задании дополнительных краевых условий на переменные, входящие в уравнения, а также на вспомогательные переменные, используемые при численном решении. В задачах

с движущимися или деформируемыми границами на шаге по времени $t + \Delta t$ к области Ω_f добавляются ячейки, расположенные внутри области Ω_b в момент времени t , значения в которых не определены. В этом случае для интегрирования уравнений движения по времени можно объединить эти ячейки с доступными ячейками области Ω_f или вычислить значение переменных в них с использованием интерполяционных схем [13]. Решение задач с движущимися границами в методах, для которых краевые условия на погруженной границе аппроксимируются добавлением функции силы в исходную систему уравнений (6), не требует дополнительных вычислений, поскольку используется функция распределения d , действующая по обе стороны от границы, и уравнения рассматриваются на области $\Omega_b + \Omega_f$.

Важной отличительной особенностью различных вариантов метода погруженной границы является то, что система уравнений, описывающая течение жидкости, численно решается на декартовой расчетной сетке. Поэтому нет необходимости в дополнительных вычислительных затратах на хранение структуры сетки по сравнению с методами, использующими криволинейные сетки. Более того, декартовы сетки позволяют применять мощные алгоритмы для решения дифференциальных уравнений, которые приводят к уменьшению числа математических операций, приходящихся на одну точку сетки, и к сокращению времени выполнения алгоритма (например, во многих задачах можно эффективно использовать многосеточные методы для решения уравнения Пуассона [9, 45, 46]). Преимущество использования декартовых сеток особенно заметно для задач с движущимися границами. При моделировании таких течений на криволинейных сетках приходится перестраивать сетку на каждом шаге, а также необходима процедура для проектирования значений переменных потока на новую сетку. Дополнительные вычисления существенно сказываются на времени выполнения, а также на точности и устойчивости численных реализаций математических моделей.

Один из недостатков декартовых сеток по сравнению с криволинейными сетками состоит в том, что криволинейные сетки позволяют лучше контролировать разрешение сетки вблизи границы. Отношение размеров криволинейной и декартовой сеток при одинаковом требуемом разрешении вблизи границы составляет $Re^{1.0}$ для двумерных и $Re^{1.5}$ для трехмерных течений в задачах с ламинарным пограничным слоем [25].

Для моделирования гидродинамических течений в областях сложной конфигурации нами выбран метод фиктивных ячеек в силу его возможностей при решении широкого класса задач, в том числе и в задачах воспроизведения турбулентных потоков. Основной целью ставилось не только решение системы уравнений Навье–Стокса (1)–(3) в сложных областях, но и разработка подходящей реализации метода погруженной границы, которая могла бы эффективно применяться для разнообразных гидродинамических моделей.

3. Численная реализация метода фиктивных ячеек. Метод фиктивных ячеек был реализован на языке C для вычисления необходимой информации об области, в которой рассматривается течение. Вычислительная область Ω представляется в виде декартовой сетки с постоянным значением шага, ограниченной прямоугольником (параллелепипедом в трехмерном случае) со сторонами, параллельными координатным осям. Внутри Ω может быть расположено произвольное число погруженных областей Ω_{b_i} , $i = 1, 2, \dots$, с замкнутыми криволинейными границами Γ_{b_i} . Погруженные границы Γ_{b_i} задаются набором точек, характеризующих связные отрезки в двумерном случае или вершины треугольников, образующих трехмерную поверхность, и векторов внешних нормалей. Для определения принадлежности ячеек областям Ω_{b_i} также необходимы координаты внутренних точек, причем должно выполняться условие, при котором расстояние от них до границы было бы больше минимального шага сетки. Это условие требуется для однозначного определения значений, характеризующих узлы декартовой сетки. На компоненты вектора скорости, а также на дополнительные переменные (например, температура, соленость и т.д.) для каждой границы задаются краевые условия типа Дирихле, Неймана или смешанного типа. Вся информация о вычислительной области, погруженных областях и краевых условиях записывается во входном файле. Возможна также спецификация дополнительных параметров. К ним относится тип размещения значений переменных на декартовой сетке — разнесенный или совмещенный. Способ вычисления значений в фиктивных узлах определяется типом интерполяционной схемы — полиномиальная интерполяция или интерполяция методом обратных расстояний. Полиномиальная интерполяция характеризуется порядком схемы: линейная, билинейная или квадратичная. При этом порядок схемы можно явно указывать для каждой из переменных и каждой погруженной границы. В случае использования интерполяции методом обратных расстояний во входном файле необходимо также задать порядок схемы и число точек n , которые используются в выражении (9).

