

УДК 519.634

## ЯВНЫЙ МНОГОШАГОВЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

О. А. Стадниченко<sup>1</sup>, В. Н. Снытников<sup>1</sup>

Для численного моделирования динамики самогравитирующего газа развит многошаговый явный метод и построен пространственно трехмерный код на декартовой сетке в эйлеровых переменных. В основе численного алгоритма лежит метод Белоцерковского–Давыдова (FLIC) с использованием разностной схемы первого порядка аппроксимации с сеточной вязкостью, которая обеспечивает устойчивость численных решений. Алгоритм обладает свойством сходимости на последовательности сгущающихся сеток. Приведены результаты расчетов коллапса изотермического газа, вращения изоэнтропического самогравитирующего газа и его автомодельного расширения. Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН “Происхождение, строение и эволюция объектов Вселенной”, Программы Президиума РАН “Происхождение биосферы и геобиологическая эволюция”, Интеграционного проекта СО РАН № 26 “Математические модели, численные методы и параллельные алгоритмы для решения больших задач СО РАН и их реализация на многопроцессорных суперЭВМ”. Расчеты проведены в Сибирском суперкомпьютерном центре РАН на машине с общей памятью SMP16×256.

**Ключевые слова:** методы расщепления, метод крупных частиц, гравитационная газовая динамика.

**1. Введение.** Численное моделирование динамики самогравитирующего газа активно используется для решения задач астрофизики и космологии, в частности зарождения звезд и эволюции околозвездных дисков [1]. На начальных стадиях формирования звезд в молекулярных облаках число Рейнольдса составляет  $Re \sim 10^{10} \div 10^{14}$ , поэтому динамика газа может быть описана уравнениями Эйлера. Для решения этих нестационарных пространственно трехмерных уравнений, дополненных уравнением Пуассона для гравитационного поля, необходимо использовать численные методы. К наиболее востребованным методам в этих целях можно отнести метод SPH (Smoothed-Particle Hydrodynamics — метод сглаженных частиц) и метод Годунова с использованием адаптивных сеток.

В бессеточном методе SPH [2, 3] газовая среда представляется в виде набора частиц, каждая из которых движется в пространстве под действием сил. Гидродинамические величины определяются как результат вклада частиц, расположенных внутри области радиуса сглаживания. Вклад каждой частицы учитывается с весом, соответствующим ядру сглаживания. Благодаря своей лагранжевой природе метод сглаженных частиц позволяет корректно описывать геометрию решения и эффективно использовать вычислительные ресурсы. К недостаткам этого метода можно отнести нарушение консервативности и сплошности среды [4], что преодолевается в различных модификациях метода, в частности с помощью введения искусственной вязкости. Точность расчетов в нестационарных задачах ограничена размером радиуса сглаживания, а также числом частиц, попадающих в этот радиус.

Схема Годунова является двухшаговой схемой [5]. На первом шаге при помощи решения задачи Римана на границе расчетной ячейки вычисляются предварительные значения скорости и давления в предположении, что взаимодействие соседних ячеек рассматривается как распад разрыва. На втором шаге вычисляются значения газодинамических параметров с использованием значений давления и скорости, полученных на первом шаге. Алгоритмы построения адаптивных сеток в основном базируются на кусочно-параболическом методе PPM (Piecewise Parabolic Method), [6]. Введение адаптивных сеток позволяет повысить точность решения газодинамических задач и улучшает численные решения в случае больших градиентов в ударных волнах и на контактных разрывах. Однако при эволюции молекулярных облаков возможны процессы кластеризации, сложная динамика с перемешиванием, развитие неустойчивостей различного типа (Рэля–Тейлора, Кельвина–Гельмгольца, Рихтмайера–Мешкова, конвективно-гравитационной неустойчивости [7–10]). Поэтому процесс построения адаптивных сеток становится трудоемким, а в некоторых случаях и неэффективным, например при близко расположенных сгустках.

<sup>1</sup> Институт катализа им. Г. К. Борескова, просп. акад. Лаврентьева, 5, 630090, г. Новосибирск; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, 630090, г. Новосибирск; О. А. Стадниченко, аспирант, e-mail: zasypoa@catalysis.ru; В. Н. Снытников, доцент, e-mail: snyt@catalysis.ru

В настоящее время существуют программные пакеты, предназначенные для моделирования гравитационной динамики газа, в том числе учитывающие другие физические процессы (ZEUS, ATHENA, FLASH, PLUTO, GADGET2, ENZO, HARM и др.). Сравнению результатов их работы посвящен ряд статей, в частности [11–14]. Общий вывод этих статей состоит в том, что в нелинейных задачах с гравитационным полем численное решение чувствительно к деталям алгоритмов и особенностям программной реализации. Практически это приводит к возможности эксплуатации указанных численных кодов в основном самими разработчиками или в изученных ранее областях. Таким образом, остаются актуальными вопросы разработки новых численных алгоритмов и программ на их основе.

Цель настоящей статьи состоит в разработке численного алгоритма на основе хорошо зарекомендовавшего себя метода крупных частиц Белоцерковского–Давыдова для задач гравитационной газовой динамики. Разработанный численный метод и его программные реализации предназначены для изучения нелинейных стадий эволюции молекулярных облаков и формирования околозвездных дисков.

**2. Система уравнений гравитационной газовой динамики.** Запишем уравнения Эйлера динамики газа вместе с уравнением Пуассона для гравитационного потенциала в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \rho \mathbf{v} &= -\nabla p - \rho \nabla \phi, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v} + \frac{\rho \phi}{2} \mathbf{v} \right) + \operatorname{div} \left( \frac{\phi^2}{8\pi} \frac{\partial \nabla(\ln \phi)}{\partial t} \right) &= 0, \\ \rho E &= \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\rho \phi}{2}, \quad \Delta \phi = 4\pi \rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $\phi$  — потенциал,  $\rho E$  — полная энергия и  $t$  — время. Система (1) представляет собой законы сохранения массы, импульса и полной энергии как суммы кинетической, внутренней и потенциальной энергий [15]. Обезразмеривание уравнений этой системы было проведено на следующие величины: гравитационная постоянная  $G$ , плотность среды в некоторой точке  $\rho_0$  и линейный масштаб  $R_0$ . В качестве остальных величин взяты: масса  $M_0 = \rho_0 R_0^3$ , потенциал и скорость  $\phi_0 = v_0^2 = G \rho_0 R_0^2$ , давление  $p_0 = \rho_0 v_0^2 = G \rho_0^2 R_0^2$ . Время измеряется в единицах  $t_0 = R_0/v_0$ . Для системы (1) использовано уравнение состояния идеального газа  $p = \rho T$ ,  $\gamma = \text{const}$ , где  $T$  — температура и  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Важным свойством системы (1) является локальное выполнение законов сохранения массы и полной энергии, что выражается дивергентной записью ее уравнений. Изменение импульса у элемента газового объема происходит за счет давления и гравитации. Закон сохранения импульса выполняется для изолированного газа только в целом в силу дальнего действия гравитации. Поэтому для плотности импульса  $\rho \mathbf{v}$  уравнение не приводится к дивергентному виду. Это важное свойство гравитационной газовой динамики.

При решении задач астрофизики одним из важных требований к численному методу является способность описывать динамику конфигураций с большими градиентами плотности, с ударными волнами, с областями до-, транс- и сверхзвуковых течений и с вакуумными границами. В [16] для решения таких задач высказана идея использовать переопределенные системы уравнений. Поэтому модель трехмерной нестационарной гравитационной газовой динамики дополнена нами уравнением для давления:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p \mathbf{v}) = -\operatorname{div}(\mathbf{v}) p (\gamma - 1). \quad (2)$$

Как ранее было показано [17], гравитационно-конвективные возмущения в неоднородном невязком газе локально неустойчивы не только в длинноволновом джинсовском диапазоне, но и во всем спектре волновых векторов. Поэтому для решений начально-краевых задач нестационарной динамики гравитирующего газа необходима регуляризация, в качестве которой может быть опробована схемная вязкость. Это обусловило выбор численного метода, который с первым порядком аппроксимирует уравнения Эйлера по пространству и обладает схемной вязкостью.

**3. Численный метод.** В основе разработанного кода лежит расщепление по физическим процессам в реализации метода крупных частиц Белоцерковского–Давыдова (FLIC — Fluid-In-Cell method) [18].

Расщепление выполняется за четыре шага.

*Первый шаг* — учет эффектов давления и гравитационного потенциала. Решается система в перемен-

ных  $\rho$ ,  $\rho\mathbf{v}$ ,  $\rho E$ ,  $p$  и  $\phi$ . Все дивергентные от них слагаемые исключены:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{n+1/4}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho\mathbf{v})^{n+1/4}}{\partial t} &= -\nabla p^n - \rho^n \nabla \phi^n, \\ \frac{\partial (\rho E)^{n+1/4}}{\partial t} + \operatorname{div} \left( p^n \mathbf{v}^n + \frac{\rho^n \phi^n}{2} \mathbf{v}^n \right) &= 0, \\ \frac{\partial p^{n+1/4}}{\partial t} &= -p^n (\gamma - 1) \operatorname{div} (\mathbf{v}^n), \quad \phi^{n+1/4} = \phi^n. \end{aligned}$$

В качестве начального условия берется значение функции с предыдущего шага по времени.

*Второй шаг.* Система уравнений содержит только дивергентные слагаемые и отвечает за процесс конвективного переноса газодинамических величин:  $\frac{\partial f^{n+1/2}}{\partial t} + \operatorname{div} (f^{n+1/4} \mathbf{v}^{n+1/4}) = 0$ ,  $f = (\rho, \rho\mathbf{v}, \rho E, p)$ ,  $\phi^{n+1/2} = \phi^{n+1/4}$ .

*Третий шаг:* решение уравнения Пуассона  $\Delta \phi^{n+3/4} = 4\pi \rho^{n+1/2}$ ,  $f^{n+3/4} = f^{n+1/2}$ ,  $f = (\rho, \rho\mathbf{v}, \rho E, p)$ ,  $\mathbf{v}^{n+3/4} = \mathbf{v}^{n+1/2}$ .

