

УДК 519.633.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКСИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Е. В. Чижонков¹

Для моделирования аксиальных решений некоторых нелинейных систем уравнений, описывающих пространственные аксиально симметричные лазер-плазменные взаимодействия, сформулированы и численно исследованы “усеченные” задачи. Показана корректность и вычислительная эффективность подхода. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00625-а).

Ключевые слова: плазменные колебания, кильватерные волны, аксиальные решения, метод конечных разностей.

Введение. Значительное количество математических постановок различных естественнонаучных проблем обладает свойством пространственной локальности, т.е. наиболее важные изменения изучаемых характеристик сосредоточены в весьма ограниченной области пространства. При этом, как правило, определяющие соотношения (здесь, в первую очередь, имеются в виду уравнения математической физики) заданы во всем пространстве, а сопутствующие им граничные (краевые) условия фактически определяют асимптотику искомых решений на бесконечности. Особенно характерны математические задачи с указанным свойством для таких предметных областей, как физика плазмы [1] или лазерная физика [2]. Типична ситуация, когда пространственная локальность порождается аксиальной симметрией постановки, т.е. при использовании цилиндрических координат ярко выражено убывание решений по поперечному (радиальному) направлению. Численное моделирование явлений такого рода, как правило, демонстрирует первостепенную значимость поведения функций на оси (например, эффекты типа самофокусировки или самоканалирования; см. [2] и цитированную там литературу). Однако для вычисления аксиальных характеристик приходится проводить расчеты “полных” задач, т.е. в достаточно большой области изменения радиальной переменной по сравнению с характерными масштабами процесса.

Такая ситуация вызывает естественную неудовлетворенность: если по существу дела требуется решение только на оси, зачем решать “полную” задачу? Кроме того, сразу появляется проблема повышения эффективности используемых вычислительных алгоритмов, так как типичные задачи сильно нелинейны, а соответствующие методы их решения весьма трудоемки и сложны в реализации. Вышесказанное означает безусловную актуальность разработки методов вычисления аксиальных решений для задач, обладающих свойством пространственной локальности.

В настоящей статье рассматривается нахождение аксиальных решений для трех задач из области моделирования лазерно-плазменных взаимодействий. Для каждой из них последовательно приводится постановка “полной” задачи, затем выводятся уравнения для аксиальных решений, далее описывается численный метод их решения. Кроме того, полученные на основе расчетов аксиальные решения сопоставляются с решениями на оси “полных” задач, которые были получены в других работах и другими способами.

Основой для моделирования служит система гидродинамических уравнений для холодной идеальной релятивистской электронной жидкости совместно с уравнениями Максвелла [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) &= 0, & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} &= e\mathbf{E} - mc^2\nabla\gamma, \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2} + \frac{|a|^2}{2}}, & \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -4\pi en\mathbf{v} + c \operatorname{rot} \mathbf{B}, & \mathbf{B} &= -\frac{c}{e} \operatorname{rot} \mathbf{p}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света, n , \mathbf{p} и \mathbf{v} — концентрация, удельный импульс и скорость электронов, γ — лоренцевский фактор, \mathbf{E} и \mathbf{B} — напряженности электрического и магнитного полей, a — амплитуда лазерного поля (так называемая огибающая).

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

1. Свободные нерелятивистские колебания электронов в плазме. Исследование нелинейных электронных колебаний в плазме имеет продолжительную историю. Наиболее известными на эту тему являются работы [5, 6], в которых в качестве основного объекта изучалась функция плотности электронов. Мы продолжим эту традицию, рассмотрев следующую физическую постановку: в цилиндрическом сгустке плазмы с помощью приложенного электрического поля, изменение которого зависело только от радиальной переменной, электроны сначала были выведены из положения равновесия, а затем отпущены. Двигаясь с ускорением к положению равновесия (существующему в силу практической неподвижности ионов), электроны его “проскакивают” по инерции, тем самым порождая новое поле, стремящееся вернуть их назад. В результате возникают колебательные радиальные движения электронов, зависящие от времени.

1.1 Постановка “полной” задачи. В нерелятивистском случае свободные колебания описываются системой уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V \left[1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E) \right] = 0 \quad (2)$$

и иницируются в некоторый момент времени (положим для удобства $\theta = 0$) начальными данными вида

$$V(\rho, 0) = 0, \quad E(\rho, 0) = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2 \rho \exp^2 \left\{ -\frac{\rho^2}{\rho_*^2} \right\}. \quad (3)$$

Здесь $V = V(\rho, \theta)$ и $E = E(\rho, \theta)$ определяют скорость электронов и электрическое поле соответственно, a_* и ρ_* — параметры задачи.

Рассматриваемая задача была поставлена и численно-аналитически исследована в работе [7]. Уравнения (2) формально следуют из системы (1) в предположениях, что решение уравнений, записанных в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) , обладает аксиальной симметрией, определяется только радиальными компонентами и зависимость от переменной z отсутствует. Отметим, что представляющая основной интерес функция электронной плотности в данном случае определяется соотношением

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E). \quad (4)$$

Для однозначного определения искомых функций требуется добавить краевые условия. На оси (при $\rho = 0$), в силу аксиальной симметрии задачи, имеем

$$V(0, \theta) = E(0, \theta) = 0. \quad (5)$$

Кроме того, физическая постановка предусматривает, что вынуждающее электрическое поле (3) быстро убывает в радиальном направлении. Поэтому при достаточно большом значении $\rho = \rho_{\max}$, таком, что $\exp \left(-\frac{\rho_{\max}^2}{\rho_*^2} \right) \ll 1$, с удовлетворительной точностью справедливы равенства

$$V(\rho_{\max}, \theta) = E(\rho_{\max}, \theta) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, простейшая задача о цилиндрических плазменных колебаниях формулируется так: найти в области $\Omega = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}\}$ функции V и E , удовлетворяющие уравнениям (2), начальным данным (3) и краевым условиям (5) и (6). При этом величина θ_{\max} определяется только интересами исследования. Отметим характерную особенность постановки: первостепенный интерес представляет функция электронной плотности на оси (при $\rho = 0$), но для этого приходится решать “полную” задачу.

1.2. Постановка “усеченной” задачи. Учитывая вид краевых условий (5), будем в окрестности оси рассматривать линейные по пространству решения уравнений (2): $V(\rho, \theta) = W(\theta) \rho$, $E(\rho, \theta) = D(\theta) \rho$. Несложно убедиться, что в этом случае уравнения в частных производных (2) переходят в обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$W' + D + W^2 = 0, \quad D' - W(1 - 2D) = 0, \quad (7)$$

а начальные условия (3) — соответственно в условия

$$W(0) = 0, \quad D(0) = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2. \quad (8)$$

Кроме того, для функции электронной плотности имеем выражение на оси $N(\rho = 0, \theta) = 1 - 2D(\theta)$. Таким образом, задача определения аксиальных решений в данном случае сводится к интегрированию уравнений (7) на временном отрезке $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$ с начальными условиями (8).

Отметим, что аналитическое решение задачи (7), (8) существует и может быть представлено в специальной параметризованной форме [8], следовательно, доступно детальному изучению. Однако исследование вопросов глобального или локального существования решения уравнений (7), а также его зависимость от различных параметров выходит за рамки настоящей работы, так как здесь, по сути, целью является оптимизация численных алгоритмов, а не возможные физические приложения подхода.