Для решения уравнений, описывающих течение, на вычислительной области необходимо определить, какие из узлов сетки являются внутренними, т.е. принадлежат погруженным областям Ω_{b_i} . Каждому узлу

декартовой сетки ставится в соответствие число I , равное 1, если погруженная граница пересекает ячейку, в которой расположен узел, и 0 в противном случае. Поскольку известны координаты внутренней точки, то можно определить узел, являющийся внутренним, и присвоить для него $I = -1$. Затем проверяется значение I для всех соседей: если $I = 0$, то значение I становится равным -1 . Как только найдены все точки с $I = 0$, а соответственно и все точки, лежащие внутри тела и не имеющие пересечений с границей, проверяются точки со значением $I = 1$. В случае когда у этих точек есть соседние, лежащие внутри тела ($I = -1$), строится отрезок, соединяющий их. Если отрезок пересекает линию, задающую погруженную границу, то число I не меняется, иначе оно становится отрицательным, но равным по модулю старому значению. Наконец, нужно установить фиктивные узлы, т.е. определить те точки сетки, которые лежат внутри погруженной области, но имеют хотя бы одного соседа в пространстве жидкости. Фиктивные узлы можно найти, проверяя значение параметра I для всех соседних узлов внутри тела. Когда у узла с отрицательным значением I есть сосед с $I > 0$, узел обозначается фиктивным. Для каждого фиктивного узла определяются точки, которые будут использоваться в интерполяционной схеме, и вычисляются коэффициенты с учетом выбранного метода интерполяции, краевых условий и дополнительных параметров.

4. Численный метод решения системы уравнений Навье–Стокса. Для численного решения уравнений (1)–(3) использовался метод дробных шагов, в котором уравнение движения (1) интегрируется в несколько шагов, а вектор скорости модифицируется таким образом, чтобы он удовлетворял уравнению неразрывности (2) [16–18]. В этом методе используется разложение Ходжа, из которого следует, что любую векторную функцию $v(x)$ можно представить в виде суммы бездивергентной составляющей u и градиента скалярного потенциала ϕ : $v(x) = u(x) + \nabla\phi(x)$, где $\nabla \cdot u = 0$, а слагаемые ортогональны: $(u, \nabla\phi) = 0$. Таким образом, соленоидальную часть произвольного вектора v можно получить проектированием в подпространство соленоидальных векторов и вычитанием выбранного с учетом граничных условий градиента скалярного потенциала ϕ , ортогонального данному подпространству:

$$u = P(v). \quad (10)$$

Шаг проектирования (10) для уравнений Навье–Стокса приводит к эллиптическому уравнению для вспомогательного вектора ϕ .

Метод дробных шагов для декартовых сеток с разнесенным способом размещения главных переменных (скорость и давление) был реализован в виде программы на языке С. Геометрия области, координаты фиктивных узлов, коэффициенты для интерполяции методом фиктивных ячеек являются входными данными, получаемыми после работы программы, описанной в разделе 3. Значения в фиктивных узлах вычисляются с помощью специальных процедур для каждой из переменных. Конвективные и диффузионные слагаемые в уравнении движения (1) аппроксимируются методом конечных разностей схемами второго порядка точности. Для интегрирования по времени используется явный метод Адамса–Башфорта второго порядка. Аппроксимации высших порядков для уравнений Навье–Стокса не рассматривались в силу того, что для представления краевых условий на криволинейной границе использовались интерполяционные схемы не выше второго порядка точности. Для решения уравнения Пуассона используется предобусловленный метод стабилизированных бисопряженных градиентов (Bi-CGStab) [8, 19, 20]. К особенностям этого метода относится возможность решения систем линейных уравнений с несимметричными матрицами, большая регулярность сходимости решения и меньшее число необходимых дополнительных векторов по сравнению с методом минимальных невязок. Сходимость стабилизированного метода бисопряженных градиентов сильно зависит от вида предобусловливателя M . Для построения матрицы M использовалось неполное разложение матрицы A на произведение верхней треугольной и нижней треугольной матриц, полученное с помощью процедуры, предложенной Стоуном для систем, аппроксимирующих уравнения в частных производных [21]. Дополнительно к параметрам программной реализации для решения уравнений Навье–Стокса относятся: значение шага по времени численной схемы, краевые условия для скорости на границе Γ_f , начальное возмущение u поля скорости. Модификация программной реализации метода дробных шагов для решения уравнений Навье–Стокса в сложных областях с погруженными границами сводится к добавлению нескольких процедур, что несущественно сказывается на структуре алгоритма и времени счета.

