

УДК 519.632, 519.612

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ БИНГАМА

П. П. Гриневич¹, М. А. Ольшанский¹

Разработан алгоритм численного решения регуляризованной задачи Бингама. Рассматривается регуляризованная модель Папанастиасио. Для линейризованной задачи предлагается переобусловливатель, приводятся оценки эффективного числа обусловленности и анализируется сходимость методов на подпространствах Крылова. Оценки базируются на неравенстве Нечаса в весовых нормах. Работа поддержана РФФИ (коды проектов 09-01-00115 и 08-01-00159).

Ключевые слова: итерационный метод, переобусловливатель, вязкопластичность, задача Бингама, регуляризация.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается итерационный метод решения регуляризованной задачи Бингама. Для простоты изложения мы пренебрегаем инерционными слагаемыми и рассматриваем стационарный случай, а в качестве краевых условий берем условия Дирихле для скорости. Модель Бингама [2, 23] вязкопластической среды задается системой уравнений

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = \mathbf{g} \quad \text{на } \Omega, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{a} \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — девиатор тензора напряжений, для которого выполнены соотношения

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \tau_s \frac{D_{ij}}{|\mathbf{D}|}, \quad \text{если } |\mathbf{D}| > 0; \quad |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_s, \quad \text{если } |\mathbf{D}| = 0, \quad (2)$$

$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ — тензор скоростей деформации, $|\mathbf{D}| = \sqrt{\sum_{ij} D_{ij}^2}$ — его второй инвариант, Ω — область в \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, и μ — постоянная пластическая вязкость.

Характерной особенностью движения вязкопластических сред является наличие так называемых жестких зон, т.е. подобластей Ω , где величина напряжения меньше *предела текучести* τ_s и среда ведет себя как твердое тело. Уравнения (1) выполняются только вне жестких зон. Внутри жестких зон величина напряжений меньше предела текучести, однако конкретные значения тензора напряжений, вообще говоря, не известны. Границы жестких зон априори также не известны.

Одним из распространенных подходов к численному решению этой задачи является применение регуляризации [1, 19], т.е. введение малого параметра $\varepsilon > 0$ таким образом, что среду можно рассматривать как жидкость с переменной вязкостью во всей области, при этом в жидкой зоне эффективная вязкость будет близка к вязкости в нерегуляризованном случае, а в жестких зонах принимает пусть очень большие, но конечные значения. Известны некоторые недостатки этого подхода, такие как проблема определения границ жестких зон и плохая обусловленность матриц дискретизированных систем. Тем не менее, метод регуляризации с успехом применяется на практике и имеет широкое распространение (см., например, публикации [4, 6, 7, 12–14] и цитированную в них литературу) благодаря простоте реализации в рамках уже существующих программных пакетов по вычислительной гидродинамике без существенной их модификации.

В данной работе используется регуляризация Папанастиасио [19] — определяющие соотношения (2) принимают форму

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \tau_s \left(\frac{1 - \exp(-|\mathbf{D}|/\varepsilon)}{|\mathbf{D}|} \right) D_{ij}.$$

Таким образом, вязкопластическая среда приближается моделью вязкой жидкости, при этом эффективная вязкость ν_ε имеет следующий вид:

$$\nu_\varepsilon(t) = 2\mu + \tau_s t^{-1} \left(1 - \exp(-t\varepsilon^{-1}) \right), \quad t = |\mathbf{D}|.$$

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; П. П. Гриневич, аспирант, e-mail: p.grinevich@gmail.com; М. А. Ольшанский, профессор, e-mail: Maxim.Olshanskiy@mtu-net.ru

Здесь нами сделана попытка преодолеть один из отмеченных недостатков регуляризованных моделей, а именно плохую обусловленность дискретных систем, путем построения подходящих переобусловливателей. На модельных примерах получены оценки собственных значений переобусловленных матриц. Сделаны выводы о сходимости итерационных методов на подпространствах Крылова. Путем численных экспериментов проверяется эффективность итерационных методов при значениях ε достаточно малых для адекватного приближения вязкопластичного поведения среды.

2. Численный метод. Предположим, что для дискретизации задачи применяется LBB-устойчивый (Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi) [3] метод конечных элементов или MAC-схема (Marker And Cell) [16] конечных разностей. Решение полученной дискретной задачи включает в себя внешние нелинейные итерации и приближенное решение системы линейных алгебраических уравнений на каждой нелинейной итерации. Решение линейной системы является наиболее трудоемкой операцией, поэтому очень важно предложить максимально эффективный метод.

В качестве нелинейного метода выбран метод Пикара, основными достоинствами которого являются простота и глобальная сходимость. Для дискретизированной задачи итерационный процесс имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_h^n \\ p_h^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h^{n-1} \\ p_h^{n-1} \end{pmatrix} - \omega \tilde{\mathcal{A}}_h(\mathbf{u}_h^{n-1})^{-1} \left[\mathcal{A}_h(\mathbf{u}_h^{n-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h^{n-1} \\ p_h^{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{g}_h \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (3)$$

с блочным линейным оператором $\mathcal{A}_h(\mathbf{u}_h^{n-1}) = \begin{pmatrix} -\operatorname{div}_h \nu_\varepsilon(|\mathbf{D}_h(\mathbf{u}_h^{n-1})|) \mathbf{D}_h & \nabla_h \\ -\operatorname{div}_h & 0 \end{pmatrix}$ и итерационным параметром $\omega > 0$. Через $\tilde{\mathcal{A}}_h(\mathbf{u}_h^{n-1})^{-1}(\mathbf{f}, g)^\top$ обозначим *приближенное* решение системы

$$\mathcal{A}_h(\mathbf{u}_h^{n-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ g \end{pmatrix} \quad (4)$$

с условием $\mathbf{v} = 0$ на границе сеточной области.