*Четвертый шаг.* Проводится коррекция значения полной энергии  $(\rho E)^{n+3/4}$ , скоростей переноса  $\mathbf{v}^{n+3/4}$  и давления  $p^{n+3/4}$ . В результате получаются значения физических параметров на  $(n+1)$ -м временном слое:  $\rho^{n+1} = \rho^{n+3/4}$ ,  $\phi^{n+1} = \phi^{n+3/4}$ ,  $(\rho\mathbf{v})^{n+1}$ ,  $\mathbf{v}^{n+1}$ ,  $(\rho E)^{n+1}$ ,  $p^{n+1}$ .

Распишем пошагово алгоритм более подробно. В трехмерной области  $\Omega = L^3$  решения вводится равномерная кубическая сетка  $\omega = \omega_x \times \omega_y \times \omega_z$ , такая, что:  $\omega_x = \{x_i; x_i = i h_x; i = 0, \dots, N; h_x = L/N\}$ ,  $\omega_y = \{y_i; y_i = i h_y; i = 0, \dots, N; h_y = L/N\}$ ,  $\omega_z = \{z_i; z_i = i h_z; i = 0, \dots, N; h_z = L/N\}$  и  $h_x = h_y = h_z = h$ . Определим ячейки  $(i, k, l)$  через центры их координат:  $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ,  $y_{k+1/2} = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$ ,  $z_{l+1/2} = \frac{z_l + z_{l+1}}{2}$ . Все газодинамические параметры (т.е. плотность, давление, потенциал, импульс, скорость и энергия) определены в ячейках.

На первом шаге нами использован оператор аппроксимации градиентов давления и потенциала на 27-точечном шаблоне. Разностная схема первого шага представляется в виде

$$\begin{aligned} \rho_{ikl}^{n+1/4} &= \rho_{ikl}^n, \\ \frac{(\rho v_x)_{ikl}^{n+1/4} - (\rho v_x)_{ikl}^n}{\tau} &= -L_x p_{ikl}^n - \rho_{ikl}^n L_x \phi_{ikl}^n, \\ \frac{(\rho v_y)_{ikl}^{n+1/4} - (\rho v_y)_{ikl}^n}{\tau} &= -L_y p_{ikl}^n - \rho_{ikl}^n L_y \phi_{ikl}^n, \\ \frac{(\rho v_z)_{ikl}^{n+1/4} - (\rho v_z)_{ikl}^n}{\tau} &= -L_z p_{ikl}^n - \rho_{ikl}^n L_z \phi_{ikl}^n, \\ \frac{(\rho E)_{ikl}^{n+1/4} - (\rho E)_{ikl}^n}{\tau} &= -\frac{p_{i+1,kl}^n v_{x,i+1,kl}^n - p_{i-1,kl}^n v_{x,i-1,kl}^n}{2h} - \frac{p_{ik+1,l}^n v_{y,ik+1,l}^n - p_{ik-1,l}^n v_{y,ik-1,l}^n}{2h} - \\ &\quad - \frac{p_{ikl+1}^n v_{z,ikl+1}^n - p_{ikl-1}^n v_{z,ikl-1}^n}{2h} - \frac{\rho_{i+1,kl}^n \phi_{i+1,kl}^n v_{x,i+1,kl}^n - \rho_{i-1,kl}^n \phi_{i-1,kl}^n v_{x,i-1,kl}^n}{4h} - \\ &\quad - \frac{\rho_{ik+1,l}^n \phi_{ik+1,l}^n v_{y,ik+1,l}^n - \rho_{ik-1,l}^n \phi_{ik-1,l}^n v_{y,ik-1,l}^n}{4h} - \frac{\rho_{ikl+1}^n \phi_{ikl+1}^n v_{z,ikl+1}^n - \rho_{ikl-1}^n \phi_{ikl-1}^n v_{z,ikl-1}^n}{4h}, \\ \frac{p_{ikl}^{n+1/4} - p_{ikl}^n}{\tau} &= -p_{ikl}^n (\gamma - 1) \left( \frac{v_{x,i+1,kl}^n - v_{x,i-1,kl}^n}{2h} + \frac{v_{y,ik+1,l}^n - v_{y,ik-1,l}^n}{2h} + \frac{v_{z,ikl+1}^n - v_{z,ikl-1}^n}{2h} \right), \\ \phi_{ikl}^{n+1/4} &= \phi_{ikl}^n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_x f_{ikl} &= \frac{1}{32h} (-f_{i-1,k-1,l+1} + f_{i+1,k-1,l+1} - 2f_{i-1,kl+1} + 2f_{i+1,kl+1} - f_{i-1,k-1,l+1} + f_{i+1,k-1,l+1} - 2f_{i-1,k-1,l} + \\ &\quad + 2f_{i+1,k-1,l} - 4f_{i-1,kl} + 4f_{i+1,kl} - 2f_{i-1,k-1,l} + 2f_{i+1,k-1,l} - f_{i-1,k-1,l-1} + f_{i+1,k-1,l-1} - \\ &\quad - 2f_{i-1,kl-1} + 2f_{i+1,kl-1} - f_{i-1,k-1,l-1} + f_{i+1,k-1,l-1}), \end{aligned}$$

разностные схемы  $L_y f_{ikl}$  и  $L_z f_{ikl}$  аналогичны схеме  $L_x f_{ikl}$ .

Разностные операторы первого шага имеют второй порядок аппроксимации по пространству и первый порядок по времени.

Чтобы получить скорость переноса, необходимую на втором шаге, рассчитаем усредненное по семи точкам значение плотности

$$\tilde{\rho}_{ikl} = \frac{\left(6\rho_{ikl}^{n+1/2} + \rho_{i-1kl}^{n+1/2} + \rho_{i+1kl}^{n+1/2} + \rho_{ik-1l}^{n+1/2} + \rho_{ik+1l}^{n+1/2} + \rho_{ikl-1}^{n+1/2} + \rho_{ikl+1}^{n+1/2}\right)^2}{144\rho_{ikl}}, \quad (3)$$

исключающее деление на малые величины плотности на границе газ–вакуум. В результате значение скорости в ячейке в направлении  $x$  принимает вид

$$v_{x\,ikl}^{n+1/4} = \begin{cases} \frac{(\rho v_x)_{ikl}^{n+1/4}}{\tilde{\rho}_{ikl}^{n+1/4}}, & \tilde{\rho}_{ikl} > \epsilon, \\ v_{x\,ikl}^n, & \tilde{\rho}_{ikl} \leq \epsilon. \end{cases} \quad (4)$$

Компоненты скорости  $v_{y\,ikl}^{n+1/4}$  и  $v_{z\,ikl}^{n+1/4}$  вычисляются аналогичным образом.

На втором шаге применяется модифицированный расчет скоростей переноса, предложенный в [19]. Суть этого алгоритма заключается в представлении объема газа в ячейке эйлеровой сетки как крупной частицы, перенос частицы в направлении вектора  $\mathbf{v}$ , расчете изменения объема лагранжевой ячейки и в определении вклада от лагранжевой частицы на эйлерову сетку. Для простоты рассмотрим одномерный случай, который потом распространим на трехмерную динамику.

Пусть  $V_{i-1} = \frac{v_{i-1}^{n+1/4} + v_i^{n+1/4}}{2}$  и  $V_{i+1} = \frac{v_{i+1}^{n+1/4} + v_i^{n+1/4}}{2}$  — скорости в узлах  $x_i$  и  $x_{i+1}$  для ячейки  $i$  соответственно. Распределение  $f$  внутри объема крупной частицы до и после переноса является однородным, но объем частицы при этом меняется. Из условия выполнения для  $f$  уравнения неразрывности  $\hat{f}(h + \tau(V_{i+1} - V_{i-1})) = fh$  значение  $\hat{f}$  для этой частицы выражается формулой  $\hat{f} = \frac{f}{1 + \frac{\tau}{h}(V_{i+1} - V_{i-1})}$ .

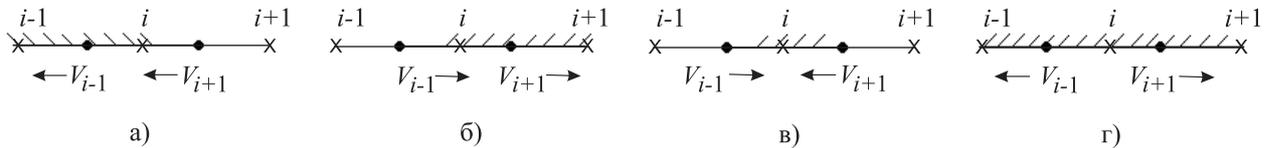


Рис. 1. а) Перенос газа в ячейку  $i - 1$  из ячейки  $i$ ; б) перенос газа в ячейку  $i + 1$  из ячейки  $i$ ; в) переноса газа из ячейки  $i$  в соседние ячейки нет; г) перенос газа в ячейки  $i - 1$  и  $i + 1$  из ячейки  $i$ .

Точками обозначены узлы сетки, крестиками — центры ячеек

Анализ направлений скоростей на обеих гранях ячейки позволяет сделать вывод, идет ли перенос через эту грань (в одномерном случае — узел). Получаем четыре возможных варианта.

1. Перенос в ячейку  $i - 1$ :  $V_{i-1} < 0$ ,  $V_{i+1} < 0$ ,  $\bar{V}_{i-1} = V_{i-1}$ ,  $\bar{V}_{i+1} = 0$  (рис. 1а).
2. Перенос в ячейку  $i + 1$ :  $V_{i-1} > 0$ ,  $V_{i+1} > 0$ ,  $\bar{V}_{i-1} = 0$ ,  $\bar{V}_{i+1} = V_{i+1}$  (рис. 1б).
3. Переноса нет:  $V_{i-1} > 0$ ,  $V_{i+1} < 0$ ,  $\bar{V}_{i-1} = 0$ ,  $\bar{V}_{i+1} = 0$  (рис. 1в).
4. Перенос в ячейки  $i - 1$  и  $i + 1$ :  $V_{i-1} < 0$ ,  $V_{i+1} > 0$ ,  $\bar{V}_{i-1} = V_{i-1}$ ,  $\bar{V}_{i+1} = V_{i+1}$  (рис. 1г).

Аналогичный анализ проводится для каждой ячейки и ее шести граней в трехмерной газовой динамике на втором шаге.