5. Численные эксперименты. Для проверки возможностей метода погруженной границы и реализованного алгоритма был проведен ряд численных экспериментов. Исследовались двумерные течения поверх ступеньки, вокруг одного и двух расположенных последовательно круговых цилиндров, а также обтекание трехмерного шара. Выбор задач для решения обусловлен наличием большого количества информации о свойствах и характеристиках данных течений, полученной как при проведении физических экспериментов, так и численными методами. Результаты расчетов дают возможность провести сравне-

ние с методами, основанными на криволинейных сетках, и оценить эффективность применения метода погруженной границы для более сложных трехмерных областей.

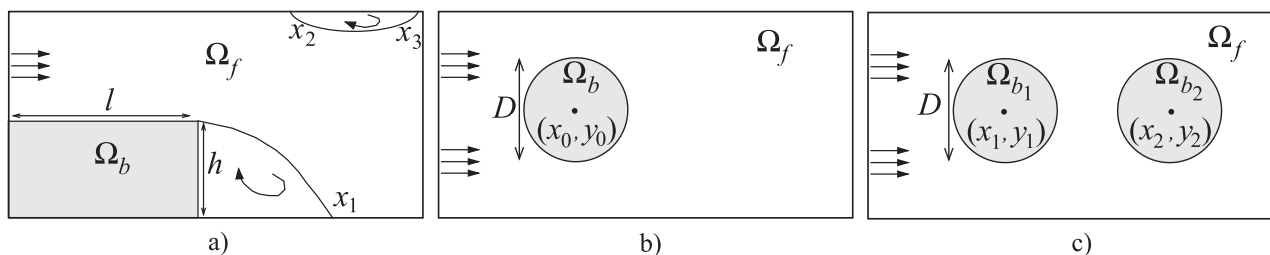


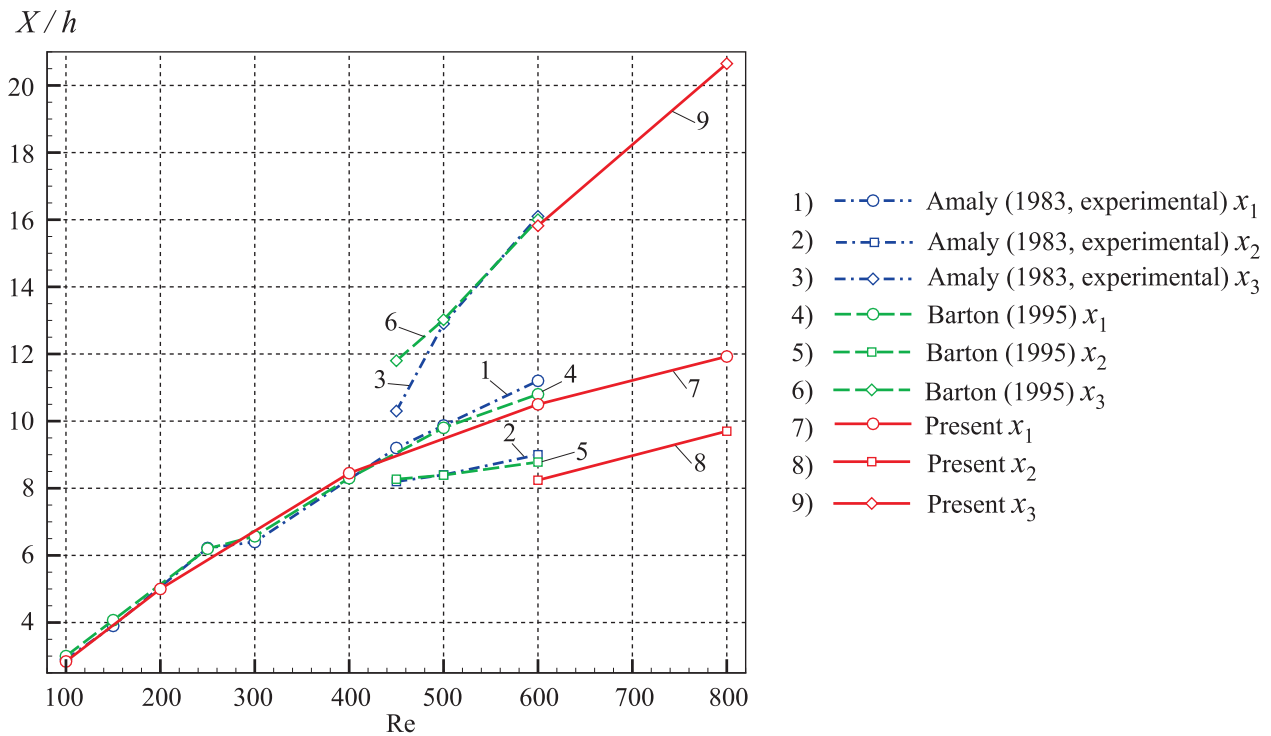
Рис. 2. Конфигурация вычислительной области для каждой из рассматриваемых задач: а) течение поверх ступеньки; б) течение вокруг кругового цилиндра; в) течение вокруг двух последовательно расположенных круговых цилиндров