Заметим, что привлекательной альтернативой методу Пикара служит метод Ньютона. Метод Ньютона имеет квадратичную сходимость, однако его использование связано с некоторыми трудностями. Во-первых, область сходимости метода уменьшается при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, норма матрицы вторых производных растет как $O(\varepsilon^{-1})$ [5], накладывая теоретическое ограничение на выбор начального приближения из $O(\varepsilon)$ -окрестности неизвестного решения. Одна из возможностей использования метода Ньютона в данной ситуации — это найти достаточно хорошее начальное приближение, например тем же самым методом Пикара [11]. Во-вторых, обусловленность блока размера $(1, 1)$ оказывается существенно хуже, чем в методе Пикара, что также затруднит решение линейной системы.

При проведении численных экспериментов (раздел 6) для решения линейной системы (4) применяется обобщенный метод минимальных невязок GMRES (Generalized Minimal RESidual) [21] с блочным переобусловливателем. Применение метода GMRES позволяет рассматривать как симметричные блочно-диагональные, так и несимметричные блочно-треугольные переобусловливатели. Альтернативой может служить метод MINRES (MINimal RESidual) [20] с блочно-диагональным переобусловливателем или, к примеру, модификации метода Узавы.

3. Переобусловливание. Систему (4) удобно записать в форме системы линейных уравнений, используемой в задачах с седловой точкой [26]:

$$\begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ g \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \mathcal{A}x = b, \quad (5)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, n и m — число неизвестных для дискретных скоростей и давления, $n > m$.

Для седловых задач при построении переобусловливателя часто используется блочная структура исходной матрицы. Так, типичным выбором является переобусловливатель вида [8] $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix}$, где \hat{A} — преобусловливатель для блока A , а \hat{S} — преобусловливатель для дополнения Шура $S = BA^{-1}B^\top$. Другим возможным вариантом является, например, блочно-треугольная матрица $\mathcal{P}_t = \begin{pmatrix} \hat{A} & B^\top \\ 0 & -\hat{S} \end{pmatrix}$ в качестве правого переобусловливателя или \mathcal{P}_t^\top в качестве левого переобусловливателя. Несмотря на потерю

симметричности и, как следствие, невозможность использования метода MINRES для решения линейной системы, численные эксперименты показывают, что использование матрицы \mathcal{P}_t зачастую ведет к существенному уменьшению числа итераций по сравнению с использованием матрицы \mathcal{P} . Заметим, что метод простой итерации с переобусловливателем \mathcal{P}_t^T и $\hat{A} = A$ соответствует алгоритму Узавы, т.е. методу простой итерации для решения следующего уравнения относительно давления: $Sp = BA^{-1}f - g$.

В качестве переобусловливателя для блока A можно использовать, например, геометрический много-сеточный метод [24]. Выбор эффективного переобусловливателя для дополнения Шура не столь очевиден. Простейший выбор единичной матрицы, по примеру задачи Стокса, в качестве переобусловливателя для S дает неудовлетворительные результаты — число линейных итераций быстро растет с уменьшением ε . Действительно, в [11] показано, что в этом случае для числа обусловленности справедливо равенство $\text{cond}(\hat{S}^{-1}S) = c \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}}$. В [11] этот результат получен для метода конечных элементов, однако для МАС-схемы конечных разностей рассуждения остаются без изменений. При малых ε отношение максимального значения вязкости ν_{\max} к минимальному ν_{\min} может достигать величины порядка $1/\varepsilon$. Гораздо более эффективным для случая переменной вязкости с большим отношением ее минимального и максимального значений оказывается переобусловливатель $\hat{S} = \text{diag}\{\nu_i^{-1}\}$ или, в случае конечных элементов, переобусловливатель $\hat{S} = M_\nu$, где $(M_\nu)_{i,j} = (\nu^{-1}\psi_i, \psi_j)$ и ψ_i — базисные функции для давления. Здесь и далее используем обозначение $(f, g) := \int_\Omega fg dx$.

Эффективность переобусловливателя определяется константами c_ν и C_ν в неравенствах

$$c_\nu \hat{S} \leq S \leq C_\nu \hat{S}. \quad (6)$$

В работе [11] были получены следующие результаты в предположении, что область Ω является ограниченной с достаточно регулярной границей.

Теорема 1. *Верхняя оценка в (6) выполняется с константой $C_\nu = d$, если $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.*

Оценка снизу была получена для непрерывного случая.

Теорема 2. *Предположим, что ν достаточно гладкая функция. Тогда для всех $q \in L^2(\Omega)$, таких, что $(q, \nu^{-1/2}) = (q, \nu^{-1}) = 0$, выполняется неравенство*

$$\tilde{c}_\nu \|\nu^{-1/2}q\|^2 \leq \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{(q, \text{div } \mathbf{v})^2}{\|\nu^{1/2}D\mathbf{v}\|^2}, \quad \tilde{c}_\nu = \text{const}. \quad (7)$$

Если $d = 2$, то $\tilde{c}_\nu = \tilde{c}_0 \left(1 + c(k, r) \|\nu^{1/2}\|_{L^k} \|\nabla \nu^{-1/2}\|_{L^r}\right)^{-2}$ для любых $k > 2$ и $r > \frac{2k}{k-2}$. Здесь $c(k, r)$ зависит от констант неравенств вложения $H_0^1(\Omega)$ в $L^t(\Omega)$ с $t = t(k, r)$, а \tilde{c}_0 зависит только от константы в неравенстве Нечаса [15]: $\hat{c}\|q\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{(q, \text{div } \mathbf{v})}{\|\nabla \mathbf{v}\|}$ для всех $q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q dx = 0$.