Доля  $\hat{f}$ , перемещенная из ячейки, равна  $\left|\frac{\tau}{h}\bar{V}_j\right|$ ,  $j = i - 1, i + 1$ .

Значение каждой газодинамической величины разделяется между исходной ячейкой и всеми соседними: для соседних ячеек имеем  $\hat{f}\left|\frac{\tau}{h}\bar{V}_j\right| = f\left|\frac{\tau}{h}\bar{V}_j\right|/\left(1 + \frac{\tau}{h}(V_{i+1} - V_{i-1})\right) = f\delta x_j$ , а для исходной —  $f(1 - \delta x_{i-1} - \delta x_{i+1})$ . Результат переноса во всей расчетной области вычисляется следующим способом. Введем нулевой вспомогательный массив  $g_i$ . Двигаясь вдоль сетки, находим  $g_{i-1} = g_{i-1} + f_i^{n+1/4}\delta x_{i-1}$ ,  $g_{i+1} = g_{i+1} + f_i^{n+1/4}\delta x_{i+1}$ ,  $g_i = g_i + f_i^{n+1/4}(1 - \delta x_{i-1} - \delta x_{i+1})$ . В результате получаем значения  $f_i^{n+1/2} = g_i$ , где  $f = (\rho, \rho u, \rho E, p)$ .

В трехмерном случае скорости движения граней частицы  $x_{i+1/2}, y_{k+1/2}, z_{l+1/2}$  вычисляются по формулам  $V_{x\ i-1\ kl} = \frac{U_{x\ i-1\ kl}^{n+1/4} + U_{x\ ikl}^{n+1/4}}{2}, V_{x\ i+1\ kl} = \frac{U_{x\ i+1\ kl}^{n+1/4} + U_{x\ ikl}^{n+1/4}}{2}$ , где

$$U_{x\ ikl} = \frac{1}{16} \left( v_{x\ ik-1\ l-1}^{n+1/4} + 2v_{x\ ik-1\ l}^{n+1/4} + v_{x\ ik-1\ l+1}^{n+1/4} + 2v_{x\ ikl-1}^{n+1/4} + 4v_{x\ ikl}^{n+1/4} + 2v_{x\ ikl+1}^{n+1/4} + v_{x\ ik+1\ l-1}^{n+1/4} + 2v_{x\ ik+1\ l}^{n+1/4} + v_{x\ ik+1\ l+1}^{n+1/4} \right).$$

Значения  $V_{y\ ik-1\ l}, V_{y\ ik+1\ l}, V_{z\ ikl-1}$  и  $V_{z\ ikl+1}$  вычисляются аналогичным образом.

Обозначим вклад от лагранжевой частицы на эйлерову ячейку по одному из направлений  $(x, y, z)$  через  $\delta x_j = \left| \frac{\tau}{h} \bar{V}_{x\ j} \right| \left/ \left( 1 + \frac{\tau}{h} (V_{x\ i+1} - V_{x\ i-1}) \right) \right., j = i - 1, i + 1$ . Потоки через грани, ребра и вершины ячейки газодинамического параметра  $f$ , где  $f = (\rho, \rho v, \rho E, p)$ , имеют вид, представленный в таблице.

Поток в $j$ -ю ячейку через грань, ортогональную оси $OX$	$f \delta x_j (1 - \delta y_{k-1} - \delta y_{k+1}) (1 - \delta z_{j-1} - \delta z_{j+1})$
Поток в $j$ -ю ячейку через грань, ортогональную оси $OY$	$f (1 - \delta x_{i-1} - \delta x_{i+1}) \delta y_j (1 - \delta z_{k-1} - \delta z_{k+1})$
Поток в $j$ -ю ячейку через грань, ортогональную оси $OZ$	$f (1 - \delta x_{i-1} - \delta x_{i+1}) (1 - \delta y_{k-1} - \delta y_{k+1}) \delta z_i$
Поток через ребро, параллельное оси $OX$	$f (1 - \delta x_{i-1} - \delta x_{i+1}) \delta y_{j_1} \delta z_{j_2}$
Поток через ребро, параллельное оси $OY$	$f \delta x_{j_1} (1 - \delta y_{k-1} - \delta y_{k+1}) \delta z_{j_2}$
Поток через ребро, параллельное оси $OZ$	$f \delta x_{j_1} \delta y_{j_2} (1 - \delta z_{l-1} - \delta z_{l+1})$
Поток через вершину — пересечение граней, ортогональных оси $OX, OY$ и $OZ$	$f \delta x_{j_1} \delta y_{j_2} \delta z_{j_3}$

Каждая из этих долей перемещается в соседнюю ячейку, и значение  $f$  увеличивается соответствующим образом. Доля, равная  $f (1 - \delta x_{i-1} - \delta x_{i+1}) (1 - \delta y_{k-1} - \delta y_{k+1}) (1 - \delta z_{l-1} - \delta z_{l+1})$ , остается в ячейке, для которой были рассчитаны потоки. В результате рассчитываются значения  $f_{ikl}^{n+1/2}, f = (\rho, \rho v, \rho E, p)$ . Для потенциала  $\phi$  полагаем  $\phi_{ikl}^{n+1/2} = \phi_{ikl}^{n+1/4}$ . Компоненты скорости газа  $v_{ikl}^{n+1/2}$  рассчитываются по формуле, аналогичной (4).

На втором шаге обеспечивается первый порядок аппроксимации по пространству и по времени. На этом шаге можно использовать схемы более высокого порядка, например хорошо зарекомендовавшие себя схемы коррекции потоков [16] в варианте [20], обладающие свойством обратимости по времени, важным для нелинейных волн.

На третьем шаге ищется численное решение уравнения Пуассона  $\phi^{n+3/4}$ . Для вычисления граничного значения потенциала  $\phi$  применяется разложение по мультипольным моментам:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= -\frac{M}{r} + \frac{M}{r^3} (I_x + I_y + I_z - 3I_0), \\ I_0 &= \frac{(I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2) - 2(xyI_{xy} + xzI_{xz} + yzI_{yz})}{r^2}, \\ I_x &= \sum_n (z_n^2 + y_n^2) m_n, \quad I_y = \sum_n (z_n^2 + x_n^2) m_n, \quad I_z = \sum_n (x_n^2 + y_n^2) m_n, \\ I_{xy} &= \sum_n x_n y_n m_n, \quad I_{yz} = \sum_n z_n y_n m_n, \quad I_{xz} = \sum_n x_n z_n m_n. \end{aligned}$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты относительно центра масс,  $m_n$  — масса и  $x_n, y_n, z_n$  — координаты частицы с номером  $n$ . Дискретизация уравнения Пуассона выполняется на 27-точечном шаблоне:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \left( -\frac{38}{9} \phi_{ikl} + \frac{4}{9} (\phi_{i-1\ kl} + \phi_{i+1\ kl} + \phi_{i\ k-1\ l} + \phi_{i\ k+1\ l} + \phi_{i\ kl-1} + \phi_{i\ kl+1}) + \frac{1}{9} (\phi_{i-1\ k-1\ l} + \phi_{i-1\ k+1\ l} + \right. \\ \left. + \phi_{i+1\ k-1\ l} + \phi_{i+1\ k+1\ l} + \phi_{i-1\ kl-1} + \phi_{i-1\ kl+1} + \phi_{i+1\ kl-1} + \phi_{i+1\ kl+1} + \phi_{i\ k-1\ l-1} + \right. \\ \left. + \phi_{i\ k+1\ l-1} + \phi_{i\ k-1\ l+1} + \phi_{i\ k+1\ l+1}) + \frac{1}{36} (\phi_{i-1\ k-1\ l-1} + \phi_{i+1\ k-1\ l-1} + \phi_{i-1\ k+1\ l-1} + \right. \\ \left. + \phi_{i-1\ k-1\ l+1} + \phi_{i+1\ k+1\ l-1} + \phi_{i-1\ k+1\ l+1} + \phi_{i+1\ k-1\ l+1} + \phi_{i+1\ k+1\ l+1}) \right) = 4\pi \rho_{ikl}. \end{aligned}$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом быстрого преобразования Фурье [21]. Газодинамические величины на третьем шаге остаются неизменными:  $f_{ikl}^{n+3/4} = f_{ikl}^{n+1/2}$ ,  $f = (\rho, \rho \mathbf{v}, \rho E, p)$ ,  $\mathbf{v}_{ikl}^{n+3/4} = \mathbf{v}_{ikl}^{n+1/2}$ .

На четвертом шаге учитывается последнее слагаемое в уравнении энергии  $\operatorname{div} \left( \frac{\phi^2}{8\pi} \frac{\partial \nabla(\ln \phi)}{\partial t} \right)$ . Рассчитываем скорость переноса  $\tau \frac{\partial \nabla(\ln \phi)}{\partial t} = \mathbf{u} \tau$  для  $\frac{\phi^2}{8\pi}$ :

$$\nabla(\ln \phi)_{ikl}^n = \left( \frac{\phi_{i+1kl}^n - \phi_{i-1kl}^n}{2h\phi_{ikl}^n}, \frac{\phi_{ik+1l}^n - \phi_{ik-1l}^n}{2h\phi_{ikl}^n}, \frac{\phi_{ikl+1}^n - \phi_{ikl-1}^n}{2h\phi_{ikl}^n} \right); \quad \frac{\partial \nabla(\ln \phi)_{ikl}^{n+1}}{\partial t} = \frac{\nabla(\ln \phi)_{ikl}^{n+1} - \nabla(\ln \phi)_{ikl}^n}{\tau}.$$