Течение вязкой несжимаемой жидкости в произвольной области Ω описывается системой уравнений Навье–Стокса (1)–(3). Область Ω_f в поставленных задачах представляла собой канал в форме параллелепипеда (прямоугольника в двумерном случае), с проколотой областью Ω_b , определяющей погруженную границу. При этом одна из пар противоположных граней параллелепипеда считалась входом и выходом канала, а остальные грани соответствовали твердым стенкам. Ось Ox направлялась вдоль канала от входа к выходу, а оси Oy и Oz — вдоль стенок. Конфигурация вычислительной области для рассматриваемых задач схематично изображена на рис. 2. При решении системы (1)–(3) в выбранной области Ω_f необходимы краевые условия на границе канала и на погруженной границе. На входе в канал задавался профиль компоненты вектора скорости на сечении Oyz , на погруженной границе требовалось выполнение условия прилипания. Длина канала предполагалась достаточно большой для того, чтобы минимизировать влияние краевых условий на выходе из канала, заданных в виде равенства нулю производных по нормали компонент вектора скорости, на формирование и структуру течения. Система уравнений (1)–(3) численно решалась на декартовой разнесенной сетке методом дробных шагов, изложенным в разделе 4, а краевые условия на погруженной границе области Ω_b учитывались методом фиктивных ячеек, реализация которого рассмотрена в разделе 3.

5.1. Двумерное течение поверх ступеньки в канале. Ниже используются безразмерные переменные. В качестве области Ω_b , ограниченной погруженной границей Γ_b , рассматривалась прямоугольная ступенька высоты $h = 0.5$ и длины $l = 5$, расположенная на входе в канал длины $L = 25$ и высоты $H = 1$ (рис. 2а). На входе в канал скорость вдоль оси Ox задавалась в виде параболы по переменной y : $U_\Gamma = 24(1 - y)(y - 0.5)$, $0.5 \leq y \leq 1$. Число Рейнольдса Re для течения поверх ступеньки в канале определяется по формуле $Re = \frac{U_i 2h}{\nu}$, где U_i — среднее значение скорости на входе канала, h — высота ступеньки и ν — кинематическая вязкость. Вычисления для чисел Рейнольдса $Re = 100-800$ проводились на декартовой сетке размерности 1001×41 узлов для чисел Рейнольдса, меньших 400, и 2001×81 узлов для больших чисел Рейнольдса. Размерность декартовой сетки выбиралась таким образом, чтобы контур границы ступеньки не проходил через узлы, в которых задаются значения переменных, определяющих течение вязкой жидкости.

Течение в канале со ступенькой исследовалось во многих работах как с помощью физических экспериментов в аэродинамических трубах, так и методами математического моделирования [22, 23]. При малых числах Рейнольдса поток отделяется от острого края ступеньки, формируя рециркуляционную зону L_{R_1} , характеризующуюся точкой x_1 на нижней стенке канала (рис. 2а). Длина рециркуляционной зоны L_{R_1} с ростом числа Рейнольдса увеличивается практически линейно. Малая нелинейность роста обусловлена влиянием верхней стенки канала на вязкое течение. При больших числах Рейнольдса $Re > 400$ увеличение действия градиента давления приводит к появлению второй рециркуляционной зоны L_{R_2} , определяемой точками x_2 и x_3 на верхней стенке канала (рис. 2а). Появление зоны L_{R_2} приводит к замедлению роста длины L_{R_1} по отношению к числу Рейнольдса. Несмотря на относительно простую геометрию области данная задача является хорошим способом проверки численных методов для воспроизведения отрывных течений, которые часто встречаются в вычислительной гидродинамике при моделировании потоков в сложных областях.

Для каждого числа Рейнольдса Re определялись точки x_1 , x_2 и x_3 . Сравнение с экспериментальными данными [22] и результатами математического моделирования рассматриваемого течения конечно-объемным методом [23] приведено на графике (рис. 3). Ось Ox соответствует числу Рейнольдса, ось Oy —

Рис. 3. Значения точек x_1 , x_2 и x_3

значению X/h , где X — координата точки и h — высота ступеньки. Линиями 7, 8, 9 обозначены полученные нами результаты, линиями 1, 2, 3 — экспериментальные данные [22], линиями 4, 5, 6 — результаты математического моделирования, приведенные в [23]. Линии 1, 4, 7 относятся к точке x_1 , линии 2, 5, 8 — к точке x_2 , линии 3, 6, 9 — к точке x_3 . Результаты вычислений хорошо согласуются с известными характеристиками течения в канале со ступенькой. При числах Рейнольдса $Re > 400$ проявляются трехмерные эффекты течения [22], что, возможно, и объясняет небольшое отклонение в полученных значениях.