1.3. Численная схема и результаты расчетов. Введем равномерную сетку $\theta_k = k\tau$, $0 \leq k \leq K$, $K\tau = \theta_{\max}$ и запишем дискретный аналог уравнений (7). Используя для сеточных функций обозначения $f_k = f(\theta_k)$, будем иметь для $k \geq 0$ схему

$$\frac{W_{k+1} - W_k}{\tau} + D_k + W_k^2 = 0, \quad \frac{D_{k+1} - D_k}{\tau} - W_{k+1}(1 - 2D_{k+1}) = 0. \tag{9}$$

Разностные начальные условия определяются естественным образом: $W_0 = 0$, $D_0 = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2$.

Исходные уравнения имеют нелинейные слагаемые, однако выбранная схема является безытерационной: обе функции вычисляются по явным формулам. Легко заметить, что в нелинейном случае для гладких решений схема имеет первый порядок точности, а для линеаризованной постановки — второй. Конечно, в силу несложной структуры уравнений (7), можно предложить методы более высокого порядка, однако простота вычислений и несложное обобщение схемы на случай решения “полной” задачи делают формулы (9) весьма привлекательными.

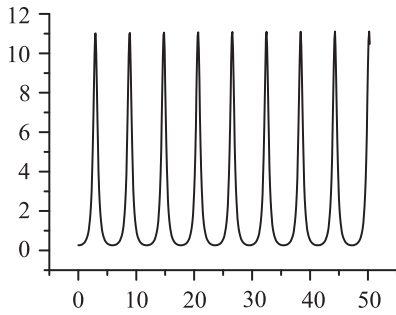


Рис. 1. $N = N(\rho = 0, \theta)$

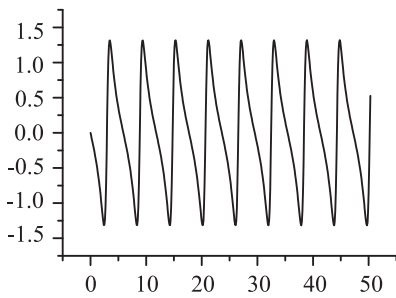


Рис. 2. $W = W(\theta)$

Таблица 1

θ	$N_{f,1}$	$N_{f,2}$	$N_{a,2}$	$N_{a,*}$
00.0	0.2599	0.2599	0.2599	0.2599
03.0	10.913	10.990	11.014	10.958
05.9	0.2600	0.2599	0.2599	0.2607
08.9	10.934	11.012	11.035	10.885
11.8	0.2601	0.2599	0.2599	0.2615
14.8	10.952	11.032	11.053	10.816
17.7	0.2602	0.2600	0.2600	0.2623
20.7	10.966	11.049	11.068	10.745
23.6	0.2604	0.2600	0.2600	0.2632
26.6	10.975	11.064	11.082	10.665
29.5	0.2605	0.2600	0.2600	0.2641
32.5	10.980	11.075	11.093	10.568
35.4	0.2607	0.2601	0.2601	0.2651
38.4	10.980	11.083	11.101	10.446
41.3	0.2365	0.2602	0.2602	0.2661
44.3	39.893	11.088	11.107	10.292
45.7	breaking	breaking	0.6856	0.7598
47.2			0.2602	0.2674
50.2			11.110	10.097

Рассмотрим характерный расчетный вариант по схеме (9); ему соответствуют изображения на рис. 1 и 2 электронной плотности N и производной скорости W в области $0 \leq \theta \leq 50.3$ при следующих значениях параметров: $a_* = 0.365$, $\rho_* = 0.6$. Для сравнения возьмем расчет “полной” задачи (2), (3) при указанных параметрах из работы [7]. С целью экономии места не будем здесь воспроизводить подробное описание применявшейся там разностной схемы, но для формально-корректного изложения добавим недостающее значение $\rho_{\max} = 2.7$.

Результаты сравнения приведены в табл. 1, которая в специально подобранные моменты времени θ содержит экстремальные (минимальные и максимальные) значения электронной плотности на оси $\rho = 0$, посчитанные различными способами. Столбцы $N_{f,1}$ и $N_{f,2}$ получены методом конечных разностей из решения “полной” задачи при следующих значениях сеточных параметров: $h_1 = \frac{1}{800}$, $\tau_1 = \frac{1}{8000}$, $h_2 = \frac{1}{2} h_1$,

$\tau_2 = \frac{1}{4} \tau_1$. Нижние индексы указывают на соответствие параметров и решений.

Напомним кратко динамику развития и разрушения колебаний, детально исследованную в работе [9]. По прошествии нескольких периодов колебаний в некоторый момент времени (в рассматриваемом варианте $\theta_{\max}^{(1)} \approx 33.9$) у решения “полной” задачи происходит формирование первого внеосевого максимума электронной плотности, сопоставимого по величине с регулярным осевым. Затем от периода к периоду происходит нелинейный рост этого внеосевого максимума, приводящий к обращению плотности в бесконечность, что соответствует формированию скачка (разрыва) электрического поля. Этот эффект получил название “опрокидывание”, что по сути означает нарушение корректности гидродинамической модели процесса. Время опрокидывания (т.е. длительность роста внеосевого максимума) определяется параметрами задачи и может составлять от одного до нескольких сотен (и даже тысяч) периодов. Принципиально важным является факт, что пространственная координата разрушения колебаний не принадлежит оси — прямой $\rho = 0$, что было достоверно получено на основе анализа траекторий частиц при моделировании в лагранжевых переменных [9]. Отметим также, что в рассматриваемом варианте опрокидывание наступает в момент $\theta_b \approx 45.7$.

Легко заметить, что в области гладкости решения (при $0 \leq \theta \leq 38.4$) расхождение значений в столбцах $N_{f,1}$ и $N_{f,2}$ не превосходит 1%, однако в окрестности опрокидывания колебаний (при $\theta \geq 41.3$) отличия весьма существенны. Это означает, что сеточные параметры для решения “полной” задачи были выбраны вполне удовлетворительными. Тем более, как показано в [7] и [9], методом конечных разностей в эйлеровых переменных принципиально невозможно в расчетах добраться до момента времени θ_b (для этого требуются методы типа частиц в лагранжевых переменных). Поэтому можно считать, что столбец $N_{f,2}$ представляет разумное с вычислительной точки зрения решение “полной” задачи на оси $\rho = 0$.

Содержание столбца $N_{a,2}$ соответствует рис. 1 и демонстрирует значения аксиального решения (электронной плотности) в моменты времени, указанные в столбце θ и посчитанные для тех же значений параметров задачи при $\tau = \tau_2$. Простое наблюдение показывает, что расхождение в критических точках (т.е. для экстремальных величин) составляет не более 0.22%, что свидетельствует о корректности предлагаемого подхода к вычислению аксиальных решений.

Обратим внимание на главную цель — повышение вычислительной эффективности алгоритмов. При решении “полной” задачи в вычислениях с параметрами h_2 и τ_2 задействуется примерно $M = 4300$ точек по пространству, причем для реализации схемы из [7] используется метод прогонки. Этот алгоритм, конечно, не меняет асимптотику вычислительной работы, но увеличивает ее константу K_p примерно в три раза [10] из-за дополнительных расчетов с переменными прогоночными коэффициентами, зависящими от текущего решения. Поэтому при интересе только к аксиальному поведению электронной плотности можно достигнуть сокращения объема вычислений, равного $M \times K_p$, более чем в 12 000 раз, и результаты такого типа являются одними из основных в настоящей работе.

Напомним, что такое сокращение достигается при практическом совпадении решений (порядка 99.78%). Если допустить большую погрешность по отношению к решению “полной” задачи, то сокращение будет еще более значительным. В столбце $N_{a,*}$ табл. 1 приведены результаты расчетов “усеченной” задачи с более грубым шагом по времени ($\tau_* = 1/1000$). Они соответствуют примерно 10%-й (не различимой на глаз при графическом представлении) погрешности: в данном варианте выигрыш в объеме вычислений ($M \times K \times \tau_*/\tau_2$) составляет уже более чем в 400 000 раз.