Если  $\|\mathbf{u}\|_{ikl} > \epsilon_0$ , то  $(\rho E)_{ikl}^{n+1} = (\rho E)_{ikl}^{n+3/4} - \tau \operatorname{div} \left( \frac{\phi^2}{8\pi} \frac{\partial \nabla(\ln \phi)}{\partial t} \right)_{ikl}^{n+1}$ , иначе  $(\rho E)_{ikl}^{n+1} = (\rho E)_{ikl}^{n+3/4}$ . Далее проводится коррекция схемных скоростей переноса, импульса и давления по следующему алгоритму:

$$\text{если } \left( (\rho E)_{ikl}^{n+1} - \frac{\rho_{ikl}^{n+3/4} \phi_{ikl}^{n+3/4}}{2} - \frac{p_{ikl}^{n+3/4}}{\gamma - 1} \right) \leq \epsilon, \text{ то } p_{ikl}^{n+1} = (\gamma - 1) \left( (\rho E)_{ikl}^{n+1} - \frac{\rho_{ikl}^{n+3/4} \phi_{ikl}^{n+3/4}}{2} \right), \mathbf{v}_{ikl}^{n+1} = (0, 0, 0), \\ \rho v_{x\ ikl}^{n+1} = 0, \rho v_{y\ ikl}^{n+1} = 0, \rho v_{z\ ikl}^{n+1} = 0;$$

$$\text{если } \left( (\rho E)_{ikl}^{n+1} - \frac{\rho_{ikl}^{n+3/4} \phi_{ikl}^{n+3/4}}{2} - \frac{p_{ikl}^{n+3/4}}{\gamma - 1} \right) > \epsilon, \text{ то } \|V\|_{\text{ener}} = \sqrt{\frac{2}{\tilde{\rho}_{ikl}} \left( (\rho E)_{ikl}^{n+3/4} - \frac{\rho_{ikl}^{n+3/4} \phi_{ikl}^{n+3/4}}{2} - \frac{p_{ikl}^{n+3/4}}{\gamma - 1} \right)},$$

где  $\tilde{\rho}_{ikl}$  определяется по формуле (3),  $\mathbf{v}_{ikl}^{n+1} = \frac{\mathbf{v}_{ikl}^{n+3/4}}{\|\mathbf{v}_{ikl}^{n+3/4}\|} \|V\|_{\text{ener}}$ ,  $\rho v_{\xi\ ikl}^{n+1} = \frac{\rho v_{\xi\ ikl}^{n+3/4}}{\|\mathbf{v}_{ikl}^{n+3/4}\|} \|V\|_{\text{ener}}$ ,  $\xi = (x, y, z)$  и  $p^{n+1} = p^{n+3/4}$ .

Граничные условия для всех газодинамических величин ставились, если это не оговорено далее особо, как невозмущенные начальные значения:  $ikl = 0$ ,  $(i-N)(k-N)(l-N) = 0$ ,  $q_{ikl}^n = q_{ikl}^0$ ,  $q = (\rho, \rho \mathbf{v}, \mathbf{v}, \rho E, p)$ . Численное решение на шагах 1, 2 и 4 получается посредством сквозного счета. Особенности на границе газ-вакуум учитываются через расчет скоростей по формулам (3), (4) и введением коррекции давления и потоков на четвертом шаге.

Общий порядок аппроксимации метода по пространственным и временной переменным — первый. Схема обладает аппроксимационной вязкостью  $\nu_{\text{approx}}$ , значение которой зависит в первую очередь от шага по пространству. Повышение порядка аппроксимации по времени в существенно нелинейных задачах не приводит к увеличению точности для волновых решений [22].

Численный метод обеспечивает выполнение законов сохранения массы и полной энергии. В силу переопределенности выбранной системы значение полной энергии и суммы кинетической, гравитационной и внутренней энергий не совпадают. Предложенный алгоритм коррекции существенно снижает это рассогласование. Выбор 27-точечного шаблона аппроксимации градиентов на первом шаге и уравнения Пуассона привел к уменьшению эффекта выделенных направлений. Схема является условно устойчивой. Шаг по времени  $\tau$  ограничен условием Куранта-Фридрихса-Леви для  $u = \max(c_s, \|\mathbf{v}\|)$ ,  $c_s = \sqrt{T\gamma}$ . При этом шаг по времени должен задаваться существенно меньшим, чем это требуется по наиболее строгому условию. Коэффициент запаса устойчивости определяется особенностями трехмерной динамики гравитирующего газа — вследствие дальнего действия гравитации могут развиваться быстрые процессы, например кластеризация [8].

#### 4. Тестирование.

**Тест 1. Расчет гравитационного потенциала.** Правильность решения уравнения Пуассона проверялась в тестах с точечной массой и шаром с однородным распределением плотности. Кроме того, выполнено тестирование на задачах, имеющих аналитическое решение.

**Тест 2. Линейный перенос.** Хорошей иллюстрацией эффекта аппроксимационной вязкости является задача движения прямоугольного профиля импульса. Рассматривается квазиодномерная конфигурация. Треть области размера  $3^3$  заполнена газом постоянной плотности:  $\forall y, z, 0 < x \leq 1, \rho(x, y, z) = 1, xyz = 0, (x-3)(y-3)(z-3) = 0, \rho(x, y, z) = 0$ , который движется с постоянной скоростью параллельно оси  $Ox$ :  $v_x = 1, v_y = v_z = 0$ . Численное решение задачи на сетке размера  $128^3$  при шаге по времени  $t = 0.0005$  и  $Cu \approx 0.2$ , где  $Cu$  — число Куранта, иллюстрируется на рис. 2а. В отсутствие сил давления и гравитации начальное распределение плотности и скорости удовлетворяет уравнению движения. Анали-

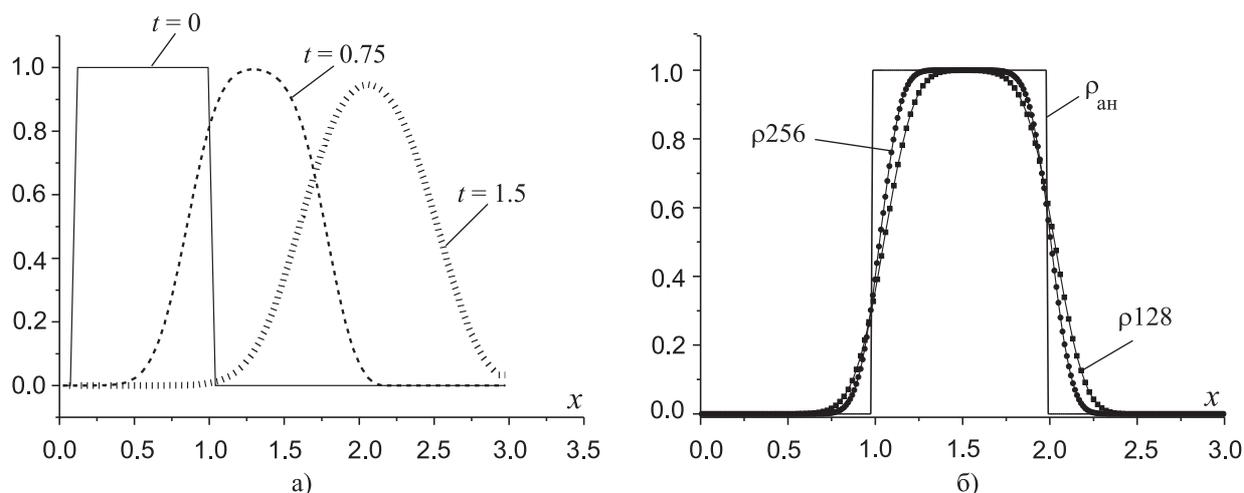


Рис. 2. а) Профиль импульса  $\rho v_x(x, y, z)$ ,  $y = z = 0$  при  $t = 0$  (сплошная линия),  $t = 0.75$  (штриховая линия),  $t = 1.5$  (пунктирная линия); б) профиль импульса  $\rho v_x(x, y, z)$ ,  $y = z = 0$  на сетках размера  $128^3$  и  $256^3$ ,  $\rho_{ан}$  — аналитическое решение задачи при  $t = 1$

тическое решение задачи о линейном переносе описывает движение профиля вдоль оси  $OX$  с сохранением конфигурации. При  $\nu_{approx} \neq 0$  аппроксимационная вязкость ведет к расплыванию профиля со временем.

Для оценки аппроксимационной вязкости от пространственного шага проведены расчеты на сетках размера  $32^3, 64^3, 128^3, 256^3$ . Шаг по времени в каждом расчете выбирался из условия  $Cu \sim \tau v/h = 0.2$ . На рис. 2б изображены профили импульса  $\rho v_x(x, y, z)$  при  $t = 1$  для расчетов на сетках размера  $128^3$  и  $256^3$ . Из рис. 2б следует, что схема обладает свойством сходимости при измельчении сетки. Величину  $\nu_{approx}$  можно оценить из соотношения  $\nu_{approx} \approx l^2/t$ , где  $l$  — длина “расплывания” за время  $t$  (например, для сетки размера  $128^3$  имеем  $\nu_{approx} \approx 0.06$ ). В расчетах получено, что величина схемной вязкости линейно зависит от шага по пространству:  $\nu_{approx} \approx 2.5h$ .

**Тест 3. Распад произвольного разрыва.** Эта задача широко используется в качестве стандартного теста для проверки правильности работы газодинамической части численного метода. Тест проводится без учета гравитационного поля.

Начальные условия: область заполнена двумя покоящимися газами постоянной плотности, каждый из которых в начальный момент времени занимает половину объема (рис. 3). На границе задается условие непротекания. Данный тест призван показать три типа разрыва: ударная волна, волна разрежения и контактный разрыв. В отличие от традиционной одномерной модели, рассмотрена трехмерная динамика движения ударной волны. Для того чтобы отследить влияние эффекта выделенных направлений, рассмотрены две конфигурации: задача 1 — поверхность раздела располагается перпендикулярно к оси  $OX$  в плоскости  $[1, 0, 0]$  (рис. 3а); задача 2 — поверхность раздела располагается под углом  $45^\circ$  к осям  $OX, OY, OZ$  в плоскости  $[1, 1, 1]$  (рис. 3б). Полученные численные решения приведены вдоль прямых, проходящих через начало координат перпендикулярно начальному расположению поверхности.