Если $d = 3$, то $\tilde{c}_\nu = \tilde{c}_0 \left(1 + c \|\nu^{1/2}\|_{L^k} \|\nabla \nu^{-1/2}\|_{L^r}\right)^{-2}$ для любых $k > 3$ и $r = \frac{3k}{k-3}$.

Замечание 1. Неравенство Нечаса является непрерывным аналогом условия ЛВВ-устойчивости, а результат теоремы 2 можно рассматривать как обобщение неравенства Нечаса на случай переменной вязкости.

На практике бывает целесообразнее использовать следующее простое обобщение теоремы 2 на случай, когда вязкость является кусочно-гладкой на всей области Ω и гладкой на каждой из непересекающихся подобластей Ω_i , где $i = 1, \dots, N$ и $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$. Ценой этого обобщения являются дополнительные условия ортогональности на каждой из подобластей.

Теорема 3. *Пусть ν достаточно гладкая функция на каждой из N подобластей Ω_i , таких, что $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ и $\Omega_i \cap \Omega_k = \emptyset$ при $k \neq i$, причем граница $\partial\Omega_i$ достаточно регулярна. Тогда неравенство (7) будет выполнено с константой $\tilde{c}_\nu = \min_{1 \leq i \leq N} c_\nu(\Omega_i)$ для всех $q \in L^2(\Omega)$, таких, что $(q, \nu^{-1/2})_{L^2(\Omega_i)} = (q, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = 0$ для всех i . Здесь $c_\nu(\Omega_i)$ обозначает константу из (6), соответствующую области Ω_i .*

Замечание 2. Связь неравенства (7) с нижней оценкой из (6) хорошо известна. Ее легко показать для случая конечных элементов. Для полноты изложения ниже приводятся соответствующие выкладки.

Пусть на n -м шаге метода (3) $\nu := \nu_\varepsilon(|D\mathbf{u}_h^{n-1}|)$. Предположим, что выполняется дискретный аналог (7) для конечно-элементных функций давления q_h , удовлетворяющих условиям ортогональности $(q_h, \nu^{-1/2}) = (q_h, \nu^{-1}) = 0$. Покажем, что в этом случае нижняя оценка в (6) выполняется с $c_\nu = \tilde{c}_\nu$.

Действительно, пусть q и v — векторы коэффициентов конечно-элементных функций давления q_h и скорости \mathbf{v}_h . Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle Sq, q \rangle &= \langle A^{-1}B^Tq, B^Tq \rangle = \|A^{-1}B^Tq\|_A^2 = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle A^{-1}B^Tq, v \rangle_A^2}{\|v\|_A^2} = \\ &= \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle B^Tq, v \rangle}{\langle Av, v \rangle} = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle q, Bv \rangle}{\langle Av, v \rangle} = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)^2}{\|\nu^{1/2} \mathbf{D}\mathbf{v}_h\|^2}, \\ \langle M_\nu q, q \rangle &= \sum_{i=1}^m q_i \sum_{j=1}^m q_j (M_\nu)_{ij} = \sum_{i=1}^m q_i \sum_{j=1}^m q_j \int_{\Omega} \nu^{-1} \psi_i \psi_j d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \nu^{-1} \sum_{i=1}^m q_i \psi_i \sum_{j=1}^m q_j \psi_j d\Omega = \left\| \nu^{-1/2} \sum_{i=1}^m q_i \psi_i \right\|^2 = \|\nu^{-1/2} q_h\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для $\widehat{S} = M_\nu$ мы получили, что $\tilde{c}_\nu \langle \widehat{S}q, q \rangle \leq \langle Sq, q \rangle \quad \forall q \in \mathbb{R}^n : (q_h, \nu^{-1/2}) = (q_h, \nu^{-1}) = 0$.

Замечание 3. Хотя эти оценки доказаны для непрерывного случая, численные эксперименты подтверждают их состоятельность и для дискретных операторов.

4. Оценка собственных значений и сходимость итерационных методов. Покажем, как результаты предыдущего раздела позволяют сделать выводы о сходимости некоторых методов на подпространствах Крылова для решения системы (5). С этой целью рассмотрим задачу на собственные значения для переобусловленного дополнения Шура

$$Sq = \lambda \widehat{S}q. \tag{8}$$

Собственные значения λ_k вещественны, и для них справедливо представление Куранта–Фишера

$$\lambda_k = \max_{\mathcal{K} \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{q \in \mathcal{K}^\perp} \frac{\langle Sq, q \rangle}{\langle \widehat{S}q, q \rangle},$$

где символом \mathcal{V}_{k-1} обозначены все $(k-1)$ -мерные подпространства \mathbb{R}^m . Предположим справедливость дискретного аналога теоремы 3: для некоторой константы $\tilde{c}_\nu > 0$ и конформных конечно-элементных пространств \mathbb{Q}_h и \mathbb{V}_h (для давления и скоростей соответственно) выполняется неравенство

$$\tilde{c}_\nu \|\nu^{-1/2} q_h\|^2 \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)^2}{\|\nu^{1/2} \mathbf{D}\mathbf{v}_h\|^2} \quad \forall q_h \in \mathbb{Q}_h : (q_h, \nu^{-1/2})_{L^2(\Omega_i)} = (q_h, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = 0. \tag{9}$$

Для собственных значений матрицы $\widehat{S}^{-1}S$ немедленно получаем оценку

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_m \leq d, \quad \tilde{c}_\nu \leq \lambda_{2N+1}, \tag{10}$$