Приведем еще один аргумент в пользу разумности вычислений только аксиальных решений задач: он имеет более “физический”, чем “математический” характер. Решения “полных” задач, моделирующие нерелятивистские цилиндрические электронные колебания плазмы, существуют всегда только на ограниченном промежутке времени $\theta < \theta_b$ [6, 9]. При этом достоверные расчеты различной степени точности иллюстрируют регулярность аксиальных решений на более длительных временных интервалах. В частности, в рассматриваемом варианте опрокидывание наступает в момент $\theta_b \approx 45.7$, а аксиальные решения на рис. 1 и 2 и в табл. 1 приведены, в том числе, и при $\theta > \theta_b$. Таким образом, проведенное численное моделирование является весомым дополнительным аргументом в пользу внеосевого опрокидывания рассматриваемых колебаний электронов в плазме.

2. Вынужденные релятивистские колебания электронов в плазме. Анализ колебаний с учетом релятивизма посвящено существенно меньше работ, чем при пренебрежении этим фактором: в первую очередь по причине “неклассичности” постановки задачи. Именно поэтому в материале, изложенном ниже, совершенно отсутствуют претензии на исследование физического процесса и соответствующие выводы. Мы будем интересоваться только методической стороной дела, а именно: численным моделированием аксиальных решений несколько более сложной системы нелинейных уравнений, которые порождаются к тому же не начальными условиями (как это было в предыдущем разделе), а правой частью специального

вида, вынуждающей колебания.

2.1. Постановка “полной” задачи. Рассмотрим вынужденные релятивистские колебания, которые описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} + E + \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} &= 0, & \gamma &= \sqrt{1 + P^2 + \frac{|a|^2}{2}}, \\ V &= \frac{P}{\gamma}, & \frac{\partial E}{\partial \theta} - V \left[1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E) \right] &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где безразмерные искомые функции имеют следующий смысл: $P(\rho, \theta)$ и $V(\rho, \theta)$ — удельный импульс и скорость электронов, $E(\rho, \theta)$ — электрическое поле и $\gamma(\rho, \theta)$ — релятивистский (лоренцевский) фактор.

Физическая интерпретация системы (10) такова. Короткий сверхмощный лазерный импульс, характеризующийся огибающей $a(\rho, \theta)$, распространяется через цилиндрический сгусток плазмы. Скорость импульса настолько велика, а протяженность настолько мала, что обратным влиянием со стороны плазмы на него можно пренебречь. Само же воздействие лазерного импульса на плазму моделируется зависимостью огибающей от времени и поперечной координаты в виде

$$a(\rho, \theta) = a_0 \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{\rho_*^2} - \frac{(\theta_{\min} - \theta)^2}{l_*^2} \right\}, \tag{11}$$

где a_0, ρ_*, l_* — заданные параметры. Эта формула означает, что в начальный момент времени $\theta = 0$ влияние импульса отсутствует (для этого величину θ_{\min} надо взять достаточно большой: например, при $l_* = 3.5$ в расчетах значение θ_{\min} полагалось равным 11). Далее по мере увеличения θ интенсивность воздействия сначала возрастает (до $\theta = \theta_{\min}$ включительно), затем с такой же скоростью убывает, и, начиная с момента $\theta \approx 2\theta_{\min}$, его влияние практически отсутствует. При этом в каждый момент времени распределение интенсивности по поперечной координате носит гауссовский характер и достаточно быстро убывает по пространству.

Для однозначного определения искомых функций в области $\Omega = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}\}$ необходимо добавить необходимые краевые и начальные условия.

На оси (при $\rho = 0$) в силу аксиальной симметрии задачи имеем

$$V(0, \theta) = P(0, \theta) = E(0, \theta) = 0, \quad \gamma(0, \theta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2} T^2(\theta)}, \tag{12}$$

где функция $T(\theta)$ имеет вид $T(\theta) = a_0 \exp \left\{ -\frac{(\theta_{\min} - \theta)^2}{l_*^2} \right\}$.

Кроме того, физическая постановка предусматривает, что поперечное сечение импульса существенно меньше поперечного размера области, занятой плазмой, т.е. $\exp \left(-\frac{\rho_{\max}^2}{\rho_*^2} \right) \ll 1$. Поэтому при достаточно большом значении ρ_{\max} с удовлетворительной точностью справедливы равенства

$$V(\rho_{\max}, \theta) = P(\rho_{\max}, \theta) = E(\rho_{\max}, \theta) = 0, \quad \gamma(\rho_{\max}, \theta) = 1. \tag{13}$$

Начальные данные (зафиксируем для удобства этот момент как $\theta = 0$) соответствуют состоянию покоя:

$$V(\rho, 0) = P(\rho, 0) = E(\rho, 0) = 0, \quad \gamma(\rho, 0) = 1. \tag{14}$$

При этом справедливо выражение (4) для электронной плотности $N(\rho, \theta) = 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E)$.

Таким образом, с учетом релятивистских эффектов задача о вынужденных плазменных колебаниях формулируется так: найти в области Ω функции V, E, P и γ , удовлетворяющие соотношениям (10)–(14). Как и в предыдущем разделе, сохраняется особенность постановки: первостепенный интерес представляет функция электронной плотности на оси (при $\rho = 0$), но для этого приходится решать “полную” задачу.

Рассматриваемая задача была сформулирована в работе [11] на основании системы (1) в предположениях, что решение уравнений, записанных в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) , обладает аксиальной симметрией, определяется только радиальными компонентами и зависимость от переменной z отсутствует. Ее численное и аналитическое исследование было проведено в той же работе, но только для свободных колебаний, поэтому в наших целях несколько восполним чуть ниже этот пробел.

2.2. Метод конечных разностей для “полной” задачи. Введем в области Ω равномерную сетку с шагами h и τ так, что $\rho_m = m h, 0 \leq m \leq M, M h = \rho_{\max}$ и $\theta_k = k \tau, 0 \leq k \leq K, K \tau = \theta_{\max}$. Используя для сеточных функций обозначения $f_m^k = f(\rho_m, \theta_k)$, запишем для $k \geq 0$ дискретный аналог уравнений (10):

$$\begin{aligned} \frac{P_m^{k+1} - P_m^k}{\tau} + E_m^k + \frac{\gamma_{m+1}^k - \gamma_{m-1}^k}{2h} &= 0, \quad 1 \leq m \leq M - 1, \\ \gamma_m^{k+1} &= \sqrt{1 + (P_m^{k+1})^2 + \frac{|a(\rho_m, \theta_{k+1})|^2}{2}}, \quad V_m^{k+1} = \frac{P_m^{k+1}}{\gamma_m^{k+1}}, \quad 0 \leq m \leq M, \\ \frac{E_m^{k+1} - E_m^k}{\tau} - V_m^{k+1} \left[1 - \frac{1}{\rho_m} \frac{\rho_{m+1} E_{m+1}^{k+1} - \rho_{m-1} E_{m-1}^{k+1}}{2h} \right] &= 0, \quad 1 \leq m \leq M - 1, \end{aligned} \tag{15}$$

Разностные начальные и краевые условия, а также выражение для огибающей a , определяются естественным образом как проекции соотношений (11)–(14) на сетку.

Исходные уравнения имеют нелинейные слагаемые, но выбранная схема является безытерационной: импульс P , лоренцевский фактор γ и скорость V вычисляются по явным формулам, а электрическое поле E требует применения метода прогонки [10].