5.2. Течение вокруг кругового цилиндра. Рассматривается течение в двумерном канале длины $L = 30$ и высоты $H = 15$. Погруженной области Ω_b соответствует круговой цилиндр радиуса $R = 0.5$ с центром в точке (x_0, y_0) , где $x_0 = 7.5$ и $y_0 = 7.5$ (рис. 2b). На входе в канал задавалось условие на скорость вдоль оси Ox : $U_\Gamma = 1$. Число Рейнольдса Re определяется формулой

$$Re = \frac{U_{\max} D}{\nu}, \quad (11)$$

где U_{\max} — максимальное значение модуля скорости, заданной на входе в канал, D — диаметр кругового цилиндра и ν — кинематическая вязкость. Размерность декартовой сетки для данной задачи составляла 301×151 узлов.

При малых числах Рейнольдса ($Re \approx 1$) течение определяется диффузионными слагаемыми и является инерциальным. По мере увеличения числа Рейнольдса до 40 образуются два стационарных симметричных вихря, расположенных позади кругового цилиндра. Дальнейший рост Re приводит к отделению вихрей от поверхности цилиндра и их расширению. При числах Рейнольдса $Re > 47$ течение становится нестационарным и периодическим, наблюдается дорожка Кармана [24].

Вычисления проводились для чисел Рейнольдса $Re = 40$, когда течение является стационарным, и $Re = 80$ для воспроизведения дорожки Кармана. К основным характеристикам течения относятся значения коэффициента лобового сопротивления C_D , коэффициента подъемной силы C_L , числа Струхала St для нестационарного периодического течения и длины рециркуляционной зоны L_w для малых чисел Рейнольдса. Коэффициент лобового сопротивления C_D определяется следующим образом:

$$C_D = \frac{F_D}{0.5U_{\max}^2 D}. \quad (12)$$

Здесь F_D — проекция силы, действующей на цилиндр, на ось Ox . Коэффициент подъемной силы C_L определяется так: $C_L = \frac{F_L}{0.5U_{\max}^2 D}$, где F_L — проекция силы, действующей на цилиндр, на ось Oy . Пе-

риодическая дорожка Кармана характеризуется частотой f_q . Числом Струхалия называется безразмерная величина частоты переменного вихря:

$$St = \frac{f_q}{U_{\max} D}. \tag{13}$$

Рециркуляционная зона для числа Рейнольдса $Re = 40$ соответствует области позади кругового цилиндра, где значение скорости вдоль оси Ox отрицательно ($u < 0$). Значение коэффициента лобового сопротивления, длина рециркуляционной зоны в сравнении с другими методами представления криволинейной границы и экспериментальными данными приведены в табл. 1. Найденное значение числа Струхалия $St = 0.15$ при числе Рейнольдса $Re = 80$ согласуется с теоретическими результатами для рассматриваемого течения и соответствует значениям, полученным в [31, 33]. Значение коэффициента подъемной силы для стационарного течения при $Re = 40$ равняется нулю с точностью до вычислительной погрешности, что является физически верным. Следует отметить, что при использовании методов ступенчатого представления границы значение C_L не будет равняться нулю в этом случае. При числе Рейнольдса $Re = 80$ коэффициент C_L периодически изменяется во времени, что отражает появление вихревой дорожки Кармана.

Таблица 1

Сравнение значений C_D и L_ω для течения вокруг кругового цилиндра

	C_D		L_ω
	Re = 40	Re = 80	Re = 40
Tritton (1959) [24] (экспериментальные данные)	1.48	1.29	—
Dennis and Chang (1970) [27]	1.52	—	2.35
Fornberg (1980) [28]	1.50	—	2.24
Park (1980) [30]	1.51	1.35	—
Calhoun (2002) [29]	1.62	—	2.18
Lima E Silva (2003) [31]	1.54	1.40	—
Russel and Wang (2003) [32]	1.60	—	2.29
Ye (1999) [33]	1.52	1.37	2.27
Ding (2004) [34]	1.71	—	2.20
Mortikov (2009)	1.59	1.38	2.32