выбирая в качестве \mathcal{K}^\perp из представления Куранта–Фишера $(m-2N)$ -мерное пространство векторов коэффициентов конечно-элементных функций давления q_h , удовлетворяющих $2N$ условиям ортогональности из (9). Заметим, что неполный ранг матрицы (когда $\lambda_1 = 0$) не является препятствием для решения системы, которая является совместной в силу выполнения условия $g \perp 1$ для правой части из (5), здесь 1 — вектор с единичными компонентами. Более того, при выборе начального приближения $\{u^0, p^0\}$, удовлетворяющего условию $p^0 \perp \widehat{S}1$, все дальнейшие приближения к давлению в итерационном методе, основанном на подпространствах Крылова, принадлежат подпространству $(\widehat{S}1)^\perp$ (см. [18], с. 143) и наличие нулевого собственного значения не влияет на сходимость метода. Тем не менее, сходимость методов, основанных на подпространствах Крылова, тесно связана с распределением собственных значений матрицы системы уравнений (см. [25], гл. 21). Так, при использовании переобусловленного метода сопряженных градиентов (вариант метода Узавы) для нахождения давления из уравнения $Sp = BA^{-1}\mathbf{f} - g$ оценка на k -й итерации для ошибки $e^k = p - p^k$ (здесь и далее мы предполагаем $p^0 \perp \widehat{S}1$) имеет вид

$$\|e^k\|_S \leq \min_{P_k \in \mathcal{P}_k} \left\{ \max_{\lambda \in \operatorname{sp}(\widehat{S}^{-1}S)/\lambda_1} |P_k(\lambda)| \right\} \|e^0\|_S, \tag{11}$$

где \mathcal{P}_k — множество многочленов $P_k(x)$ степени k с вещественными коэффициентами и $P_k(0) = 1$.

Для оценки сходимости в случае $2N$ малых собственных значений рассмотрим многочлен $\psi(\lambda) = (1 - \lambda_2^{-1}\lambda) \dots (1 - \lambda_{2N}^{-1}\lambda)$. При $k \geq 2N$ справедливо неравенство

$$\min_{P_k \in \mathcal{P}_k} \left\{ \max_{\lambda \in \text{sp}(\widehat{S}^{-1}S)/\lambda_1} |P_k(\lambda)| \right\} \leq \max_{\lambda \in \text{sp}_c(\widehat{S}^{-1}S)} |\psi(\lambda)| |Q(\lambda)| \quad \forall Q(x) \in \mathcal{P}_{k-2N+1},$$

где $\text{sp}_c(\widehat{S}^{-1}S)$ — кластеризованный спектр $\widehat{S}^{-1}S$, т.е. $\text{sp}_c(\widehat{S}^{-1}S) = \cup_{i=2N+1}^m \lambda_i$. Выбирая в качестве $Q(x)$ многочлен Чебышева степени $k - 2N + 1$ для отрезка $[\lambda_{2N+1}, \lambda_m]$ и применяя хорошо известную оценку для $\max_{\lambda \in [\lambda_{2N+1}, \lambda_m]} |Q(x)|$ и оценку (10), получим

$$\min_{P_k \in \mathcal{P}_k} \left\{ \max_{\lambda \in \text{sp}(\widehat{S}^{-1}S)/\lambda_1} \|P_k(\lambda)\| \right\} \leq 2 \left(\frac{1 - \sqrt{\widetilde{c}_\nu/d}}{1 + \sqrt{\widetilde{c}_\nu/d}} \right)^{k-2N+1} \max_{\lambda \in \text{sp}_c(\widehat{S}^{-1}S)} |\psi(\lambda)|.$$

Теперь из тривиальной оценки $\max_{\lambda \in \text{sp}_c(\widehat{S}^{-1}S)} |\psi(\lambda)| \leq (\lambda_m \lambda_2^{-1})^{2N-1}$ и оценки (11) следует

$$\|e^k\|_S \leq 2 \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_2} \right)^{2N-1} \left(\frac{1 - \sqrt{\widetilde{c}_\nu/d}}{1 + \sqrt{\widetilde{c}_\nu/d}} \right)^{k-2N+1} \|e^0\|_S. \quad (12)$$

Из (12) видно, что с точностью до множителя $(\lambda_m \lambda_2^{-1})^{2N-1}$ метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\rho = \frac{1 - \sqrt{\widetilde{c}_\nu/d}}{1 + \sqrt{\widetilde{c}_\nu/d}}$, который определяется кластером собственных значений.

Влияние этого множителя может сказаться на увеличении числа итераций по сравнению с ситуацией, когда весь спектр равномерно отделен от нуля. Количество k дополнительных итераций можно оценить следующим образом [9]. Из оценки (12) заключаем, что указанная асимптотическая сходимость метода

имеет место, если значение k настолько велико, что выполняется неравенство $\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_2} \right)^{2N-1} \rho^{k-2N+1} < 1$.

Следовательно, приходим к следующей оценке для количества дополнительных итераций:

$$k > (2N - 1) \left(\frac{\log(\lambda_m \lambda_2^{-1})}{\log \rho^{-1}} + 1 \right).$$

Таким образом, если число N мало и значение $\log(\lambda_m \lambda_2^{-1})$ невелико, то сходимость метода существенным образом определяется границами кластера собственных значений.