Несколько необычными являются свойства аппроксимации и устойчивости. В нелинейном случае для гладких решений рассматриваемая схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$, а принцип замороженных коэффициентов [12] приводит к условию устойчивости $\tau = O(h^2)$. Для линеаризованной задачи порядок аппроксимации по времени повышается до второго и схема становится безусловно устойчивой.

Таблица 2

θ	$N_{f,1}$	$N_{f,2}$	$N_{a,2}$	$N_{a,*}$
14.4	0.3497	0.3497	0.3497	0.3497
17.7	5.2155	5.2158	5.2158	5.1790
20.8	0.3425	0.3425	0.3425	0.3448
23.8	5.2453	5.2460	5.2460	5.1262
26.8	0.3427	0.3427	0.3427	0.3473
29.9	5.2406	5.2416	5.2417	5.0486
32.9	0.3425	0.3425	0.3425	0.3493
35.9	5.2266	5.2282	5.2283	4.9443
39.0	breaking	breaking	0.3426	0.3514
42.0			5.2469	4.8951
45.0			0.3427	0.3542
48.1			5.2376	4.8368

Сеточный аналог электронной плотности N вычисляется следующим образом:

$$N_m^k = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\rho_m} \frac{\rho_{m+1} E_{m+1}^k - \rho_{m-1} E_{m-1}^k}{2h} & \text{при } 1 \leq m \leq M - 1, \\ 1 - 2 \frac{E_1^k}{h} & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m = M. \end{cases}$$

Рассмотрим расчетный вариант по схеме (15) с такими параметрами задачи: $a_0 = 5.0, \rho_* = 5.0, l_* = 3.5, \rho_{\max} = 22.5, \theta_{\min} = 11.0$. В табл. 2 в моменты времени, обозначенные в столбце θ , приведены экстремальные значения электронной плотности N на оси $\rho = 0$, т.е. ее максимумы и минимумы. При этом величины в столбце $N_{f,1}$ посчитаны при сеточных параметрах $h_1 = 2.5 \times 10^{-3}, \tau_1 = 0.3125 \times 10^{-4}$, а величины $N_{f,2}$ — при $h_2 = \frac{h_1}{2}, \tau_2 = \frac{\tau_1}{4}$. В данном случае сеточные параметры были выбраны настолько малыми, чтобы опрокидывание сеточных решений происходило максимально синхронно.

Легко заметить, что здесь различия в экстремальных значениях $N_{f,1}$ и $N_{f,2}$ не превышают 0.03%, что свидетельствует о высокой достоверности расчетов, причем не только в области гладкости решения. Для взятых физических параметров задачи момент опрокидывания (обращения плотности в бесконечность) определен как $\theta_b \approx 37.5$, поэтому начиная с этого времени решение “полной” задачи (10)–(14), вообще говоря, не определено.

2.3. Постановка “усеченной” задачи. Учитывая вид краевых условий (12), будем в окрестности оси рассматривать линейные по пространству решения P, V, E уравнений (10), т.е.

$$V(\rho, \theta) = W(\theta) \rho, \quad E(\rho, \theta) = D(\theta) \rho, \quad P(\rho, \theta) = Q(\theta) \rho, \tag{16}$$

а влияние релятивистского фактора учтем следующим образом. Сначала рассмотрим полное выражение

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + P^2 + |a|^2/2}} \left(2P \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial |a|^2}{\partial \rho} \right), \tag{17}$$

в котором вычислим $\frac{\partial |a|^2}{\partial \rho} = -\frac{4\rho}{\rho_*^2} \exp\left\{-\frac{2\rho^2}{\rho_*^2}\right\} T^2(\theta)$. Теперь, анализируя в (17) линейную зависимость при малых ρ , с учетом (16) получим

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2(\theta)/2}} \left(Q^2 - \frac{T^2(\theta)}{\rho_*^2} \right) \rho + o(\rho).$$

Кроме того, из (10) имеем $V\gamma = P$, $\gamma = \sqrt{1 + P^2 + \frac{|a|^2}{2}}$, что в предположении (16) дает

$$\Gamma(\theta) \equiv \gamma(\rho = 0, \theta) = \sqrt{1 + \frac{T^2(\theta)}{2}}, \quad W(\theta) = \frac{Q(\theta)}{\Gamma(\theta)}.$$

В результате для аксиальных решений имеем систему дифференциальных и алгебраических уравнений

$$Q' + D + \frac{Q^2}{\Gamma(\theta)} = \frac{T^2(\theta)}{\Gamma(\theta)\rho_*^2}, \quad W = \frac{Q}{\Gamma(\theta)}, \quad D' - W(1 - 2D) = 0 \tag{18}$$

с известными (заданными) функциями $\Gamma(\theta)$, $T(\theta)$, дополненную начальными условиями покоя при $\theta = 0$:

$$W(0) = Q(0) = D(0) = 0. \tag{19}$$

Напомним, что аналогично тому, что говорилось в разделе 1 про нерелятивистские колебания, для функции электронной плотности имеется следующее выражение на оси: $N(\rho = 0, \theta) = 1 - 2D(\theta)$. Таким образом, задача определения аксиальных решений в данном случае сводится к интегрированию уравнений (18) на временном отрезке $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$ с начальными условиями (19).

2.4. Численная схема и результаты расчетов для “усеченной” задачи. Введем равномерную сетку $\theta_k = k\tau$, $0 \leq k \leq K$, $K\tau = \theta_{\max}$ и запишем дискретный аналог уравнений (18). Используя для сеточных функций обозначения $f_k = f(\theta_k)$, будем иметь для $k \geq 0$ схему

$$\begin{aligned} \frac{Q_{k+1} - Q_k}{\tau} + D_k + \frac{Q_k^2}{\Gamma(\theta_k)} &= \frac{T^2(\theta_k)}{\Gamma(\theta_k)\rho_*^2}, \\ W_{k+1} = \frac{Q_{k+1}}{\Gamma(\theta_{k+1})}, \quad \frac{D_{k+1} - D_k}{\tau} - W_{k+1}(1 - 2D_{k+1}) &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Разностные начальные условия определяются естественным образом: $W_0 = Q_0 = D_0 = 0$.

Легко заметить, что при $\theta \geq 2\theta_{\min}$ (когда $\Gamma(\theta) \approx 1$, $T(\theta) \approx 0$) соотношения (20) переходят в соотношения (9), так как при этом справедливо $Q(\theta) \approx W(\theta)$. Поэтому, когда вынужденные колебания превращаются в свободные, свойства схем (20) и (9) полностью совпадают.

Приведем для сравнения с расчетами из раздела 2.3 результаты вычислений по схеме (20) с теми же параметрами задачи. Рассмотрим в табл. 2 столбец $N_{a,2}$, содержащий значения электронной плотности, посчитанный при сеточном параметре τ_2 . Легко видеть, что экстремальные значения на оси, полученные из “полной” и “усеченной” задач при одних и тех же физических и сеточных параметрах практически совпадают (имеются отличия в последних разрядах для некоторых максимумов).

С учетом размерностей указанных задач и дополнительной вычислительной работы, связанной с методом прогонки в случае переменных коэффициентов для схемы (15), в данном случае имеем сокращение объема вычислений ($M \times K_p$) более чем в 50 000 раз при погрешности, не превышающей $(2 \times 10^{-3})\%$. Если же допустима погрешность порядка 10% (не отличимая на графике), то (см. столбец $N_{a,*}$ в табл. 2) достаточно вместо τ_2 взять для расчета $\tau_* = 1/200$, что при вычислении значений плотности только на оси позволяет сократить объем вычислительной работы ($M \times K_p \times \tau_*/\tau_2$) более чем в 8×10^6 раз по сравнению с решением полной задачи, из которой получен столбец $N_{f,2}$.