5.3. Течение вокруг двух последовательно расположенных круговых цилиндров. Применение метода погруженной границы для моделирования течения в областях со многими несвязанными погруженными границами исследовалось на примере задачи об обтекании двух круговых цилиндров, расположенных последовательно в прямоугольном канале высоты $H = 15$ и длины $L = 35$. Центр первого кругового цилиндра радиуса $R_1 = 0.5$ расположен в точке (x_1, y_1) , где $x_1 = 5.5$ и $y_1 = 7.5$. Центру второго кругового цилиндра радиуса $R_2 = 0.5$ соответствует точка (x_2, y_2) , где $x_2 = 10.5$ и $y_2 = 7.5$ (рис. 2с). Скорость вдоль оси Ox на входе в канал задается условием $U_\Gamma = 1$. Расстояние между двумя круговыми цилиндрами характеризуется безразмерным параметром $g^* = G/D$, где D — диаметр круговых цилиндров и G — минимальное расстояние между границами круговых цилиндров. Физические эксперименты по воспроизведению данного течения показали, что при значениях параметра g^* , больших $g_{cr}^* = 3.8$, наблюдается явление синхронизации вихрей, образующихся при обтекании круговых цилиндров [35]. Расположению круговых цилиндров соответствует значение $g^* = 4.0$, что делает возможным моделирование этого эффекта. Число Рейнольдса Re , определенное соотношением (11), полагалось равным 200. Размер сетки 301×151 .

Коэффициенты и точки для интерполяционных процедур метода фиктивных ячеек вычислялись отдельно для каждой из погруженных областей. Для сравнения этих результатов вычислялись значения коэффициентов лобового сопротивления C_{D1} и C_{D2} , числа Струхалия St_1 и St_2 , определенные соотношениями (12) и (13), для первого (ближнего) и второго (дальнего) кругового цилиндров. Полученные

значения приведены в табл. 2. Результаты показывают хорошую точность и способность метода моделировать сложные двумерные течения в областях произвольной формы. Равенство чисел Струхала для двух круговых цилиндров соответствует эффекту синхронизации вихрей, наблюдаемому при значениях $g^* \geq g_{cr}^*$. Дальнейшее улучшение результатов может быть достигнуто сгущением сетки в области пограничного слоя кругового цилиндра.

5.4. Трехмерное течение вокруг сферы. Рассматривалось течение в канале, в котором расположена сфера с радиусом $R = 0.5$ и центром в точке (x_0, y_0, z_0) .

Размер канала определялся в зависимости от диаметра сферы: $22D \times 10D \times 10D$. Значение шага декартовой сетки — $0.06D$. Сфера с центром в точке (x_0, y_0, z_0) , где $x_0 = 5.0$, $y_0 = 5.0$ и $z_0 = 5.0$, на декартовой сетке представлялась набором треугольников с заданными векторами нормалей для каждой из вершин. Задача о воспроизведении течения вокруг трехмерной сферы решалась при числе Рейнольдса $Re = 100$, которое определяется по формуле $Re = \frac{U_{max} D}{\nu}$, где U_{max} — максимальное значение модуля скорости, заданной на входе канала,

D — диаметр сферы и ν — кинематическая вязкость. Исследования, посвященные моделированию данного течения [38, 39], показали, что при числах Рейнольдса $Re \approx 24$ происходит отделение потока от боковой поверхности сферы. Сформированное вихревое кольцо остается устойчивым и осесимметричным приблизительно до чисел Рейнольдса $Re \approx 240$. При больших числах Рейнольдса течение становится нестационарным и характеризуется трехмерными вихрями сложной конфигурации. В качестве одной из характеристик течения вычислялось значение коэффициента лобового сопротивления $C_D = \frac{F_D}{0.5U_{max}^2 \cdot 0.25\pi D^2}$, где F_D — проекция силы, действующей на сферу вдоль направления течения, U_{max} — максимальное значение модуля скорости на входе в канал и D — диаметр сферы. Полученное значение C_D и значения, вычисленные с помощью аппроксимации краевых условий на сфере другими методами, приведены в табл. 3.

Большой шаг сетки и, как следствие, недостаточно точная аппроксимация пограничного слоя, а также использование простейших интерполяционных схем в методе фиктивных ячеек приводит к тому, что значение коэффициента лобового сопротивления C_D несколько меньше результатов, приведенных в других работах. Сгущению сетки вблизи сферы и аппроксимации краевых условий интерполяционными схемами более высокого порядка препятствует ограничение в вычислительных ресурсах и реализация алгоритма решения уравнений Навье-Стокса в виде последовательного кода. Тем не менее, метод фиктивных ячеек адекватно отображает основные свойства трехмерного течения вокруг сферы. Устранение указанных ограничений в реализации численного алгоритма решений уравнений Навье-Стокса позволит перейти к задачам моделирования трехмерных нестационарных течений в более сложных областях.