Сделаем замечание о том, насколько проведенные выше рассуждения остаются в силе, если вместо метода Узавы применяются блочные переобусловливатели \mathcal{P} и \mathcal{P}_t , определенные в начале предыдущего раздела. Блочные переобусловливатели являются более практичным выбором, так как допускают замену точного решения системы с матрицей A на каждой итерации на применение подходящего переобусловливателя \widehat{A}^{-1} . К сожалению, на сегодняшний момент полный ответ можно дать только в случае блочно-диагонального переобусловливателя \mathcal{P} и при условии $\widehat{A} = A$. Действительно, в этом случае собственными значениями переобусловленной матрицы $\mathcal{P}^{-1}A$ являются 0, 1 и $\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda_i^2} \right)$ [10]. Теперь наличие $2N$ малых собственных значений λ влечет существование $2N$ отрицательных и малых по модулю собственных значений матрицы $\mathcal{P}^{-1}A$. Остальные $n + m - 2N$ собственных значений матрицы $\mathcal{P}^{-1}A$ остаются кластеризованными на положительной и отрицательных полуосях. Следовательно, аналогичные выводы можно сделать о сходимости метода MINRES для решения системы с матрицей $\mathcal{P}^{-1}A$. В случае отказа от условия $\widehat{A} = A$ вопрос о сохранении структуры спектра переобусловленной матрицы остается, насколько известно авторам, на сегодняшний день открытым. Хорошо известно [8], что блочно-треугольный переобусловливатель \mathcal{P}_t сохранит структуру спектра в том смысле, что собственные значения переобусловленной матрицы будут состоять из собственных значений матриц $\widehat{A}^{-1}A$ и $\widehat{S}^{-1}S$. Однако применить оценку сходимости для метода GMRES на основе имеющейся информации о спектре мы не можем, так как наверняка неизвестно, является ли матрица $\mathcal{P}_t^{-1}A$ диагонализируемой.

5. Применение оценок к задаче Бингама. Для среды Бингама известно аналитическое решение задачи о течении между двумя пластинами (здесь и далее полагаем $\mu = 1$): при $v = w = 0$ и $p = -x$

$$u = \begin{cases} \frac{1}{8} (1 - 2\tau_s)^2, & \text{если } \frac{1}{2} - \tau_s \leq y \leq \frac{1}{2} + \tau_s, \\ \frac{1}{8} [(1 - 2\tau_s)^2 - (1 - 2\tau_s - 2y)^2], & \text{если } 0 \leq y < \frac{1}{2} - \tau_s, \\ \frac{1}{8} [(1 - 2\tau_s)^2 - (2y - 2\tau_s - 1)^2], & \text{если } 1 \geq y > \frac{1}{2} + \tau_s. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)$ и p — известные поле скоростей и давление.

Пусть область Ω — единичный квадрат. Обозначим через Ω_1 жесткую зону $0.5 - \tau_s \leq y \leq 0.5 + \tau_s$, а через Ω_2 и Ω_3 — зоны текучести $0 \leq y < 0.5 - \tau_s$ и $0.5 + \tau_s < y \leq 1$ соответственно. В области Ω_1 вязкость постоянна, значит $\nabla \nu^{-1/2} = 0$ и константу $c_\nu(\Omega_1)$ из теоремы 3 можно оценить как $O(1)$. В Ω_2 (а также и в Ω_3) можно провести следующие рассуждения: вычислить нормы $\|\nabla \nu^{-1/2}\|_\infty$ и $\|\nu^{1/2}\|_{L^k(\Omega_2)}$ точно затруднительно, однако так как c_ν надо оценить снизу, то эти нормы должны быть оценены сверху. Напомним, что регуляризованная эффективная вязкость выражается по формуле

$$\nu = 2\mu + \tau_s |\mathbf{D}|^{-1} \left(1 - \exp(-|\mathbf{D}| \varepsilon^{-1}) \right),$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр регуляризации. В области Ω_2 тензор скоростей деформаций и вязкость зависят только от $|\mathbf{D}| = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 2\tau_s - 2y)$ и переменной y . Норму $\|\nabla \nu^{-1/2}\|_\infty$ можно сразу оценить как $O(1)$. Чтобы оценить сверху вторую норму, введем функцию $\hat{\nu}$, которая является мажорантой для регуляризованной эффективной вязкости ν :

$$\nu \leq \hat{\nu}(y) = 2\mu + \tau_s \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{1 - 2\tau_s - 2y}, & \text{если } y \leq 0.5 - \tau_s - \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon, \\ \varepsilon^{-1}, & \text{если } y > 0.5 - \tau_s - \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon. \end{cases}$$

Теперь, непосредственно вычислив $\|\hat{\nu}^{1/2}\|_{L^k(\Omega_2)}$, можно оценить $\|\nu^{1/2}\|_{L^k(\Omega_2)}$ сверху как $O(\varepsilon^{(2-k)/(2k)})$ для любого $k > 2$. Это означает, что $\tilde{c}_\nu \geq c(s)\varepsilon^{-r}$ для любого $r > 0$. В силу $2\mu < \nu \leq c\varepsilon^{-1}$ выполняется также и тривиальная оценка

$$c\varepsilon \|\nu^{-1/2} q\|^2 \leq \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})^2}{\|\nu^{1/2} \mathbf{D} \mathbf{v}\|^2} \quad \forall q \in L^2(\Omega) : (q, \nu^{-1}) = 0.$$

И наконец, мы можем применить теорему 3 и оценки (10) для случая трех подобластей, т.е. при $N = 3$. В предположении о справедливости результатов в дискретном случае мы приходим к следующим оценкам для собственных значений матрицы $\hat{S}^{-1}S$ для всех $r > 0$:

$$\varepsilon < \lambda_2, \quad c(s)\varepsilon^r \leq \lambda_7 \leq \dots \leq \lambda_m \leq d.$$

Рассуждения предыдущего раздела о сходимости переобусловленных методов на подпространствах Крылова, в частности оценка (12), могут быть применены.

6. Результаты численных экспериментов. В этом разделе рассмотрены результаты численных экспериментов для двух модельных задач — для течения между двумя пластинами (аналитическое решение известно и приводится в предыдущем разделе) и для течения в каверне (на верхней части границы единичного квадрата задаем $u = 1, v = 0$, на оставшейся части границы скорость равна нулю; аналитическое решение не известно). Для дискретизации используем MAC-схему конечных разностей, про которую известна устойчивость в случае ньютоновской жидкости.