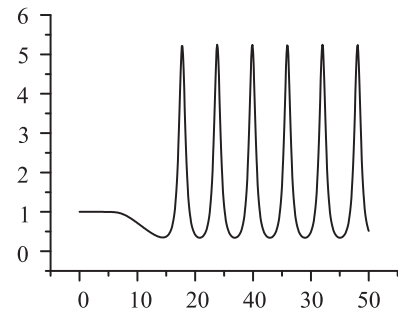


Рис. 3. $N(\theta) = N(\rho = 0, \theta)$

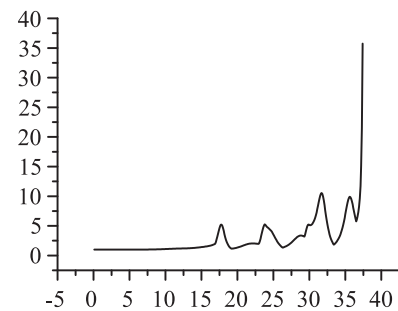


Рис. 4. $MAX(\theta) = \max_{0 \leq \rho \leq \rho_{\max}} N(\rho, \theta)$

Обратим внимание, что столбцы, в которых приведены расчеты “усеченной” задачи, при одних и тех же параметрах продолжают по времени дальше. Это означает, что задача (18), (19) имеет регулярное решение и при $\theta > \theta_b$. Другими словами, приведенные расчеты свидетельствуют о внеосевом опрокидывании вынужденных релятивистских колебаний. Дополнительными иллюстрациями к этому факту являются рис. 3 и 4. На рис. 3 приведен график электронной плотности, полученный при решении “усеченной” задачи для $0 \leq \theta \leq 50$, причем верхняя граница временного интервала существенно превышает время опрокидывания. На рис. 4 изображена зависимость от времени величины $\max_{0 \leq \rho \leq \rho_{\max}} N(\rho, \theta)$, полученной при расчете “полной” задачи. Хорошо заметно совпадение первых трех глобальных максимумов с локальными (осевыми). Далее формируется первый по времени ($\theta_{\max}^{(1)} \approx 32$) внеосевой максимум со значением, примерно в два раза превышающим осевые регулярные максимумы. Рост именно этого максимума приводит к опрокидыванию колебаний в момент θ_b .

3. Кильватерные волны в плазме, возбуждаемые остросфокусированным лазерным импульсом. Распространяясь в плазме, короткий сверхмощный лазерный импульс возбуждает за собой колебания плотности электронов (так называемую кильватерную волну). В электрическом поле кильватерной волны, возникающем из-за разделения зарядов электронов и ионов плазмы, возможно эффективное ускорение электронов до высоких энергий (см. обзор [3]). Однако по мере удаления от импульса возмущения электронной плотности изменяют свою форму и на некотором расстоянии могут разрушаться. В результате размер области, в которой амплитуда регулярной кильватерной волны достаточно велика и волна может быть использована для ускорения инжектируемых в нее частиц, оказывается ограниченным. Именно эта характеристика области (протяженность мощной регулярной волны) и представляет основной интерес в прикладном аспекте [13].

3.1. Постановка “полной” задачи. Рассмотрим аксиально симметричный лазерный импульс, распространяющийся вдоль оси OZ с групповой скоростью v_g , которая в разреженной плазме близка к скорости света. Для упрощения модели примем, что $v_g = c$, и перейдем в систему координат, связанную с импульсом, введя переменные $\eta = k_p(z - ct)$ и $\rho = k_p r$, где k_p — плазменная частота, отнесенная к скорости света. В пренебрежении изменением импульса со временем, т.е. $a(\rho, \eta) = a_* \exp\left\{-\frac{\rho^2}{\rho_*^2} - \frac{\eta^2}{l_*^2}\right\}$, из системы уравнений (1) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial q}{\partial \eta} = \Delta \gamma - \varphi \gamma + 1, \\ q\varphi + \frac{\partial \beta}{\partial \rho} = 0, \quad \varphi\psi - \Delta\psi + 1 = 0, \quad 2\gamma\psi + \psi^2 + q^2 + 1 + \frac{|a|^2}{2} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Система уравнений (21) записана в безразмерном виде относительно неизвестных функций: γ , β , $\psi = q_z - \gamma$, $\varphi = n/\gamma$, $q = p_r/mc$; для радиальной части оператора Лапласа используется обозначение $\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$; детали перехода к этой системе можно найти в [14].

Для однозначного определения искомым функций в области $\Omega = \{(\rho, \eta) : 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, \eta_e \leq \eta \leq \eta_s\}$ требуются дополнительные условия. Опишем их структуру, предварительно сформулировав требования на согласование параметров импульса и размеров области Ω .

Физическая постановка задачи предусматривает, что поперечное сечение импульса существенно меньше поперечного размера области, занятой плазмой, т.е. $\exp\left(-\frac{\rho_{\max}^2}{\rho_*^2}\right) \ll 1$. Продольные характеристики области Ω выбирались из других соображений: $\exp\left(-\frac{\eta_s^2}{l_*^2}\right) \ll 1$, а значение η_e определялось только исследовательскими целями и имеющимися вычислительными ресурсами; типичные значения в расчетах: $l_* = 3.5$, $\eta_s = 11$, $\eta_e = -50$. Отметим, что переменная η в задаче изменяется в сторону убывания (лазерный импульс в выбранной системе координат является неподвижным), т.е. интегрирование по ней проводится в обратном направлении.

Таким образом, указанное согласование параметров фактически означает моделирование следующей ситуации. Перед импульсом ($\eta \geq \eta_s$) имеется невозмущенная плазма, т.е. при $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$ заданы начальные условия

$$\psi(\rho, \eta_s) = -1, \quad \beta(\rho, \eta_s) = 0, \quad q(\rho, \eta_s) = 0, \quad \varphi(\rho, \eta_s) = 1, \quad \gamma(\rho, \eta_s) = 1. \quad (22)$$

Затем (при $\eta_e \leq \eta \leq \eta_s$) плазма меняет свою структуру в соответствии с решением системы (21), однако в поперечном сечении импульс локализован настолько, что граничные значения функций (при $\rho = \rho_{\max}$)

вполне можно считать невозмущенными, т.е. соответствующими состоянию покоя:

$$\psi(\rho_{\max}, \eta) = -1, \quad \beta(\rho_{\max}, \eta) = 0, \quad \varphi(\rho_{\max}, \eta) = 1, \quad \gamma(\rho_{\max}, \eta) = 1, \quad q(\rho_{\max}, \eta) = 0; \quad (23)$$

на оси (при $\rho = 0$) в силу аксиальной симметрии задачи заданы условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho}(0, \eta) = \frac{\partial \beta}{\partial \rho}(0, \eta) = \frac{\partial \gamma}{\partial \rho}(0, \eta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(0, \eta) = q(0, \eta) = 0. \quad (24)$$

Таким образом, задача о плазменных кильватерных волнах, возбуждаемых коротким сверхмощным остросфокусированным лазерным воздействием, формулируется так: найти в области Ω функции $\psi, \beta, \gamma, q, \varphi$, удовлетворяющие соотношениям (21)–(24). Как и в предыдущих разделах, сохраняется особенность постановки: первостепенный интерес представляет функция электронной плотности $N = \varphi\gamma$ на оси (при $\rho = 0$), но для этого приходится решать “полную” задачу.

Постановка (21)–(24) хорошо известна, для ее решения разработаны и используются методы, основанные на проекционном подходе, на методе конечных разностей, методе частиц и др. [15].