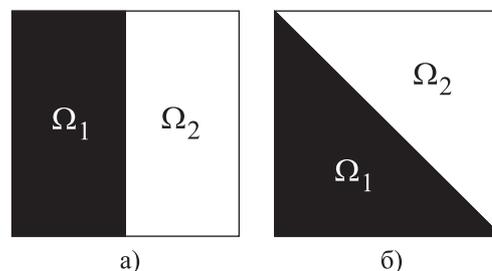


Рис. 3. Распределение физических параметров: а) сечение плоскостью  $[1, 0, 0]$ ; б) сечение плоскостью  $[1, 1, 1]$ . Белая и черная области соответствуют областям с различной плотностью

Выбрано следующее распределение физических параметров: плотность  $\rho_1 = 1$  и  $\rho_2 = 4$ , давление  $p_1 = 0.1795$  и  $p_2 = 1$ , показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$  и размер расчетной области  $0.3^3$ . Сравнение численного и аналитического решений приведено при  $t = 0.12$ . Равномерная сетка состоит из  $256^3$  узлов, шаг  $\tau$  по времени равен 0.01. На рис. 4 иллюстрируются результаты расчета. Сплошной линией на графиках изображено аналитическое решение, а пунктирной — численное. Ударная волна при  $t = 0.12$  соответствует  $x = -0.95$ , контактный разрыв соответствует  $x = -0.32$ . В правой и левой колонках на рис. 4 располагаются графики распределения плотности, давления, скорости и внутренней энергии для расчетов задач 1 и 2 соответственно. Как видно из графиков, независимо от начального положения разрыва результаты численных расчетов совпадают. Однако аппроксимационная вязкость приводит к размазыванию фронта ударной волны и контактного разрыва.

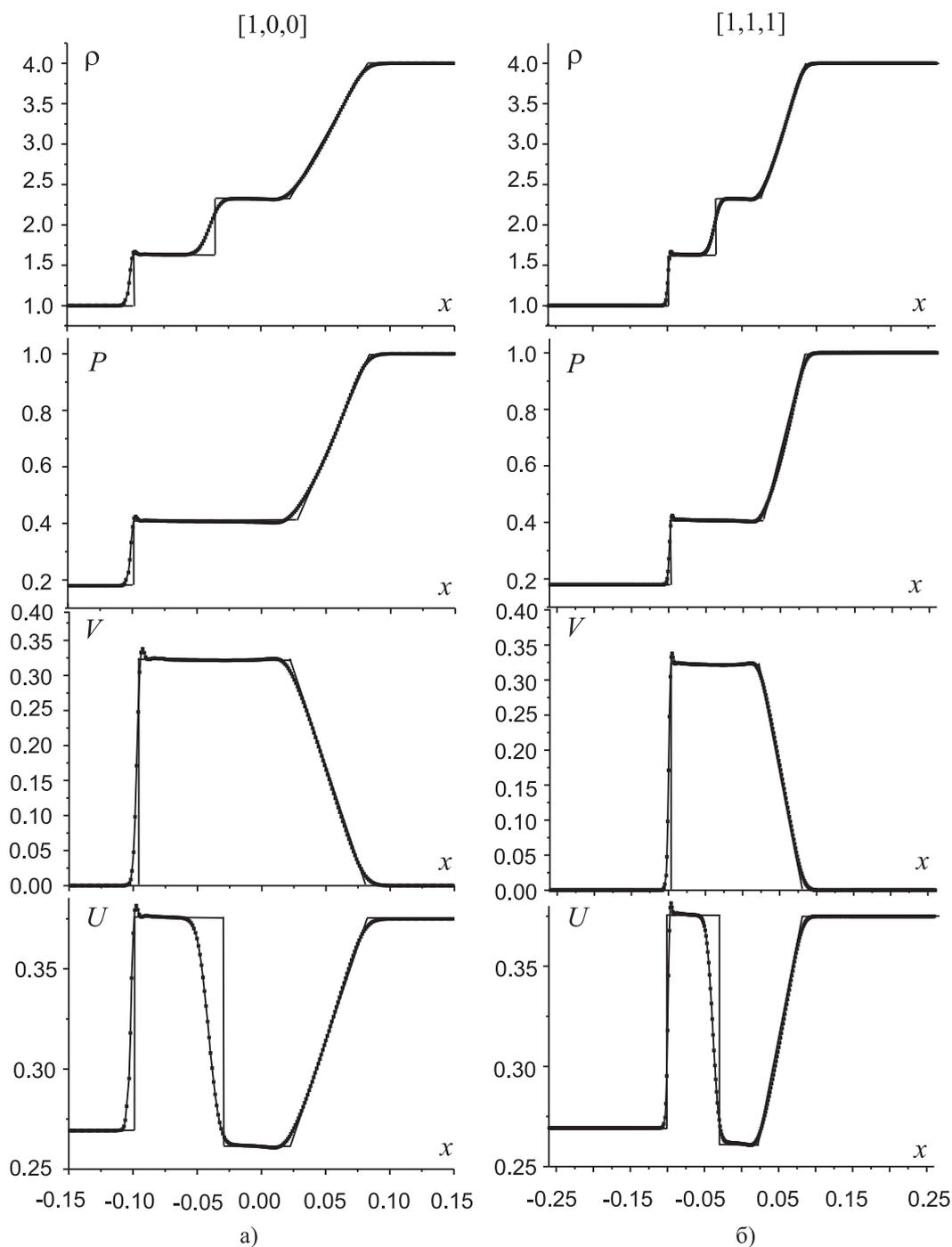


Рис. 4. Проекция распределений физических параметров параллельно фронту ударной волны: плотности  $\rho$ , давления  $P$ , скорости  $V$ , внутренней энергии  $U$ . Расчеты задач 1 (а) и 2 (б) в момент времени  $t = 0.12$

Для этого же теста задачи 1 проведены расчеты на последовательности измельчающихся равномерных сеток размера  $32^3$ ,  $64^3$ ,  $128^3$ ,  $256^3$  с постоянным значением числа Куранта для любой из этих сеток. Сходимость решения иллюстрируется графиками распределения плотности на рис. 5 при  $t = 0.12$ . При числе узлов  $128^3$  основные особенности решения хорошо передаются численным решением. Завышение значений плотности в окрестности ударной волны является следствием немонотонности выбранного численного метода. В частности, значение аппроксимационной вязкости оказывается недостаточно большим, чтобы подавить численную дисперсию. Однако введение дополнительной искусственной вязкости для исходной задачи требует физического анализа, так как для молекулярных облаков число Рейнольдса

составляет порядка  $Re \sim 10^{10}$ .

**Тест 4. Равновесная конфигурация самогравитирующего газа.** Многочисленные стационарные аналитические решения для системы уравнений гравитационной газовой динамики можно найти, например, в монографиях [23, 24]. В отсутствие вращения газовое облако имеет сферическую форму с поверхностями постоянных давления, плотности и потенциала. Изначально покоящееся газовое облако под действием сил гравитации и давления может в зависимости от значения показателя адиабаты  $\gamma$  коллапсировать, разлетаться или колебаться. Равновесные конфигурации самогравитирующего газа являются результатом взаимной компенсации давления и гравитации.

Рассмотрим неоднородное сферически симметричное распределение газа с  $\gamma = 4/3$  и начальным распределением плотности:

$$\rho(r) = \begin{cases} (1-r), & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Тогда начальные распределения давления и потенциала выражаются формулами

$$p(r) = \begin{cases} -\frac{\pi r^2}{36} (9r^2 - 28r + 24) + \frac{5\pi}{36}, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \quad \phi(r) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} (2r^2 - r^3) - \frac{2\pi}{3}, & 0 \leq r \leq R, \\ -\frac{\pi}{3r}, & r > R. \end{cases}$$

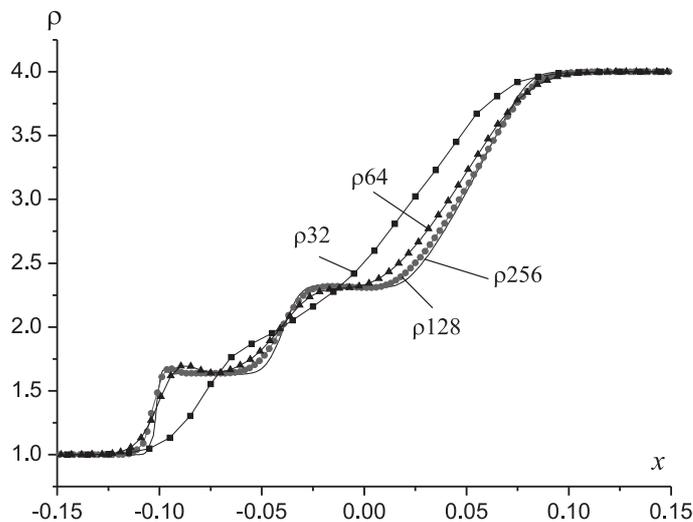


Рис. 5. Профили плотности  $\rho(x, y, z)$ ,  $y = z = 0$  при  $t = 0.12$  на сетках размера  $32^3, 64^3, 128^3, 256^3$

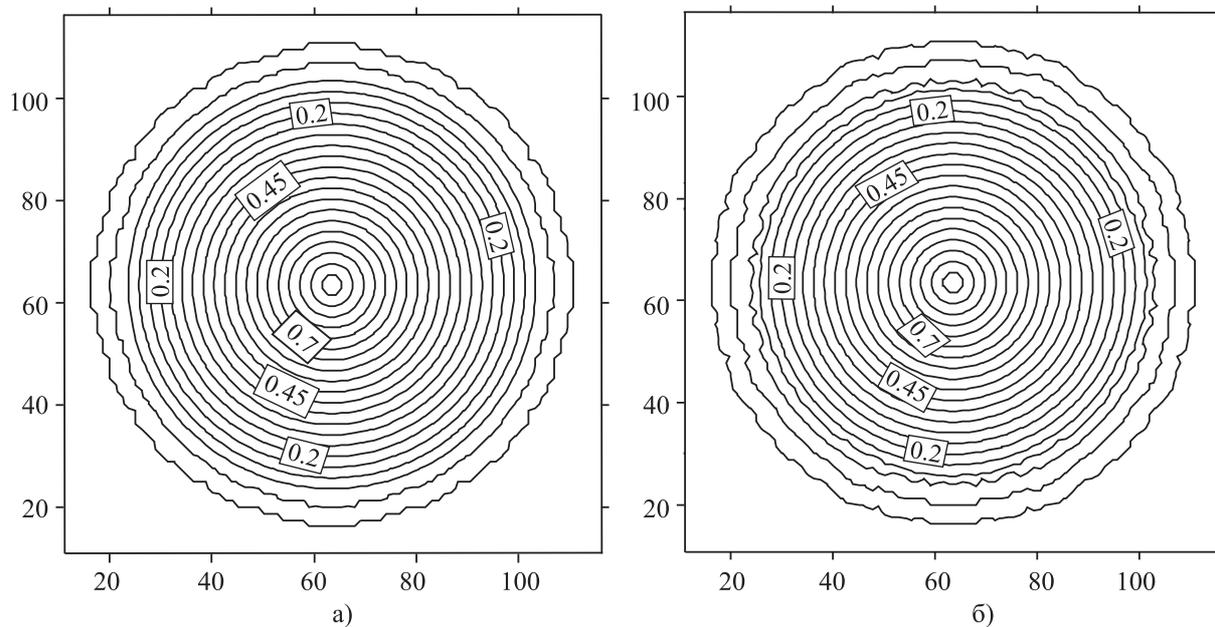


Рис. 6. Изолинии плотности  $\rho(x, y, 0)$  в начальный момент времени (а) и при  $t = 1$  (б)

Расчеты проведены с использованием сетки размера  $128^3$  и шагом по времени 0.001, размеры расчетных областей составляли  $3^3$ . В соответствии с точным решением профили плотности времени не должны изменяться в течение характерного времени движения звуковой волны  $\tau_s \approx 1/c_s$ ,  $c_s = \sqrt{T\gamma}$ . При заданных параметрах имеем  $\tau_s \approx 1$ . Как видно из рис. 6, к моменту времени  $t = 1$  геометрическая форма границы и линий уровня плотности остается сферической. Распределение плотности отличается от начального не более чем на 5%. Движение газа начинается в области границы газ-вакуум.