В качестве переобусловливателя для блока A используется одна итерация (один V-цикл) геометрического многосеточного метода. В качестве сглаживателя выбрано неполное разложение Холесского с нулевым заполнением, и выполняются по четыре сглаживающие итерации в обоих направлениях. На грубой сетке система решается точно.

Линейная система решается методом GMRES, так как этот метод позволяет использовать несимметричные переобусловливатели и дает возможность сравнивать блочно-диагональный переобусловливатель

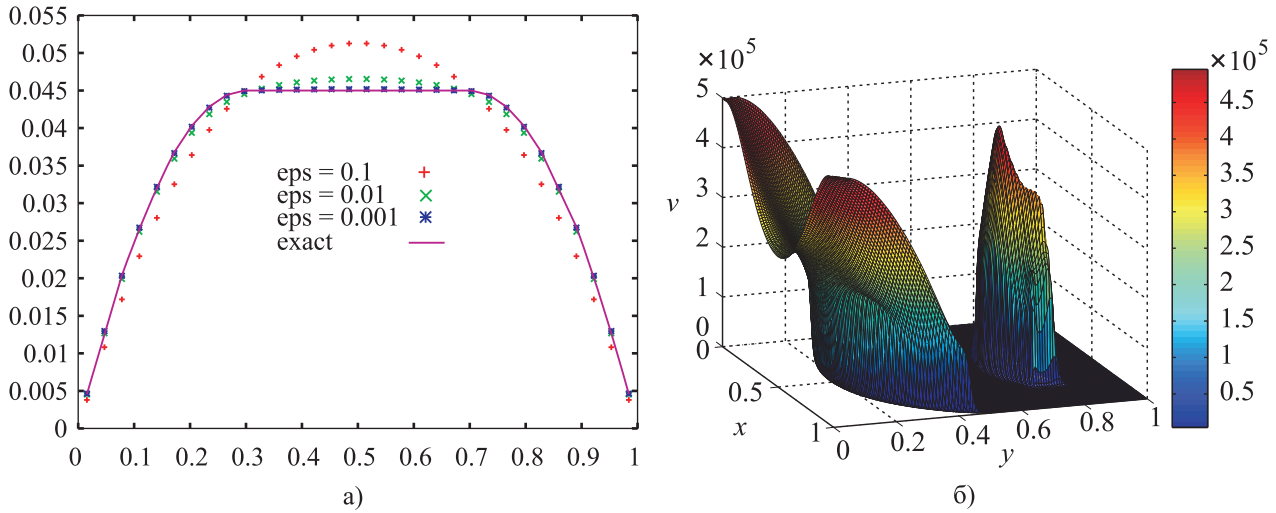


Рис. 1. Профили скорости для разных значений ϵ в задаче о течении между двумя пластинами для $\tau_s = 0.2$ (а); эффективная вязкость в задаче о каверне при $\tau_s = 5$, $\epsilon = 10^{-5}$ (б)

Таблица 1

Число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций).
 Блочно-диагональный переобусловливатель;
 задача о течении в каверне

τ_s	h	$\epsilon = 10^{-1}$	$\epsilon = 10^{-2}$	$\epsilon = 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-4}$	$\epsilon = 10^{-5}$
2	$\frac{1}{32}$	21(13.9)	72(16.5)	103(28.3)	125(29.3)	129(29.7)
	$\frac{1}{64}$	22(16.0)	86(18.1)	197(18.5)	245(32.9)	237(72.2)
	$\frac{1}{128}$	24(15.0)	99(18.7)	290(18.9)	561(24.1)	600(26.5)
5	$\frac{1}{32}$	37(16.5)	110(21.0)	137(29.8)	154(57.2)	150(48.3)
	$\frac{1}{64}$	40(21.6)	138(24.3)	259(24.1)	251(28.0)	295(40.6)
	$\frac{1}{128}$	44(18.6)	178(24.4)	455(24.2)	586(26.4)	605(27.0)

с блочно-треугольным. Решение нелинейных уравнений производится от начального приближения, полученного в результате решения задачи Стокса с соответствующими краевыми условиями. В качестве критерия останова нелинейных итераций Пикара выбрано достижение невязки величины 10^{-4} .

На рис. 1а сравниваются профили скорости для разных значений ϵ в задаче о течении между двумя пластинами с профилем скорости точного решения. Для этого примера можно сказать, что вязкопластичное решение задачи Бингама достаточно адекватно воспроизводится при значениях параметра регуляризации $\epsilon \lesssim 10^{-3}$. На рис. 1б иллюстрируется поведение коэффициента эффективной вязкости в задаче о течении в каверне при $\epsilon = 10^{-5}$ и $\tau_s = 5$.

В табл. 1 и 2 приводится количество итераций для задачи о каверне и задаче о течении между пластинами, соответственно. Вне скобок приведено число итераций Пикара с $\omega = 1$, в скобках — усредненное число линейных итераций за одну нелинейную. В качестве критерия останова метода GMRES выбрано уменьшение нормы невязки в 10^2 раз. Усредненное количество линейных итераций меняется в зависимости от ϵ и размера сетки очень незначительно. Незначительный рост числа линейных итераций при $\epsilon \rightarrow 0$ мы объясняем тем, что геометрический многосеточный метод, одну итерацию которого мы используем в качестве переобусловливателя для блока A , не является абсолютно робастным методом относительно существенных вариаций в коэффициенте диффузии (он же коэффициент эффективной вязкости) для эллиптического уравнения. Зависимость от ϵ исчезает, если положить $\hat{A} = A$ [11]. Использование единич-

Таблица 2

Число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций).
Блочно-диагональный переобусловливатель; задача
о течении между двумя пластинами