3.2. Постановка “усеченной” задачи. Учитывая вид краевых условий (24), т.е. фактически условия четности или нечетности искомых функций относительно оси симметрии $\rho = 0$, будем рассматривать решения следующей структуры:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \eta) &= \psi_0(\eta) + \psi_2(\eta)\rho^2, & \beta(\rho, \eta) &= \beta_0(\eta) + \beta_2(\eta)\rho^2, \\ \varphi(\rho, \eta) &= \varphi_0(\eta) + \varphi_2(\eta)\rho^2, & \gamma(\rho, \eta) &= \gamma_0(\eta) + \gamma_2(\eta)\rho^2, & q(\rho, \eta) &= q_1(\eta)\rho. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь нижний индекс у функции указывает на то, что он является множителем, зависящим от переменной η , при соответствующей степени переменной ρ .

Подставляя вид решений (25) в систему (21) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ , получим дифференциально-алгебраическую систему

$$\begin{aligned} \psi'_0 &= \beta_0, & \psi'_2 &= \beta_2, & \beta'_0 + 2q'_1 &= 4\gamma_2 - \varphi_0\gamma_0 + 1, & \varphi_0\psi_0 - 4\psi_2 + 1 &= 0, \\ 2\gamma_0\psi_0 + \psi_0^2 + 1 + \frac{S^2(\eta)}{2} &= 0, & q_1\varphi_0 + 2\beta_2 &= 0, & \gamma_2\psi_0 + \gamma_0\psi_2 + \psi_0\psi_2 + \frac{q_1^2}{2} - \frac{S^2(\eta)}{2\rho_*^2} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где функция $S(\eta)$ имеет вид $S(\eta) = a_0 \exp\left\{-\frac{\eta^2}{l_*^2}\right\}$. Обратим внимание, что здесь, в отличие от (20), количество уравнений (семь) не совпадает с количеством неизвестных (восемь), поэтому для замыкания системы необходимо добавить какое-то дополнительное соотношение (дифференциальное или алгебраическое). С этой целью воспользуемся приближением для малых a_0 . Заметим, что малые значения a_0 означают только малость значений функций $(\psi_0, \beta_0, \gamma_0)$ на оси, но не малость радиальных производных $(\psi_2, \beta_2, \gamma_2, q_1)$. Тем более что аксиальные колебания плотности определяются в первую очередь значениями ψ_2 и могут на порядок превышать фоновое значение, так как существенно зависят не только от a_0 , но и от ρ_* .

В предположении малости a_0 представим решение полной системы (21) в виде

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \eta) &= -1 + \tilde{\psi}(\rho, \eta) + o(\tilde{\psi}), & \beta(\rho, \eta) &= 0 + \tilde{\beta}(\rho, \eta) + o(\tilde{\beta}), \\ \varphi(\rho, \eta) &= 1 + \tilde{\varphi}(\rho, \eta) + o(\tilde{\varphi}), & \gamma(\rho, \eta) &= 1 + \tilde{\gamma}(\rho, \eta) + o(\tilde{\gamma}), & q(\rho, \eta) &= 0 + \tilde{q}(\rho, \eta) + o(\tilde{q}). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь для удобства в явном виде выделены фоновые значения функций. В этом случае, с точностью до членов второго порядка малости, из первых четырех уравнений (21) будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} = \tilde{\beta}, \quad \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \eta} = \Delta \tilde{\gamma} - \tilde{\varphi} - \tilde{\gamma}, \quad \tilde{q} + \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \rho} = 0, \quad \tilde{\varphi} - \tilde{\psi} - \Delta \tilde{\psi} = 0.$$

Из полученной системы после несложных преобразований (см., например, [14]) следует искомое соотношение

$$\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \eta} + \tilde{\psi} + \tilde{\gamma} = 0.$$

Это уравнение формально справедливо для произвольных значений ρ и η , но здесь оно имеет первостепенное значение для замыкания системы (26). Поэтому, применяя к нему представления (25) и (27), получим недостающее уравнение при $\rho = 0$:

$$\beta'_0 + \psi_0 + \gamma_0 = 0. \quad (28)$$

Учитывая структуру полученной системы (26), (28), удобно разделить задачу определения аксиальных решений на две подзадачи. Первая — задача для независимого определения самих функций на оси

$$\psi'_0 = \beta_0, \quad \beta'_0 + \psi_0 + \gamma_0 = 0, \quad 2\gamma_0\psi_0 + \psi_0^2 + 1 + \frac{S^2(\eta)}{2} = 0, \quad (29)$$

снабженная при $\eta = \eta_s$ начальными условиями

$$\psi_0(\eta_s) = -1, \quad \beta_0(\eta_s) = 0, \quad (30)$$

а вторая — задача для радиальных производных с уже определенными функциями $\psi_0, \beta_0, \gamma_0$:

$$\begin{aligned} \psi'_2 = \beta_2, \quad q_1\varphi_0 + 2\beta_2 = 0, \quad \varphi_0\psi_0 - 4\psi_2 + 1 = 0, \\ 2q'_1 = 4\gamma_2 - \varphi_0\gamma_0 + 1 + \varphi_0 + \gamma_0, \quad \gamma_2\psi_0 + \gamma_0\psi_2 + \psi_0\psi_2 + \frac{q_1^2}{2} - \frac{S^2(\eta)}{2\rho_*^2} = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

со своими начальными условиями

$$\psi_2(\eta_s) = 0, \quad q_1(\eta_s) = 0, \quad (32)$$

Таким образом, задача определения аксиальных решений в данном случае сводится к интегрированию уравнений (29) и (31) на временном отрезке $\eta_e \leq \eta \leq \eta_s$ с начальными условиями (30) и (32). При этом искомое значение функции электронной плотности на оси выражается формулой

$$N(\rho = 0, \eta) = \varphi_0\gamma_0 = -\frac{\gamma_0}{\psi_0}(1 - 4\psi_2). \quad (33)$$

3.3. Численная схема и результаты расчетов для “усеченной” задачи. Введем равномерную сетку $\eta_k = k\tau$, $K_{\min} \leq k \leq K_{\max}$, $(K_{\max} - K_{\min})\tau = \eta_{\max} - \eta_{\min}$ и запишем дискретные аналоги сформулированных подзадач, используя для сеточных функций обозначения $f^k = f(\eta_k)$. Для системы (29), (30) будем иметь расчетные формулы

$$\frac{\psi_0^{k+1} - \psi_0^k}{\tau} = \beta_0^{k+1}, \quad \gamma_0^k = -\frac{(\psi_0^k)^2 + 1 + S^2(\eta_k)/2}{2\psi_0^k}, \quad \frac{\beta_0^{k+1} - \beta_0^k}{\tau} + \psi_0^k + \gamma_0^k = 0 \quad (34)$$

и начальные условия

$$\psi_0^{K_{\max}} = -1, \quad \beta_0^{K_{\max}} = 0. \quad (35)$$

Обратим внимание, что схема (34), (35) — явная, так как интегрирование по переменной η ведется в сторону ее убывания.