6. Заключение. Для моделирования двумерных и трехмерных течений был программно реализован метод фиктивных ячеек. Особенности данной реализации позволяют применять метод погруженной границы совместно с различными гидродинамическими моделями для воспроизведения течений на декартовых сетках. При этом число изменений, которые необходимо внести в исходную модель для представления криволинейных границ, не существенно и не вызывает затруднений.

В качестве примеров численно решались задачи о течении в канале со ступенькой, обтекании одного кругового цилиндра, обтекании двух круговых цилиндров, расположенных последовательно, и трехмерная задача о течении вокруг сферы. Было проведено сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в других работах, где использовались криволинейные сетки, и с данными физических экспериментов. Необходимо отметить, что определенная произвольность в формулировке метода фиктивных ячеек может приводить к ошибкам вблизи криволинейных границ. Полученные результаты показывают способность метода фиктивных ячеек достаточно достоверно воспроизводить интегральные характеристики течений, однако возможность детального описания пограничного слоя нуждается в дальнейшем

Таблица 2

Сравнение значений C_D и St для течения вокруг двух последовательно расположенных круговых цилиндров

	C_{D1}	C_{D2}	St_1	St_2
Farrant (2001) [36]	1.25	0.38	0.179	0.179
Meneghini (2001) [37]	1.18	0.38	0.174	0.174
Mortikov (2009)	1.28	0.40	0.171	0.171

Таблица 3

Сравнение значения C_D для течения вокруг сферы

	C_D
Faldun (2000) [40]	1.08
Johnson and Petal (1999) [41]	1.10
Mortikov (2009)	1.01

исследовании, что следует учитывать при решении задач с криволинейными негладкими границами и при моделировании турбулентных течений.

Дальнейшего улучшения результатов можно добиться увеличением размера декартовой сетки. Возможна разработка способов и алгоритмов автоматического построения декартовых неравномерных сеток, сгущенных непосредственно вблизи погруженной границы, для областей произвольной формы [42]. Увеличение размера сетки для моделирования сложных нестационарных течений сильно сказывается на времени счета при проведении вычислений. Реализация методов решения уравнений, описывающих течение, в виде параллельного алгоритма позволит устранить эту проблему. Для рассмотренных в работе уравнений Навье–Стокса одним из способов получить параллельную форму алгоритма решения является декомпозиция области, что особенно просто в случае решения уравнений на декартовых сетках [43]. В методе фиктивных ячеек для каждого фиктивного узла необходима информация о значениях переменных потока в узлах сетки, которые используются для вычисления коэффициентов интерполяционной схемы, что необходимо учитывать при обмене данными между параллельными процессами [44]. Наиболее явно достоинства метода погруженной границы проявляются при моделировании течений в областях с подвижными границами. Для численного решения задач в таких областях за приемлемое время счета также требуется реализация метода погруженной границы в виде параллельного алгоритма. Широкие возможности и успешное применение метода погруженной границы для рассмотренных задач дают основание для продолжения работы над совершенствованием его реализации с целью получения эффективного инструмента исследования турбулентных течений в областях сложной конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М: Наука, 2003.
2. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные схемы для эллиптических уравнений. М: Наука, 1976.
3. Peskin C.S. The fluid dynamics of heart valves: experimental, theoretical and computational methods // Annual Review of Fluid Mechanics. 1982. **14**. 235–259.
4. de Zeeuw D., Powell K.G. An adaptively refined Cartesian mesh solver for the Euler equations // J. of Computational Physics. 1993. **104**. 56–68.
5. Ingram D.M., Causon D.M., Mingham C.G. Developments in Cartesian cut cell methods // Mathematics and Computers in Simulation. 2003. **61**. 561–572.
6. Mohd-Yusof J. Combined immersed boundary/B-spline methods for simulation of flow in complex geometries // CTR Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research. Stanford: Stanford University Press, 1997. 317–328.
7. Verzicco R., Mohd-Yusof J., Orlandi P., Haworth D. Large eddy simulation in complex geometric configurations using boundary body forces // The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 2000. **38**. 427–433.
8. Van der Vorst H.A. Iterative Krylov methods for large linear systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
9. Bramble J. Multigrid methods. Essex: Longman Scientific & Technical, 1993.
10. Goldstein D., Handler R., Sirovich L. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field // J. of Computational Physics. 1993. **105**. 354–366.
11. Tseng Y.-H., Ferziger J.H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry // J. of Computational Physics. 2003. **192**. 593–623.
12. Clarke D.K., Hassan H.A., Salas M.S. Euler calculations for multielement airfoils using Cartesian grids // The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 1986. **24**. 353–358.
13. Udaykumar H.S., Mittal R., Rampunggoon P., Khanna A. A sharp interface Cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries // J. of Computational Physics. 2001. **174**. 345–380.
14. Franke R. Scattered data interpolation: tests of some method // Mathematics of Computation. 1982. **38**. 181–200.
15. Gao T., Tseng Y.-H., Lu X.-Y. An improved hybrid Cartesian/immersed boundary method for fluid–solid flows // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 2007. **55**. 1189–1211.
16. Chorin A.J. Numerical solution of the Navier–Stokes equations // Mathematics of Computation. 1968. **22**. 745–762.
17. Kim J., Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier–Stokes equations // J. of Computational Physics. 1985. **59**. 308–323.
18. Brown D.L., Cortez R., Minion M.L. Accurate projection methods for the incompressible Navier–Stokes equations // J. of Computational Physics. 2001. **168**. 464–499.
19. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. Boston: PWS Publishing Company, 1996.
20. Van der Vorst H.A. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM J. on Scientific and Statistical Computing. 1992. **13**. 631–644.
21. Stone H.L. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations // SIAM J. on Numerical Analysis. 1968. **5**. 530–558.
22. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // J. of Fluid Mechanics. 1983. **127**. 473–496.