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
0.1	$\frac{1}{32}$	5(9.8)	12(13.7)	34(16.3)	95(22.2)	125(26.4)
	$\frac{1}{64}$	6(10.3)	12(14.0)	42(18.1)	110(21.2)	166(33.5)
	$\frac{1}{128}$	6(10.7)	13(14.2)	54(20.7)	165(22.0)	226(28.5)
0.3	$\frac{1}{32}$	7(10.7)	21(25.9)	79(23.8)	58(29.4)	88(65.2)
	$\frac{1}{64}$	7(11.9)	23(34.7)	106(29.2)	179(28.9)	366(41.1)
	$\frac{1}{128}$	8(12.0)	25(16.7)	121(35.1)	257(29.3)	337(45.7)

Таблица 3

Число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций).
Блочно-треугольный переобусловливатель;
задача о течении в каверне

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
2	$\frac{1}{32}$	21 (7.3)	72(5.9)	103(8.7)	125(11.8)	128(17.3)
	$\frac{1}{64}$	23(7.5)	86(6.8)	197(8.0)	245(9.3)	237(59.8)
	$\frac{1}{128}$	24(7.0)	99(6.5)	290(6.7)	561(8.6)	600(8.6)
5	$\frac{1}{32}$	37(7.6)	110(7.4)	137(12.4)	149(27.8)	150(18.6)
	$\frac{1}{64}$	40(7.2)	138(9.0)	259(9.5)	251(12.7)	294(11.7)
	$\frac{1}{128}$	44(6.5)	178(7.2)	455(8.5)	585(9.0)	605(8.5)

ной матрицы в качестве \hat{S} (результаты не приводятся) приводит к росту числа линейных итераций на несколько порядков при переходе от $\varepsilon = 10^{-1}$ к $\varepsilon = 10^{-5}$.

В табл. 3 и 4 приводится количество итераций для задач о каверне и о течении между пластинами с использованием блочно-треугольного предобусловливателя. Критерий остановки метода GMRES — уменьшение нормы невязки в 10^4 раз. Отметим, что при менее точном решении линейной системы с блочно-треугольным предобусловливателем итерации Пикара в некоторых случаях существенно замедлялись. Несмотря на более точное решение линейной системы, количество итераций оказывается заметно меньшим, чем при использовании блочно-диагонального переобусловливателя. Зависимость числа линейных итераций от размера сетки и от ε также достаточно слабая. Сравнивая точность полученных решений для задачи о течении в каверне, в частности форму и размер жестких зон на рис. 2, с известными результатами, приведенными в [7, 14, 17, 22], мы приходим к выводу, что для данного примера регуляризованная модель хорошо воспроизводит вязкопластическую среду Бингама только для достаточно малых значений ε ($\varepsilon \lesssim 10^{-4}$). В то же время, именно для таких малых ε использование специальных переобусловливателей необходимо для эффективных расчетов.

Таблица 4

Число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций).
Блочно-треугольный переобусловливатель; задача
о течении между двумя пластинами

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
0.1	$\frac{1}{32}$	5(6.2)	12(7.2)	35(7.4)	94(19.1)	125(19.9)
	$\frac{1}{64}$	6(5.8)	12(7.0)	42(7.4)	109(14.8)	165(20.9)
	$\frac{1}{128}$	6(7.0)	13(7.2)	55(5.8)	165(11.0)	225(15.3)
0.3	$\frac{1}{32}$	7(5.6)	21(7.4)	79(9.3)	59(14.3)	86(12.6)
	$\frac{1}{64}$	7(5.9)	23(7.0)	105(9.9)	178(11.4)	365(12.3)
	$\frac{1}{128}$	8(6.1)	25(6.7)	120(7.5)	260(9.5)	342(8.9)