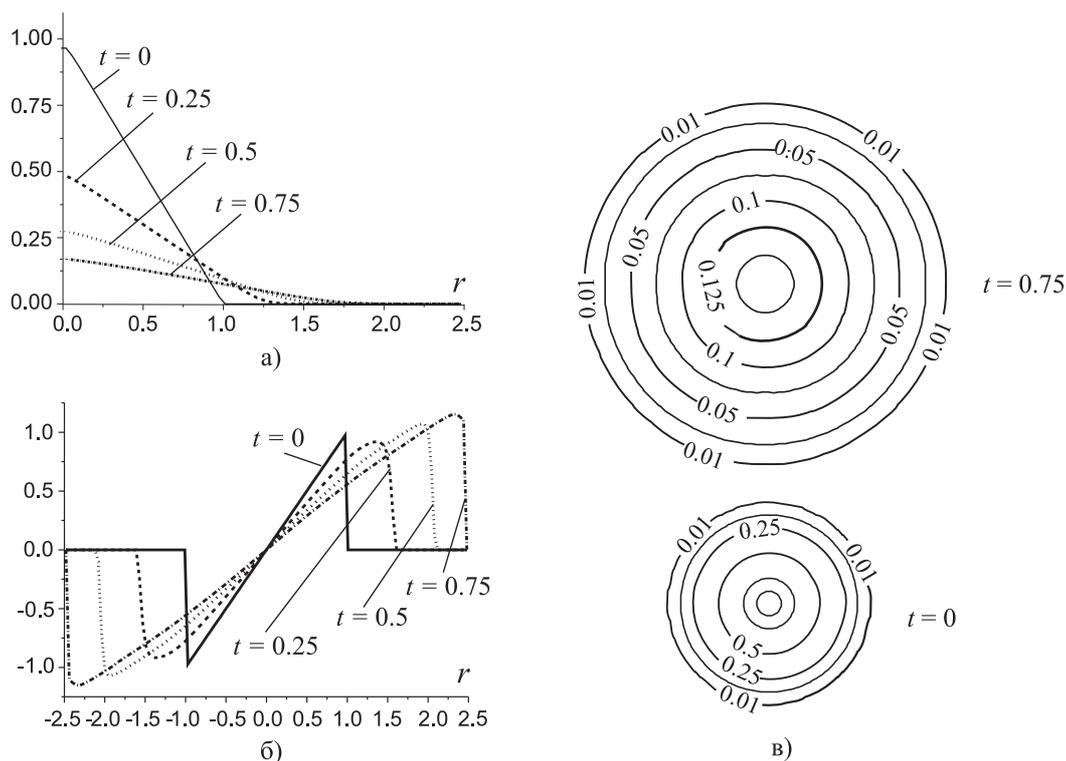


Рис. 7. а) Профили плотности  $\rho(x, 0, 0)$  при  $t = 0$  (сплошная линия),  $t = 0.25$  (штриховая линия),  $t = 0.5$  (пунктирная линия),  $t = 0.75$  (штрих-пунктирная линия); б) профиль скорости  $V_r(x, 0, 0)$  при  $t = 0$  (сплошная линия),  $t = 0.25$  (штриховая линия),  $t = 0.5$  (пунктирная линия),  $t = 0.75$  (штрих-пунктирная линия); в) изолинии плотности  $\log \rho(x, y, 0)$  при  $t = 0$  и  $t = 0.75$

**Тест 5. Автомоделное решение.** В [25] приведены автомоделные сферически-симметричные решения уравнений гравитационной газовой динамики, которые описывают неустановившиеся движения газа. Эти решения охватывают случаи расширения, сжатия и пульсаций гравитирующего газа. Рассмотрим в качестве примера разлет шара радиуса  $R = 1$ , газ внутри которого распределен по линейному закону, причем  $\rho|_{r=0} = 1$ . Давление и потенциал распределены аналогично описанной выше равновесной конфигурации. Начальная скорость газа задана в виде  $v_r = \begin{cases} r, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$

На рис. 7 представлены результаты расчета на сетке размера  $128^3$  при размере расчетной области  $3^3$  и при  $\gamma = 4/3$ . При расширении газового облака в автомоделном режиме имеем  $v_r \sim r/t$ , движение внешней границы газового шара подчиняется закону  $r(t) = r(0) + v_r t$  с сохранением линейного распределения плотности (рис. 7а,в), а также сферической симметрии и массы газа. Значение плотности в центре меняется со временем по закону  $\rho(0, t) \sim 1/t^3$ .

Численное и аналитическое решения этой нестационарной задачи практически совпали, что позволило нам перейти к расчетам физически интересных задач.

**5. Проведенные расчеты.** Приведем результаты нескольких расчетов, призванных показать работоспособность созданных программ с использованием предложенного многошагового метода.

**5.1. Изотермический случай.** Для стационарного сферически-симметричного изотермического газового облака температуры  $T$  из (1), (2) следует дифференциальное уравнение второго порядка относительно распределения плотности, для которого записывается следующая задача Коши:

$$r \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{r}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 + \frac{4\pi r \rho^2}{T} = 0, \quad \rho|_{r=0} = 1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0.$$

Решение Боннора и Эберта этой задачи широко известно и является аналогом решения Эмдена для адиабатического случая. На рис. 8 при помощи численного интегрирования построено распределение плотности  $\rho_0(r)$  при  $T = 1.5$ .

Теперь рассмотрим начально-краевую задачу о динамике изотермического газа в области размера  $L^3 = 8^3$ . Начальное распределение плотности зададим в виде решения Боннора-Эберта,  $p = T\rho$  и  $\phi_0(r) = -T \ln \rho_0(r)$ . В качестве краевых условий возьмем начальные значения функций на границах и нулевое значение вторых производных от нормальной компоненты потока. В начальный момент времени распределения функций обладают возмущениями, связанными с аппроксимационными ошибками численного метода. Граничные условия на скорость обеспечивают отсутствие скачков плотности на границе при отличном от нуля потоке массы через нее.

При условии  $L\sqrt{3} > \lambda_J$ , где джинсовская длина  $\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi T}{\rho_0}} \approx 2.17$ , динамика такого газового облака предполагает развитие физической гравитационной неустойчивости, которая приводит к коллапсу. Численное решение задачи при  $T = 1.5$  на сетке размера  $128^3$  с шагом по времени  $\tau = 10^{-3}$  представлено на рис. 9. Действительно, неустойчивость приводит к сжатию изотермического газа (рис. 9а). Сжатие продолжается до  $t \leq 3$ , а после  $t > 3$  сжатие переходит в коллапс до  $t_0 \approx 4$  с зависимостью  $\rho \sim 1/(t_0 - t)$  и с изменением плотности в центре примерно в  $10^4$  раз. Дальнейшая динамика газа (снижение скорости роста плотности) объясняется сжатием газа на масштаб сеточной ячейки  $h$  и наличием аппроксимационной вязкости, которая размазывает плотность по сетке. На рис. 9б изображен профиль скорости  $V_r(x, 0, 0)$  в моменты времени  $t = 3$  и  $t = 4$ . Из этих графиков следует, что динамика газа выходит на автомодельные режимы коллапса с зависимостями  $V_r \sim -r/t$  в центре. На периферии шара на больших временах имеем  $V_r \sim -r^{-\alpha}$ , где  $\alpha$  близко к 1, что соответствует автомодельному решению [26]. Сжатие и коллапс происходят сферически симметрично, лишь на поздних стадиях проявляются эффекты небольшого числа ячеек в центре для сколлапсировавшего газа. На этих поздних стадиях коллапса при высоких давлениях и плотности нарушается условие изотермичности газа. При этом начинают последовательно возбуждаться внутренние степени свободы водорода, происходит его диссоциация и ионизация вместе с гелием с развитием комплекса процессов, ведущих к возникновению пучков релятивистских частиц. Для учета этих физико-химических процессов алгоритмы газовой динамики могут быть модифицированы в соответствии с подходами, описанными в [27, 28]. Для численного моделирования пучков релятивистских частиц были предложены алгоритмы, основанные на эффективном применении методов решения уравнений Пуассона [29].