Для численного решения уравнений (31) удобно сначала исключить из системы функции $\beta_2, \gamma_2, \varphi_0$ и привести ее к виду

$$\begin{aligned} \psi'_2 = \frac{q_1}{2\psi_0}(1 - 4\psi_2), \\ q'_1 + \frac{q_1^2}{\psi_0} = \frac{1}{2} \left[1 + \psi_0 + \gamma_0 + \frac{\gamma_0}{\psi_0}(1 - 4\psi_2) \right] - \frac{2}{\psi_0} \left[\psi_2(\gamma_0 + \psi_0) - \frac{S^2(\eta)}{2\rho_*^2} \right], \end{aligned}$$

а только потом записать соответствующую расчетную схему

$$\begin{aligned} \frac{\psi_2^{k+1} - \psi_2^k}{\tau} = \frac{q_1^{k+1}}{2\psi_0^{k+1}}(1 - 4\psi_2^{k+1}), \\ \frac{q_1^{k+1} - q_1^k}{\tau} + \frac{q_1^k}{\psi_0^k} = \frac{1}{2} \left[1 + \psi_0^k + \gamma_0^k + \frac{\gamma_0^k}{\psi_0^k}(1 - 4\psi_2^k) \right] - \frac{2}{\psi_0^k} \left[\psi_2^k(\gamma_0^k + \psi_0^k) - \frac{S^2(\eta_k)}{2\rho_*^2} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

снабдив ее недостающими начальными условиями

$$\psi_2^{K_{\max}} = -1, \quad q_1^{K_{\max}} = 0. \quad (37)$$

В отличие от схемы (34), (35), схема (36), (37) реализуется явно- неявным образом: значения ψ_2^k из первого соотношения определяются явно, а значения q_1^k из второго (нелинейного) — вычисляются с помощью классического метода Ньютона. При этом итерации останавливаются, когда модуль невязки становится

не больше δ_N . В расчетах начальное приближение бралось с соседнего временного шага, а величина δ_N полагалась примерно равной τ^2 .

Рассмотрим сначала результаты расчетов “полной” задачи с параметрами $a_0 = 0.088$, $\rho_* = 0.15$, $l_* = 3.5$, $\eta_s = 11.0$, $\rho_{\max} = 0.65$.

На рис. 5 и 6 приведены графики функций $\beta_f = \tilde{\beta}(0, \eta)$ и $\psi_f = \tilde{\psi}(0, \eta)$, из которых следует, что допущение об их малости на оси вполне пригодно, так как отклонения от фоновых значений этих функций по модулю не превышает величин 2×10^{-3} и 3×10^{-3} соответственно. Кроме того, значения функции $\tilde{\gamma}(\rho, \eta)$ даже в окрестности центра импульса не превышают по модулю величины 2×10^{-3} . Все это свидетельствует о корректности использования соотношения (28) для замыкания системы (26).

Таблица 3

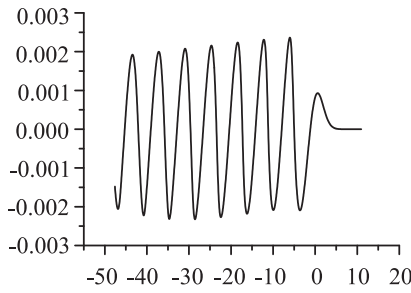


Рис. 5. $\beta_f = \tilde{\beta}(0, \eta)$

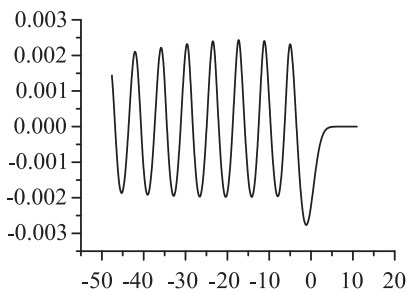


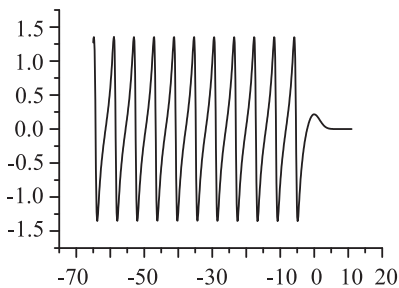
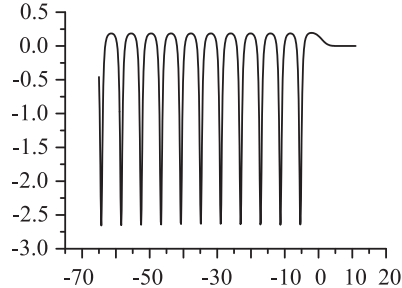
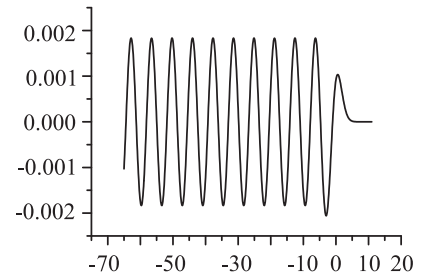
Рис. 6. $\psi_f = \tilde{\psi}(0, \eta)$

η	$N_{f,1}$	$N_{f,2}$	$N_{a,2}$
-02.0	0.2231	0.2231	0.2231
-05.4	11.483	11.536	11.584
-08.3	0.2556	0.2556	0.2554
-11.3	11.500	11.547	11.602
-14.2	0.2556	0.2555	0.2553
-17.2	11.500	11.539	11.588
-20.1	0.2555	0.2555	0.2553
-23.1	11.505	11.536	11.566
-26.0	0.2555	0.2555	0.2555
-29.0	11.510	11.531	11.535
-31.9	0.2556	0.2556	0.2558
-34.9	11.505	11.517	11.495
-37.8	0.2558	0.2558	0.2561
-40.7	11.514	11.527	11.541
-43.7	0.2560	0.2561	0.2565
-46.6	breaking	11.542	11.554
-49.6		breaking	0.2568
-52.5			11.569
-55.5			0.2570
-58.4			11.585
-61.4			0.2572
-64.3			11.601

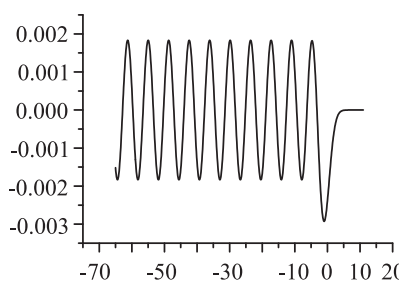
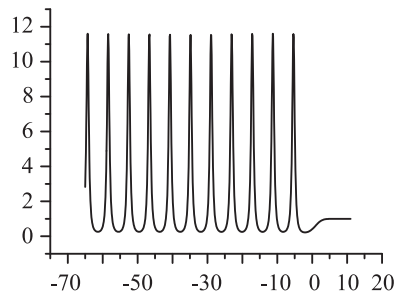
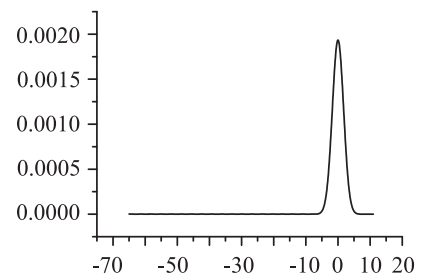
Обратимся теперь к анализу табл. 3. В столбце $N_{f,1}$ для указанных значений параметра η приведены экстремальные значения функции электронной плотности при $\rho = 0$, взятые из расчета “полной” задачи при следующих сеточных параметрах: $h_1 = 0.5 \times 10^{-3}$, $\tau_1 = 0.5 \times 10^{-4}$. Обратим внимание, что в этом случае при $\eta = -46.6$ сеточная кильватерная волна уже прекратила свое существование (опрокинулась). Следующий столбец $N_{f,2}$ содержит значения той же функции, но для сеточных параметров $h_2 = \frac{h_1}{2}$, $\tau_2 = \frac{\tau_1}{4}$. Легко увидеть, что в области гладкости решения (т.е. при $\eta \geq -43.7$) отклонения экстремальных значений не превосходят 0.5% — другими словами, сходимость по сетке уже достигнута с удовлетворительной точностью. При этом опрокидывание сеточной кильватерной волны происходит несколько дальше от центра импульса (при $\eta \geq -47.6$), что, в свою очередь, свидетельствует о достаточной малости сеточных параметров, но не об их искусственной заниженности. И наконец, столбец $N_{a,2}$ содержит значения электронной плотности, полученные из решения “усеченной” задачи при использовании сеточного параметра τ_2 . Здесь отклонения от величин $N_{f,2}$ также не превышают 0.5%, что в явной форме свидетельствует о корректности предложенного способа моделирования аксиальных решений.