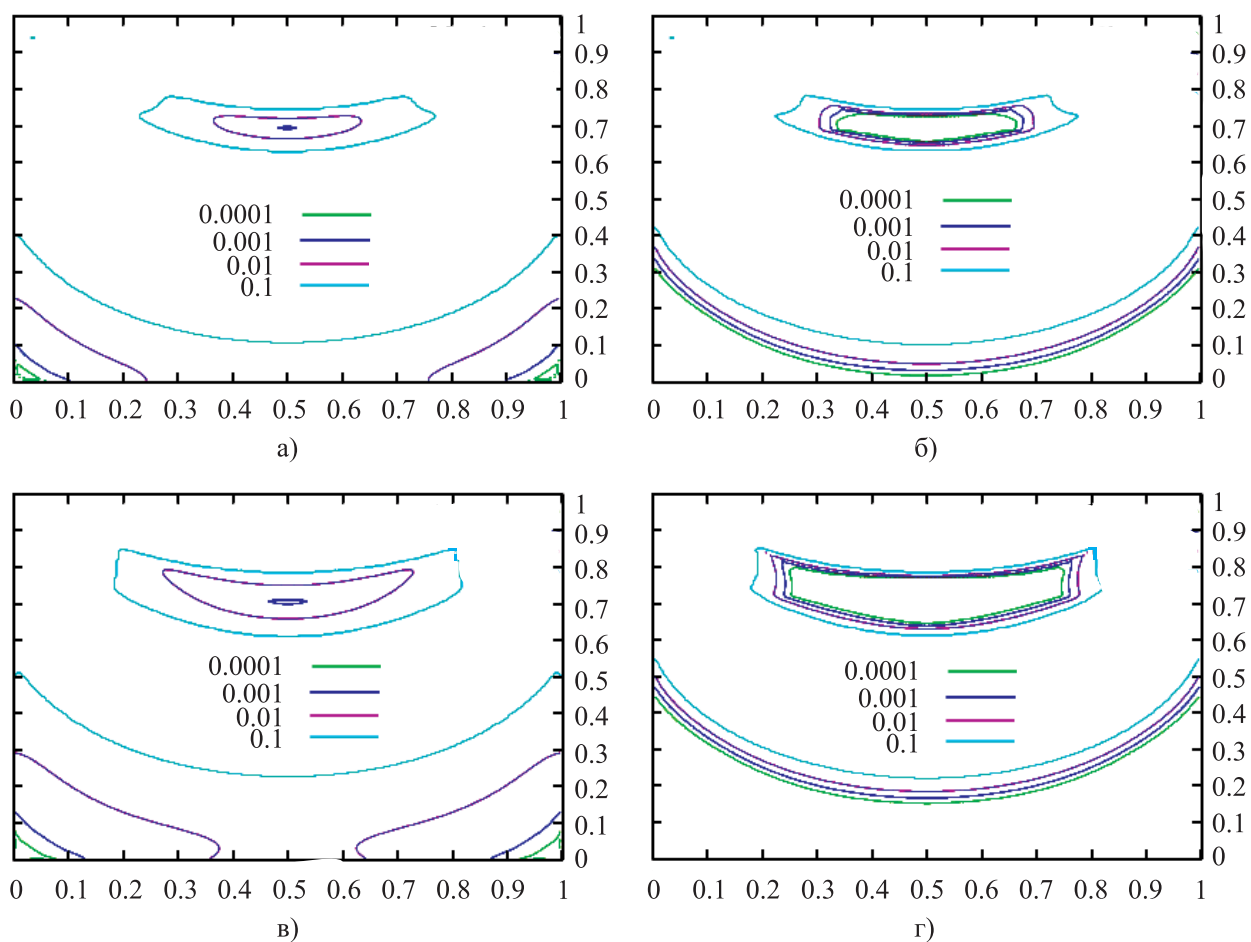


Рис. 2. Линии уровня модуля тензора скоростей деформаций $|D|$ для $|D| = 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-4}$
в задаче о каверне, $h = \frac{1}{128}$: а) $\tau_s = 2, \varepsilon = 10^{-2}$; б) $\tau_s = 2, \varepsilon = 10^{-5}$;
в) $\tau_s = 5, \varepsilon = 10^{-2}$; г) $\tau_s = 5, \varepsilon = 10^{-5}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bercovier M., Engelman M.* A finite element method for incompressible non-newtonian flows // J. Comp. Phys. 1980. **36**. 313–326.
2. *Bingham E.* Fluidity and plasticity. New-York: McGraw-Hill, 1922.
3. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. New-York: Springer, 1991.
4. *Chatzimina M., Xenophontos C., Georgiou G.C., Argyropaidas I., Mitsoulis E.* Cessation of annular Poiseuille flows of Bingham plastics // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2007. **142**. 135–142.
5. *Dean E.J., Glowinski R.* Operator-splitting methods for the simulation of Bingham visco-plastic flow // Chin. Ann. of Math. 2002. **23**. 187–204.
6. *Dimakopoulos Y., Tsamopoulos J.* Transient displacement of a viscoplastic material by air in straight and suddenly constricted tubes // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2003. **112**. 43–53.
7. *Elias R.N., Martins M.A.D., Coutinho A.L.G.A.* Parallel edge-based solution of viscoplastic flows with the SUPG/PSPG formulation // Comput. Mech. 2006. **38**. 365–381.
8. *Elman H.C., Silvester D.J., Wathen A.J.* Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics. Oxford : Oxford University Press, 2005.
9. *Elman H.C., Silvester D.J., Wathen A.J.* Performance and analysis of saddle point preconditioners for the discrete steady-state Navier–Stokes equations // Numer. Math. 2002. **90**. 665–688.
10. *Fischer B., Ramage A., Silvester D.J., Wathen A.J.* Minimum residual methods for augmented systems // BIT. 1998. **38**. 527–543.
11. *Grinevich P.P., Olshanskii M.A.* An iterative method for the Stokes-type problem with variable viscosity // SIAM J. Sci. Comp. 2009. **32**. 3959–3978.
12. *Hron J., Ouazzi A., Turek S.* A computational comparison of two FEM solvers for nonlinear incompressible flow // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Vol. 35, pp. 87–108. New York: Springer, 2003.
13. *Mitsoulis E., Huilgol R.R.* Entry flows of Bingham plastics in expansions // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2004. **122**. 45–55.
14. *Mitsoulis E., Zisis Th.* Flow of Bingham plastics in a lid-driven cavity // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2001. **101**. 173–180.
15. *Nečas J.* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Paris: Masson, 1967.
16. *Nicolaides R.A.* Analysis and convergence of the MAC scheme. I. The linear problem // SIAM. J. Num. Anal. 1992. **29**. 1579–1591.
17. *Olshanskii M.A.* Analysis of semi-staggered finite-difference method with application to Bingham flows // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 2009. **198**. 975–985.
18. *Olshanskii M.A., Reusken A.* Analysis of a Stokes interface problem // Numer. Math. 2006. **103**. 129–149.
19. *Papanastasiou T.C.* Flows of materials with yield // J. Rheol. 1987. **31**, N 5. 385–404.
20. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. Philadelphia: SIAM, 2003.
21. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Comp. 1986. **7**. 856–869.
22. *Sanchez F.J.* Application of a first-order operator splitting method to Bingham fluid flow simulation // Comput. Math. Appl. 1998. **36**. 71–86.
23. *Ильюшин А.А.* Деформация вязко-пластичного тела // Ученые записки МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. 3–81.
24. *Ольшанский М.А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: Физматлит, 2005.
25. *Тыртыхников Е.Е.* Методы численного анализа. М.: Издательский центр “Академия”, 2007.
26. *Чижевников Е.В.* Релаксационные методы решения седловых задач. М.: ИВМ РАН, 2002.

Поступила в редакцию
11.02.2010