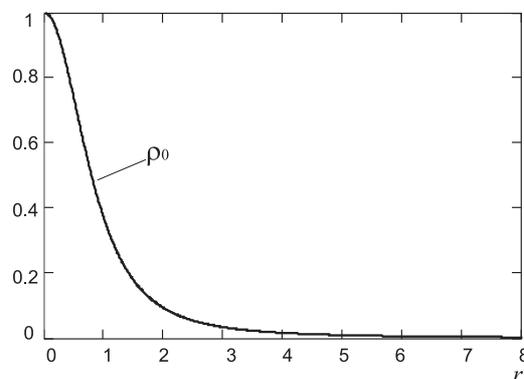


Рис. 8. Распределение плотности  $\rho_0(r)$  при  $T = 1.5$

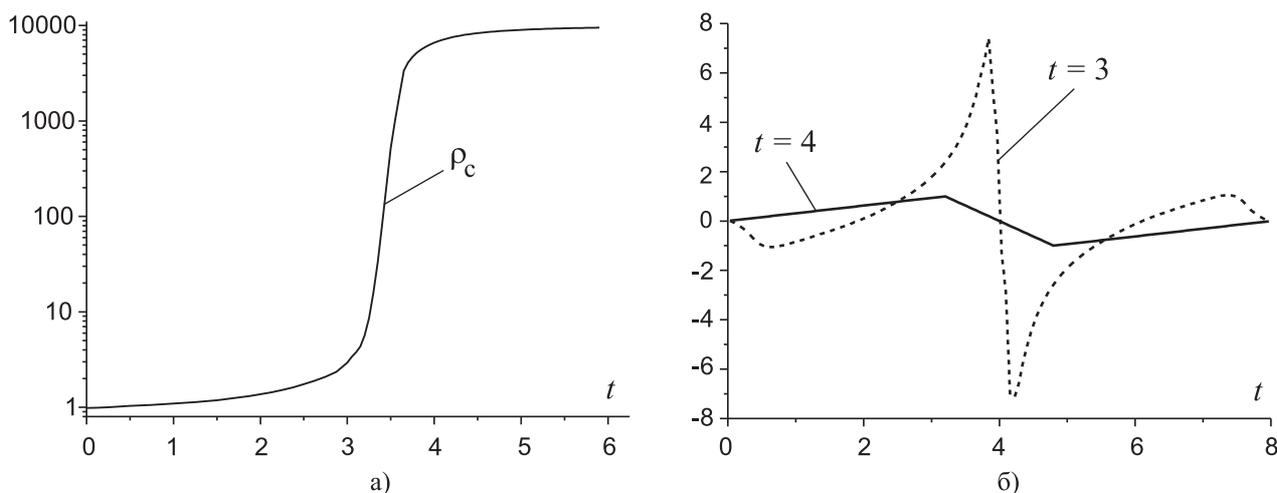


Рис. 9. а) График изменения значения плотности в центре  $\rho(0, 0, 0)$  в зависимости от времени  $t$  при  $L = 8$ ; б) профиль скорости  $V_r(x, 0, 0)$  при  $t = 3$  (сплошная линия) и  $t = 4$  (штриховая линия),  $L = 8$

**5.2 Изэнтропический случай.** В качестве начальных данных для системы (1), (2) рассмотрим сферически симметричную неравновесную конфигурацию. Для наглядности запишем все граничные условия

в сферической системе координат  $(r, \psi, \theta)$ . С течением времени сферическая симметрия может быть нарушена за счет физических процессов внутри газового облака радиуса  $R$ . На внешней границе области в качестве граничных условий выбраны  $r = R$ ,  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$ ,  $p = 0$ .

Для гравитационного потенциала ставится следующая задача:

$$\Delta\phi = 4\pi\rho, \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{M}{r^2}. \quad (5)$$

Для нахождения самосогласованных распределений вращающегося со скоростью  $v_\psi$  газа будем считать, что медленное вращение не вызывает нарушения сферической формы. В пренебрежении угловыми возмущениями плотности (т.е.  $\frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial\theta} = 0$ ), распределение давления в шаре, находящемся в радиальном равновесии, может быть найдено решением задачи Коши

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{v_\psi^2}{r} \right), \quad p|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

В указанных предположениях у давления появляется угловая зависимость, которая должна скомпенсировать вращение.

Задав распределение плотности вещества, найдем распределение всех газодинамических параметров. Будем считать, что скорость вращения шара постоянна на больших расстояниях. Распределение плотности принято таким, чтобы при  $n \geq 5$  основная масса была заключена в половине по радиусу газового облака с конечной, но малой плотностью на другой половине:  $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0(1-r)^n, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$

Распределение гравитационного потенциала находится решением уравнения Пуассона (5), распределение давления при заданной скорости вращения  $v_\psi$  — решением задачи (6). Найденное распределение физических параметров используется как начальное условие решения начально-краевой задачи для системы (1), (2).

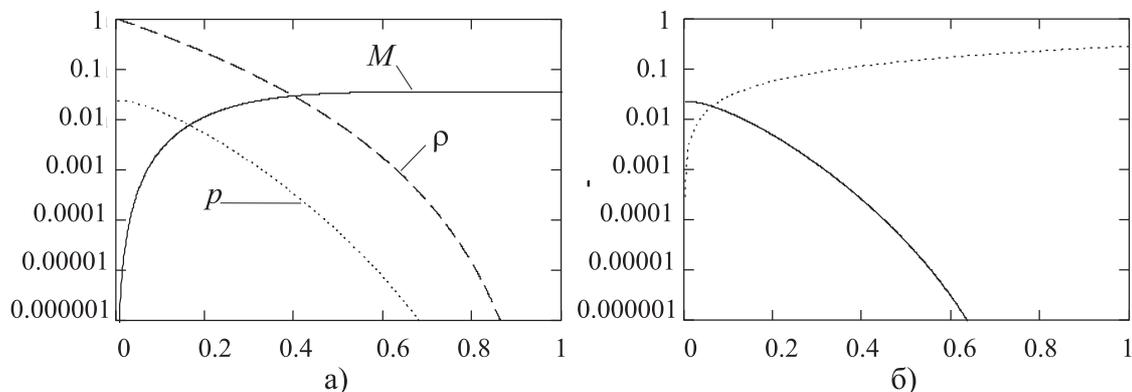


Рис. 10. а) Распределение плотности  $\rho_0(r)$  (штриховая линия), массы  $M$  (сплошная линия), давления  $p$  (пунктирная линия) при  $\rho_0 = 1$ ,  $n = 7$ ; б) распределение давления  $p$  (сплошная линия) при твердотельном вращении, распределение скорости вращения  $v_\psi$  (штриховая линия)

Для  $n = 7$ ,  $v_\psi = 0$  распределения плотности, потенциала и давления приведены на рис. 10а. На рис. 10б показано распределение давления во вращающемся газе с характерной скоростью 0.28. Как можно видеть, значение давления в центре меняется незначительно, однако во внешней части шара значения давления меньше. Это легко объяснить тем, что существует ограничение на характерное значение скорости вращения, выше которого решение задачи (6) пересекает ось абсцисс, что нарушает условие положительности значения давления. При твердотельном вращении  $v_\psi = cr \sin\theta$  при  $c \geq 0.28$  существует  $r_0$ , при котором давление становится отрицательным  $p(r_0) < 0$ . Значение максимального характерного значения скорости вращения, при котором существует решение задачи Коши (6), зависит от выбора кривой вращения и распределения плотности внутри газового облака.

Выберем в качестве начальных условий плотность  $\rho(r) = (1-r)^7$  в шаре радиуса  $R = 1$ . В остальной области плотность в начальный момент времени равна нулю.

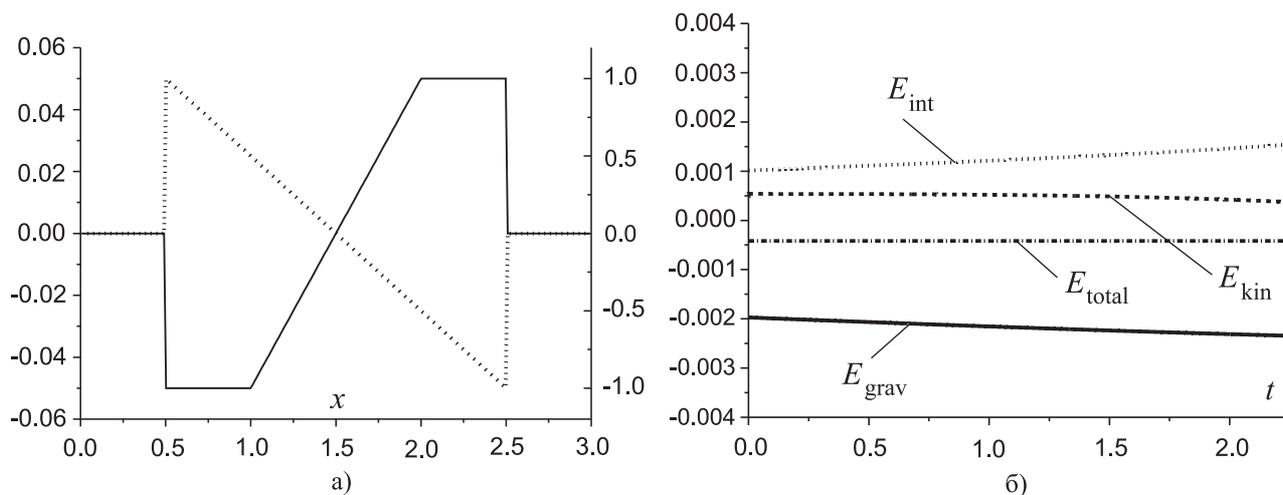


Рис. 11. а) Профили скоростей  $v_\psi$  (сплошная линия) вдоль оси  $OX$  и  $v_z$  (штриховая линия) вдоль оси  $OZ$  при  $t = 0$ ; б) графики кинетической (штриховая линия), внутренней (пунктирная линия), гравитационной (сплошная линия) и полной (штрих-пунктирная линия) энергий как функций от времени