Что же касается оценки сокращения объема вычислений, то в случае с кильватерными волнами соответствующие величины посчитать существенно труднее. Дело в том, что на каждом шаге по переменной η при решении обеих задач используется метод Ньютона, причем для “полной” задачи он реализуется матричной 3×3 прогонкой [15], а для “усеченной” — скалярными формулами (для одного уравнения). Поэтому даже если пренебречь замедлением сходимости для системы из примерно $M = 2600$ уравнений (по сравнению со сходимостью для одного уравнения), то оценка снизу для сокращения объема вычислительной работы выглядит как $M \times K_p > 20000$ раз (т.е. $K_p \geq 8$). Обратим внимание, что такое “небольшое” сокра-

щение (по сравнению с предыдущими разделами) как раз наиболее заметно на практике ввиду значимой вычислительной трудоемкости расчетов кильватерных волн. Например, даже несложный с вычислительной точки зрения вариант “полной” задачи требует примерно 10 часов процессорного времени при использовании CPU Intel Core2 Duo Wolfdale (2.66 ГГц). Поэтому определение только аксиального решения за 2–3 секунды на том же процессоре представляет определенный интерес при многократных расчетах для решения задач оптимизационного характера.

Рис. 7. $q_1 = q_1(\eta)$ Рис. 8. $\psi_2 = \psi_2(\eta)$ Рис. 9. $\beta_0 = \beta_0(\eta)$

В завершение раздела на рис. 7–12 приведем иллюстрации аксиальных решений, учитывая их новизну. Следует обратить внимание, что радиальные производные (q_1 , ψ_2) как минимум на три порядка превосходят значения аксиальных возмущений функций (β_0 , ψ_0 , γ_0). Поэтому при малых a_0 только производные определяют значения электронной плотности на оси $\rho = 0$. Это подчеркивает справедливость замыкающего соотношения (28) для выделения аксиальных решений из системы (26).

Рис. 10. $\tilde{\psi}_0 = \psi_0(\eta) + 1$ Рис. 11. $N = N(\eta)$ Рис. 12. $\gamma_0 = \gamma_0(\eta) - 1$

Конечно, в поведении функций $\tilde{\beta}(0, \eta)$, $\tilde{\psi}(0, \eta)$ из решения “полной” задачи (рис. 5 и 6) и функций $\beta_0(\eta)$, $\tilde{\psi}_0 = \psi_0(\eta) + 1$ из решения “усеченной” задачи (рис. 9 и 10) имеются некоторые отличия. В частности, аксиальные решения имеют более ярко выраженный периодический характер по сравнению с решениями “полной” задачи на оси. Однако, в силу малости их абсолютных величин, весьма затруднительно утверждать, что отклонение от периодического поведения не обусловлено погрешностями аппроксимации по радиальной переменной.

Обратим внимание, что аксиальные решения существуют на более длительных расстояниях от центра импульса по сравнению с решениями “полной” задачи; это является веским аргументом в пользу внеосевого опрокидывания кильватерных волн. Дело в том, что ранее встречались публикации, содержащие альтернативную точку зрения, а именно: об аксиальном опрокидывании (см., например, [16] и цитированные там работы) вследствие возникновения у решения “полной” задачи особенности типа “ласточкин хвост”. На основании численного моделирования, проведенного в настоящей работе, физические аргументы из указанных публикаций (другие аргументы в них отсутствовали!) в пользу аксиального опрокидывания следует признать несостоятельными.

Заключение. Сформулируем кратко полученные результаты. Для некоторых нелинейных задач, моделирующих лазерно-плазменные взаимодействия и обладающих свойством пространственной локальности, в работе получены “усеченные” постановки, описывающие поведение решения на оси симметрии или вблизи нее (в том числе — радиальные производные решений). Эти выделенные решения названы, для удобства, аксиальными. Для каждой такой постановки предложен свой численный алгоритм и проведены разносторонние вычислительные эксперименты. Из них, в частности, следует корректность (справедливость) выведенных одномерных систем уравнений. Отметим, что в случае свободных нереля-

тивистских и вынужденных релятивистских колебаний “усеченные” уравнения носят точный характер, а в случае кильватерных волн — приближенный. Кроме того, приведены теоретические оценки снизу (на практике они существенно больше) сокращения объема вычислительной работы при расчете только аксиальных решений по сравнению с определением решения “полной” задачи. И наконец, побочный результат моделирования — подтверждение факта внеосевого опрокидывания колебаний и волн, возбуждаемых остророфокусированным лазерным импульсом в плазме.

Конечно, всегда следует иметь в виду, что моделирование только аксиальных решений может оказаться недостаточным для подробного изучения явления или процесса; предлагаемый подход представляется полезным и эффективным дополнением к традиционной схеме исследования.

Обратим внимание, что результаты и идеи настоящей статьи могут быть использованы при решении других задач, решения которых обладают выраженной аксиальной симметрией и быстрым убыванием по радиальной переменной. В частности, аналогичным образом могут быть построены аксиальные решения нелинейных систем уравнений, описывающих плазменные колебания и волны в плоской и сферической геометрии.

Автор выражает благодарность В. С. Суркову за плодотворные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
2. *Боровский А.В., Галкин А.Л.* Лазерная физика. М.: ИЗДАТ, 1996.
3. *Esarey E., Sprangle P., Krall J., Ting A.* Overview of plasma-based acceleration concepts // IEEE Trans. on Plasma Science. 1996. **24**. 252–288.
4. *Mora P., Antonsen T.M.* Kinetic modelling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas // Phys. of Plasmas. 1997. **4**. 217–229.
5. *Ахизер А.И., Половин Р.В.* К теории волновых движений электронной плазмы // ЖЭТФ. 1956. **30**, № 5. 915–928.
6. *Dawson J.M.* Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Phys. Review. 1959. **113**, № 2. 383–387.
7. *Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В.* О моделировании нерелятивистских цилиндрических колебаний в плазме // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 1. 62–69.
8. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997.
9. *Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В., Андреев Н.Е.* Опрокидывание нелинейных цилиндрических колебаний плазмы // Физика плазмы. 2010. **36**, № 4. 375–386.
10. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
11. *Chizhonkov E.V., Frolov A.A., Gorbunov L.M.* Modelling of relativistic cylindrical oscillations in plasma // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. **23**, № 5. 455–467.
12. *Базвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
13. *Горбунов Л.М.* Зачем нужны сверхмощные лазерные импульсы? // Природа. 2007. № 4. 11–20.
14. *Andreev N.E., Gorbunov L.M., Chizhonkov E.V.* Numerical modelling of the 3D nonlinear wakefield excited by a short laser pulse in a plasma channel // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. **13**, № 1. 1–11.
15. *Chizhonkov E.V., Gorbunov L.M.* Calculation of a 3D axial symmetric nonlinear wakefield // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. **22**, № 6. 531–541.
16. *Буланов С.В., Ямагива М., Есиркепов Т.Ж., Дылов Д.В., Каменец Ф.Ф., Князев Н.С., Кога Д.К., Кандо М., Уешима Ю., Саито К. и др.* Ускорение электронного сгустка в режиме опрокидывания кильватерной волны // Физика плазмы. 2006. **32**, № 4. 291–310.

Поступила в редакцию
08.06.2010