23. *Barton I.E.* A numerical study of flow over a confined backward-facing step // *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*. 1995. **21**. 653–665.
24. *Tritton D.J.* Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers // *J. of Fluid Mechanics*. 1959. **6**. 547–567.
25. *Mittal R., Iaccarino G.* Immersed boundary methods // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2005. **37**. 239–261.
26. *Винников В.В., Ревизников Д.Л.* Неявный метод погруженной границы с фиктивными ячейками для решения задач о течении вязкой несжимаемой жидкости в сложных областях // *Труды Московского авиационного института*. 2007 (<http://www.mai.ru/science/trudy>).
27. *Dennis S.C.R., Chang G.* Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 // *J. of Fluid Mechanics*. 1970. **42**. 471–489.
28. *Fornberg B.* A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder // *J. of Fluid Mechanics*. 1980. **98**. 819–855.
29. *Calhoun D.* A Cartesian grid method for solving the two-dimensional streamfunction – vorticity equations in irregular regions // *J. of Computational Physics*. 2002. **176**. 231–275.
30. *Park J., Kwon K., Choi H.* Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 160 // *J. of Mechanical Science and Technology*. 1998. **12**. 1200–1205.
31. *Lima e Silva A.L.F., Silveira-Neto A., Damasceno J.J.R.* Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method // *J. of Computational Physics*. 2003. **189**. 351–370.
32. *Russel D., Wang Z.J.* A Cartesian grid method for modeling multiple moving objects in 2D incompressible viscous flow // *J. of Computational Physics*. 2003. **191**. 177–205.
33. *Ye T., Mittal R., Udaykumar H.S., Shyy W.* An accurate Cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries // *J. of Computational Physics*. 1999. **156**. 209–240.
34. *Ding H., Shu C., Yeo K.S., Xu D.* Simulation of incompressible viscous flows past a circular cylinder by hybrid FD scheme and meshless least square-based finite difference method // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004. **193**. 727–744.
35. *Zdravkovich M.M.* Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements // *ASME J. of Fluids Engineering*. 1997. **99**. 618–633.
36. *Farrant T., Tan M., Price W.G.* A cell boundary element method applied to laminar vortex-shedding from array of cylinders in various arrangements // *J. of Fluids and Structures*. 2001. **14**. 375–402.
37. *Meneghini J.R., Saltara F., Siqueira C.L.R., Ferrari J.A.* Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements // *J. of Fluids and Structures*. 2001. **15**. 327–350.
38. *Taneda S.* Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers // *J. of the Physical Society of Japan*. 1956. **11**. 1104–1108.
39. *Achenbach E.* Vortex shedding from spheres // *J. of Fluid Mechanics*. 1974. **62**. 209–221.
40. *Fadlun E.A., Verzicco R., Orlandi P., Mohd-Yusof J.* Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations // *J. of Computational Physics*. 2000. **161**. 35–60.
41. *Johnson T.A., Patel V.C.* Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300 // *J. of Fluid Mechanics*. 1999. **378**. 19–70.
42. *Iaccarino G., Ham F.* Automatic mesh generation for LES in complex geometries // *CTR Annual Research Briefs*, Center for Turbulence Research. Stanford: Stanford University Press, 2005. 19–29.
43. *Rautahaimo P., Salminen E., Siikonen T.* Parallelization of a multi-block Navier–Stokes solver // *Proc. Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conf.* Paris, 1996.
44. *Uhlmann M.* Simulation of particulate flows on multi-processor machines with distributed memory. Technical Report N 1039. National Research Center for Energy, Environment and Technology. Madrid, 2003.
45. *Ольшанский М.А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2003.
46. *Шайдуров В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию
27.09.2009