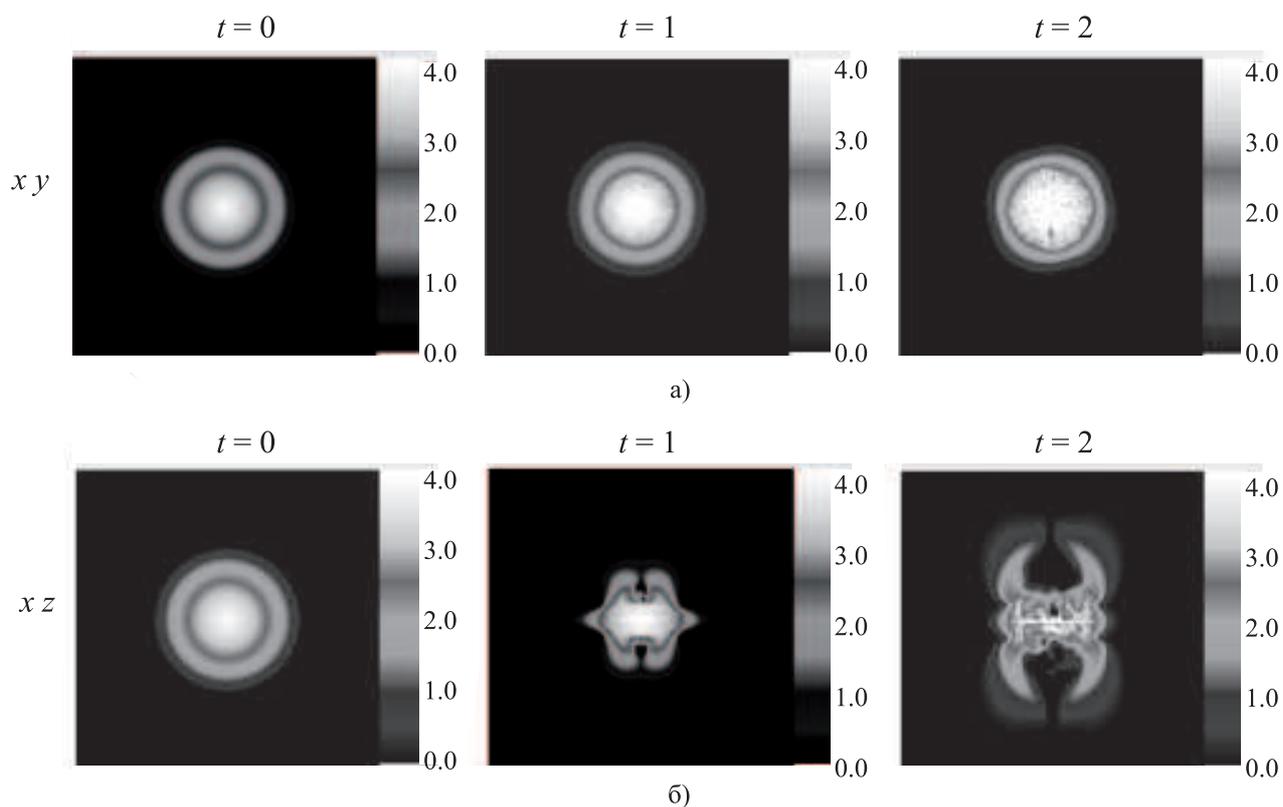


Рис. 12. Распределение логарифма плотности  $\log \rho(x, y, 0)$  (а) и  $\log \rho(x, 0, z)$  (б) в моменты времени  $t = 0, 1, 2$

Для возмущения равновесных распределений зададим осесимметричное вращение шара как твердого тела вокруг оси  $Z$  со скоростью  $v_\psi = \begin{cases} 2cr \sin \theta, & c = 0.05, \quad 0 \leq r \leq 0.5 \\ c, & 0.5 < r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$

Зададим “дипольное” сжатие вдоль  $v_r = -ar |\cos \theta|$ ,  $a = 1$  (профили скорости в начальный момент времени изображены на рис. 11а). Распределение давления соответствовало системе (6) при выбранной скорости вращения. Показатель адиабаты  $\gamma$  равен  $5/3$ . На границе области размера  $3^3$  задавались

значения гравитационного потенциала и нулевые значения остальных функций. Число расчетных узлов декартовой сетки равнялось  $128^3$ . Шаг по времени равен  $10^{-4}$ . На рис. 12 приведены плотности в экваториальной и меридиональной плоскостях. Как видно из этих графиков, под воздействием несогласованных между собой давления, гравитации, скоростей вращения и сжатия газ перераспределился в пространстве. Сформирован плотный газовый диск, располагающийся вдоль плоскости  $OXY$ . Вращение газа привело к нарушению осевой симметрии. Формирование тонкого диска сопровождается появлением “бабочкообразной” структуры в окружающем пространстве. Основная масса газа находится вне диска. После падения массы газа в экваториальную плоскость образуются ударные волны. На поздних стадиях над плоскостью диска имеют место крупномасштабные вихревые турбулентные потоки, которые приводят к кластерным выбросам в направлении, перпендикулярном плоскости плотного диска. Графики зависимости полной энергии от времени (рис. 11б) демонстрируют сохранение полной энергии. При сжатии газового шара в диск происходит разумное изменение отдельных видов энергий. Так, абсолютное значение гравитационной энергии растет одновременно с нарастанием внутренней энергии. При этом значение кинетической энергии меняется незначительно.

**6. Выводы.** Для моделирования трехмерных нестационарных течений самогравитирующего газа разработан численный алгоритм и созданы программы, основанные на явном многошаговом методе типа FLIC для решения уравнений газовой динамики и методе быстрого преобразования Фурье для решения уравнения Пуассона. Численный метод обладает первым порядком аппроксимации по пространственным и временной переменным.

Результаты расчета изотермического коллапса газового облака в основном совпадают с автомодельным решением: динамика газа выходит на автомодельные режимы коллапса с зависимостями  $V_r \sim -r/t$  в центре. Сжатие и коллапс происходят сферически-симметрично при сферически-симметричных начальных условиях.

Аutomодельное решение гравитационной динамики изоэнтропического газового облака совпало с полученным численным решением для автомодельного начального условия.

Проведено численное моделирование динамики вращающегося изоэнтропического газового шара при  $\gamma = 5/3$ . Под воздействием несогласованных давления, гравитации и скоростей вращающийся газ перераспределяется в пространстве. В экваториальной плоскости формируется газовый субдиск.

Авторы выражают благодарность С. Е. Кирееву за реализацию метода быстрого преобразования Фурье для 27-точечной схемы для гравитационного потенциала, Э. А. Кукшевой — за помощь в тестировании решения уравнения Пуассона, В. А. Вшивкову — за обсуждение граничных условий газ-вакуум.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hartmann L.* Accretion processes in star formation. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
2. *Gingold R.A., Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. **181**. 375–389.
3. *Liu G.R., Liu M.B.* Smoothed particle hydrodynamics. A meshfree particle method. Singapore: World Scientific Publishing, 2003.
4. *Monaghan J.J.* On the problem of penetration in particle methods // J. of Computational Physics. 1989. **82**. 1–15.
5. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
6. *Woodward P., Collela P.* Piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. of Computational Physics. 1984. **54**. 174–201.
7. *Hunter J.H.Jr., Whitacker R.W., Lovelace R.V.E.* Kelvin–Helmholtz and thermal-dynamic instabilities with self-gravity: a new gravitational interface instability // Astrophysical J. 1997. **482**. 852–865.
8. *Balbus S.A., Hawley J.F.* Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks // Reviews of Modern Physics. 1998. **70**, N 1. 1–53.
9. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992.
10. *Кокс Дж.* Теория звездных пульсаций. М.: Мир, 1983.
11. *Tasker E.J., Brunino R., Mitchell N.L., Michielsen D., Hopton S., Pearce F.R., Bryan G.L., Theuns T.* A test suite for quantitative comparison of hydrodynamics codes on astrophysics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008. **390**, N 3. 1267–1281.
12. *Commercon B., Hennebelle P., Audit E., Chabrier G., Teyssier R.* Protostellar collapse: a comparison between smoothed particle hydrodynamics and adaptive mesh refinement calculations // Astronomy and Astrophysics. 2008. **482**. 371–385.
13. *Nelson A.F.* Numerical requirements for simulations of self gravitating and non-self gravitating disks // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008. **373**, N 3. 1039–1073.

14. *Kitsionas S., Federrath C., Klessen R., Schmidt W., Price D., Dursi L., Gritschneider M., Walch S., Piontek R., Kim J., Jappsen A.-K., Ciocielag P., Mac Low M.-M.* Algorithmic comparisons of decaying, isothermal, compressible turbulence // *Astronomy and Astrophysics*. 2009. **508**, N 1. 541–560.
15. *Снытников В.Н., Пармон В.Н., Вшивков В.А., Дудникова Г.И., Никитин С.А., Снытников А.В.* Численное моделирование гравитационных систем многих тел с газом // *Вычислительные технологии*. 2002. **7**, № 3. 72–85.
16. *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990.
17. *Снытников В.Н., Стадниченко О.А.* К вопросу об устойчивости изотермического газового шара с гравитацией // *Астрономический журнал*. 2009 (в печати).
18. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
19. *Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Куликов И.М.* Модификация метода крупных частиц для задач гравитационной газовой динамики // *Автоматрия*. 2007. **43**, № 6. 56–65.
20. *Снытников В.Н.* Об одной монотонной схеме сквозного счета на основе неявного алгоритма коррекции потоков // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*. 1986. **26**, № 9. 1427–1430.
21. *Киреев С.Е.* Метод моделирования динамики вращения пылевой компоненты протопланетного диска // *Тр. конф. молодых ученых*. Новосибирск: Ин-т вычисл. матем. и матем. геофизики СО РАН, 2005. 72–78.
22. *Снытников В.Н., Юрченко Е.М.* Схема расщепления для задач фильтрации газа с химическими реакциями // *Вычислительные технологии*. 2001. **6**, № 5. 95–105.
23. *Тассуль Ж.Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Наука, 1982.
24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
25. *Лидов М.Л.* Точные решения уравнений одномерных неустановившихся течений газа с учетом сил ньютоновского тяготения // *Докл. АН СССР*. 1954. **97**, № 3. 409–410.
26. *Hunter C.* The collapse of unstable isothermal spheres // *Astrophysical J.* 1977. **218**. 834–845.
27. *Засыпкина О.А., Стояновская О.П., Черных И.Г.* Разработка и применение программных средств для оптимизации построения моделей реагирующих сред // *Вычислительные методы и программирование*. 2008. **9**, № 1. 176–182.
28. *Вшивков В.А., Черных И.Г., Снытников В.Н.* Использование современных информационных технологий для численного решения прямых задач химической кинетики // *Вычислительные методы и программирование*. 2005. **6**, № 2. 214–219.
29. *Боронина М.А., Вшивков В.А., Левичев Е.Б., Никитин С.А., Снытников В.Н.* Алгоритм для трехмерного моделирования ультрарелятивистских пучков // *Вычислительные методы и программирование*. 2007. **8**, № 2. 203–210.

Поступила в редакцию  
24.01.2010

---